



Πέμπτη 24 Νοεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

Φυλλάδιο 9

1).[⊗] Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (2x - y)dx + (x + y)dy ,$$

όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος με τον θετικό προσανατολισμό, και επαληθεύστε το Θεώρημα Green σε αυτή την περίπτωση.

2).[⊗] Για $\alpha > 0$ υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα σε ένα τόξο του κυκλοειδούς

$$x = \alpha(\theta - \sin \theta), \quad y = \alpha(1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi ,$$

και τον άξονα x .

3).[⊗] Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy ,$$

όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος με τον θετικό προσανατολισμό.

4) Αν D είναι ο μοναδιαίος δίσκος και

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

γιατί δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green στο D σε αυτή την περίπτωση; Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy ,$$

με τον θετικό προσανατολισμό και στη συνέχεια υπολογίστε το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

5). Υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy ,$$

όπου ∂D η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε κατάλληλα το Θεώρημα Green.

6). Έστω $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^2(D)$, όπου $D \subset \mathbf{R}^2$ ο μοναδιαίος δίσκος με τον θετικό προσανατολισμό στο σύνορό του. Δείξτε την ακόλουθη ταυτότητα

$$\int \int_D (f \Delta f + \nabla f \cdot \nabla f) dx dy = \int_{\partial D} f \nabla f \cdot \nu ds ,$$

όπου ν το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω.

7).[⊗] Για το ακτινικό διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z) ,$$

Επαληθεύστε το θώρημα του Stokes όταν η επιφάνεια είναι το ένω ημισφαίριο

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1 .$$

8). Έστω S η επιφάνεια που αποτελείται από δύο κομμάτια S_1 και S_2 . Το S_1 δίδεται από

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1 ,$$

ενώ το S_2 δίδεται από

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad z \geq 1 .$$

Ο προσανατολισμός της S είναι αυτός του καθέτου προς τα έξω της σφαίρας. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2) .$$

Να υπολογίσετε το

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (φροντιστήρια)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!