



ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Φυλλάδιο 3

1). Θεωρούμε το συναρτησοειδές

$$J(u) = \int_0^{\pi/6} ((u'(x) - \cos x)^2 + 4u(x)) dx,$$

αρχικά για $u \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, \pi/6], \mid u(0) = 0, \quad u(\pi/6) = 1/2\},$$

και στη συνέχεια για $u \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, \pi/6], \quad u(\pi/6) = 1/2\}.$$

Προσδιορίστε αρχικά τους πιθανούς ελαχιστοποιητές και στη συνέχεια βρείτε με απόδειξη την ελάχιστη τιμή του συναρτησοειδούς J στην πρώτη και στην δεύτερη περίπτωση.

2). Θεωρούμε το συναρτησοειδές

$$J(u) = \int_0^1 \int_0^1 (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)) dx dy, \quad u \in \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, 1]^2, \mid u(0, y) = f(y), \quad u(1, y) = g(y), \quad y \in [0, 1], \}$$

όπου $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις. Ποιά είναι η φυσική συνοριακή συνθήκη που ικανοποιούν οι πιθανοί ελαχιστοποιητές του συναρτησοειδούς;

3). Έστω $f, g, h : \bar{B}_1 \rightarrow \mathbf{R}$, $\bar{B}_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\int \int_{\bar{B}_1} (f(x, y) \phi(x, y) + g(x, y) \phi_x(x, y)) dx dy = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1(\bar{B}_1), \mid u(x, y) = h(x, y), \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

Αποδείξτε ότι η g παραγωγίζεται ως προς x και ισχύει

$$g_x(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{B}_1.$$

Υπόδειξη: Δείτε άσκηση 4 του φυλλαδίου 2.

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο calcvar2021@gmail.com
μέχρι και την Κυριακή 14 Μαρτίου 2021.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!