ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 3 Νοεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
Φυλλάδιο 7

1)$^{\otimes}$. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ όπου

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - y\mathbf{k} \ ,$$

και S η επιφάνεια του κυλίνδρου

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad 0 \le z \le 1 \ ,$$

με προσανατολισμό του μοναδιαίου προς τα έξω απο τον κύλινδρο.

2).$^{\otimes}$ Δίδονται οι παρακάτω 3 ευθείες σε παραμετρική μορφή

$$(\varepsilon_1): \qquad (1,1,1) + t(1,1,-1), \quad t \in \mathbf{R} \ ,$$

$$(\varepsilon_2): \qquad (1,1,1) + t(1,5,-3), \quad t \in \mathbf{R} \ ,$$

$$(\varepsilon_3): \qquad (0,0,2) + t(3,11,-7), \quad t \in \mathbf{R} \ ,$$

Αποδείξτε οτι τέμνονται ανα δύο και σχηματίζουν ένα τρίγωνο το ABC. Υπολογίστε τη ροή $\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \ ,$$

δια μέσου της επιφάνειας S του τριγώνου ABC με προσανατολισμό του κάθετου προς τα κάτω.

3)$^{\otimes}$. Δίδεται στερεό που είναι η ένωση ενός τμήματος κυλίνδρου

$$x^2 + y^2 \le 1, \qquad 1 \le z \le 2 \ ,$$

και μισής μπάλας

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 1, \qquad z \ge 2 \ .$$

Έστω S η επιφάνεια του συνόρου του στερεού με προσανατολισμό του μοναδιαίου καθέτου προς τα έξω. Υπολογίστε τη ροή $\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + z\mathbf{k} \ ,$$

δια μέσου της επιφάνειας S.

4)$^{\otimes}$. Έστω S το ανω ημισφαίριο $\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ προσανατολισμένο με βάση το κάθετο διάνυσμα που δείχνει προς τα έξω από τη σφαίρα. Υπολογίστε το

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

όπου
(α) $\mathbf{F}=(x,y,0)$.
(β) $\mathbf{F}=(y,x,0)$.
(γ) Για κάθε ένα από τα διανυσματικά πεδία του (α) και (β) υπολογίστε τα

$$\int\int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\ ,$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο xy με προσανατολισμό τον αντίθετο της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου (όπως τον βλέπουμε απο το θετικό άξονα z).

5). Δείξτε οτι

$$\nabla\cdot(f\mathbf{F})=f\nabla\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\nabla f\ .$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\Delta\mathbf{F}\ .$$

6). Έστω

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(3x^2y,(x^3+y^3),0)\ .$$

(α) Επαληθεύστε ότι $\mathrm{curl}\,\mathbf{F}=0$.
(β) Βρείτε βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F}=\mathrm{grad\,f}$.

7). Έστω $\mathbf{r}(x,y,z)=(x,y,z)$ και $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\|\mathbf{r}\|$ Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες
(α) $\nabla(1/r)=-\mathbf{r}/r^3$, $r\neq 0$. Πιο γενικά $\nabla(r^n)=nr^{n-2}\mathbf{r}$ και $\nabla(\log r)=\mathbf{r}/r^2$
(β) $\Delta(1/r)=0$, $r\neq 0$. Γενικά $\Delta(r^n)=n(n+1)r^{n-2}$
(γ) $\nabla(\mathbf{r}/r^3)=0$. Γενικά $\nabla(r^n\mathbf{r})=(n+3)r^n$,
(δ) $\nabla\times\mathbf{r}=0$ και γενικά $\nabla\times(r^n\mathbf{r})=0$

8). Θεωρούμε την επιφάνεια $\mathbf{\Phi}(u,v)=(u^2\cos v, u^2\sin v, u)$. Υπολογίστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $u=1$, $v=0$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου σε αυτό το σημείο.

<u>Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$</u>

<u>Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)</u>

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>