



Πέμπτη 10 Νοεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 8

1).<sup>⊗</sup> Έστω

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y) .$$

(α) Επαληθεύστε ότι  $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ .

(β) Βρείτε βαθμωτή συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε  $\mathbf{F} = \text{grad } f$  .

2).<sup>⊗</sup> Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (y, xz, -z) .$$

(α) Υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε  $\mathbf{F} = \nabla f$ ;

(β) Υπάρχει διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{G}$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ ;

3). Δείξτε ότι

$$\nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = 2(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} + 2\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{F}) ,$$

Συμβολισμός: Αν  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$  και  $\mathbf{Q}$  διανυσματικά πεδία τότε

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{Q} := G_1 \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} .$$

4). Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} ,$$

όπου  $\mathbf{c}(t) = (e^t, t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

5).<sup>⊗</sup> Έστω

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yz) ,$$

το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού (σε μέτρα το δευτερόλεπτο) Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού το δευτερόλεπτο διασχίζουν το επίπεδο  $xy$  δια μέσου του τετραγώνου  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

6). Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y) ,$$

και ο κύλινδρος  $V$

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1 .$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz .$$

7).<sup>⊗</sup> Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3) ,$$

και η καμπύλη  $C$  που είναι η τομή της επιφάνειας του κυλίνδρου

$$x^2 + y^2 = 1 ,$$

και του επιπέδου

$$x + y + z = 1 .$$

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \nabla \times \mathbf{F} \cdot ds .$$

8). Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \cos y \mathbf{i} - \sin y \mathbf{j} + \sin x \mathbf{k} .$$

(α) Δείξτε ότι  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  .

(β) Βρείτε ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{G}_0$  ώστε  $\nabla \times \mathbf{G}_0 = \mathbf{F}$  .

(γ) Αν  $\mathbf{G}$  είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο που επίσης ικανοποιεί  $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$ , αποδείξτε ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  ώστε

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \nabla f .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**