ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 13 Οκτωβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 4

1). Υπολογίστε το $\int_{\vec{\sigma}} f ds$, όπου $f(x,y,z) = z$ και $\vec{\sigma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ για $0 \le t \le 2\pi$.

2)$^{\otimes}$. Έστω η δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = (z^3 + 2xy)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$. Δείξτε ότι το παραγόμενο έργο της δύναμης $\vec{F}$ πάνω στη περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές $(\pm 1, \pm 1, 5)$ είναι μηδέν.

3)$^{\otimes}$. Δείξτε οτι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ κατα μήκος της καμπύλης που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την $r = r(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ (δηλ. $\vec{\sigma}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$) είναι

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)(r^2(\theta) + (r'(\theta))^2)^{\frac{1}{2}}\, d\theta\ .$$

Στή συνέχεια υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.
(Υποδ.: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$.)

4). Υπολογίστε το $\int_{\vec{\sigma}} ydx + (3y^3 - x)dy + zdz$ για τις καμπύλες $\vec{\sigma}(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, 3...$

5)$^{\otimes}$. Βρείτε τη μάζα του σύρματος που έχει το σχήμα της τομής της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ με το επίπεδο $z = \frac{1}{2}$, αν η πυκνότητα μάζας στο (x,y,z) δίνεται από την $\rho(x,y,z) = x^2$ γραμμάρια ανά μονάδα μήκους σύρματος.

6)$^{\otimes}$. Υπολογίστε το $\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$ όπου η C είναι μια τυχαία προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $(1,1,1)$ με το $(1,2,4)$.

7). Έστω $\vec{\sigma}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ μια καμπύλη με $\vec{\sigma}'(t) \ne 0$, $t_0 \le t \le t_1$ και $\vec{T}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην κατεύθυνση του προσανατολισμού της καμπύλης. Αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\vec{\sigma}} \vec{T} \cdot d\vec{s}$ είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης.

8). Έστω $\vec{\sigma} : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^3$ μία ομαλή καμπύλη με $\vec{\sigma}'(t) \ne 0$, $t \in [\alpha, \beta]$.
(α) Αν τα διανύσματα $\vec{F}(\vec{\sigma}(t))$, $\vec{\sigma}'(t)$ είναι κάθετα για όλα $t \in [\alpha, \beta]$ αποδείξτε ότι

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0\ .$$

(β) Αν τα διανύσματα $\vec{F}(\vec{\sigma}(t))$, $\vec{\sigma}'(t)$ είναι παράλληλα για όλα $t \in [\alpha, \beta]$ αποδείξτε ότι

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \|\vec{F}\| ds \ .$$

(Υποδ. Αν είναι παράλληλα αποδείξτε αρχικά ότι υπάρχει $\lambda(t) > 0$ ώστε να ισχύει $\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = \lambda(t)\vec{\sigma}'(t)$).

<u>Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$</u>

<u>Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)</u>

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>