ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 24 Φεβρουαρίου 2021
Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Φυλλάδιο 2

1). Έστω $f, g : (0, +\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπους

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{1+y^2}{x}}, \quad x > 0, y \in \mathbf{R}, \quad g(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \lambda y^2}, \quad x > 0, y \in \mathbf{R},\ \lambda > 0.$$

Αποδείξτε ότι η f δεν είναι κυρτή ενώ η g είναι κυρτή.

2). Δίνεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς

$$J(u) = \int_0^1 \left(2e^x u(x) + (u'(x))^2\right)\, dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0,1],\ |\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1\}.$$

Προσδιορείστε αρχικά τους πιθανούς ελαχιστοποιητές και στη συνέχεια βρείτε με απόδειξη την ελάχιστη τιμή του συναρτησοειδούς J.

3). Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, \phi_x(x,y)\, dxdy \ = \ 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0,1]^2,\ |\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \ \ \forall y \in [0,1]\}.$$

Αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται ως προς x και ισχύει

$$f_x(x,y) \ = \ 0, \ \ (x,y) \in [0,1]^2.$$

4). Έστω $f, g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(f(x,y)\, \phi(x,y) + g(x,y)\, \phi_x(x,y)\right)\, dxdy \ = \ 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0,1]^2,\ |\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \ \ \forall y \in [0,1]\}.$$

Αποδείξτε ότι η g παραγωγίζεται ως προς x και ισχύει

$$g_x(x,y) \;=\; f(x,y), \;\; (x,y) \in [0,1]^2.$$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο calcvar2021@gmail.com
μέχρι και την Κυριακή 7 Μαρτίου 2021.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!