ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 20 Οκτωβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 5

**1)**.$^{\otimes}$ Έστω η δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$.Υπολογίστε το παραγόμενο έργο της δύναμης $\vec{F}$ πάνω στη περίμετρο του τριγώνου με κορυφές
(α) $A(1,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ ,
(β) $A(1,1,1)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,-1)$ .

**2)**. Έστω το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ και η καμπύλη $\vec{\sigma}(t)$ που έχει αρχή το σημείο $A(1,0,0)$ ενδιάμεσο το σημείο $B(0,1,0)$ και τέλος το σημείο $C(2,-1,4)$. Το τμήμα της καμπύλης μεταξύ των σημείων $A$ και $B$ είναι κομμάτι κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, το δε τμήμα της καμπύλης μεταξύ των σημείων $B$ και $C$ είναι ευθύγραμμο τμήμα. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\vec{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} \ .$$

**3)**$^{\otimes}$. Δίδεται η επιφάνεια $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(x,y) = (x, y, 2x^2 + y^2)$.
(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Στο σημείο $\Phi(x_0, y_0)$ βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

**4)**. Δίδεται η επιφάνεια $\Phi : [0,+\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sqrt{2}\sin v, 2u^2), \quad u \geq 0, \quad v \in [0, 2\pi) \ .$$

(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

**5)**$^{\otimes}$. Δίδεται η επιφάνεια $\Phi : [0,\pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$,

$$\Phi(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi), \quad \phi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0, 2\pi) \ .$$

(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Στο σημείο $\Phi(\phi_0, \theta_0)$ βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

**6)**$^{\otimes}$. Να περιγραφεί σε παραμετρική μορφή η επιφάνεια του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \ .$$

Στη συνέχεια
(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Σε ένα τυχαίο σημείο βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

**7)**. (α) Βρείτε μία παραμετρικοποίηση για το υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 4z^2 = 25 \ .$$

(β) Βρείτε μια έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτής της επιφανείας στο τυχαίο σημείο της.
(γ) Βρείτε μία εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο $(x_0, y_0, 0)$ όπου

$$\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 25 \ .$$

**8)**. Βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της μοναδιαίας σφαίρας που αποκόπτεται απο τον κώνο

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**