



Τετάρτη 10 Μαρτίου 2021
Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Φυλλάδιο 4

1). Προσδιορίστε όλες τις $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 f(t)\phi(t) dt = 0, \quad \phi \in \mathcal{A},$$

όπου

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}[0, 1], \mid \int_0^1 xu(x) dx = 0, \int_0^1 x^{2021}u(x) dx = 0\}.$$

2). Προσδιορίστε όλες τις $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 f(t)\phi''(t) dt = 0, \quad \phi \in \mathcal{B},$$

όπου

$$\mathcal{B} = \{u \in \mathbf{C}^2[0, 1], \mid u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0, \int_0^1 xu(x) dx = 0.\}$$

3). Βρείτε αρχικά τους πιθανούς ελαχιστοποιητές του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, 1], \mid u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \}$$

και τη δέσμευση

$$G(u) = \int_0^1 xu(x)dx = -\sqrt{5}.$$

Στη συνέχεια προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή με απόδειξη.

4). Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $w(x) = -1 + \sqrt{2 - (x - 1)^2}$ είναι ο μοναδικός ελαχιστοποιητής του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx, \quad u \in \mathcal{B},$$

με

$$\mathcal{B} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, 1], \mid u(0) = 0, \quad u(1) = \sqrt{2} - 1, \}$$

και τη δέσμευση

$$G(u) = \int_0^1 u(x) dx = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

5). Εξετάστε κατά πόσο υπάρχει ελαχιστοποιητής του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^\pi (u'(x))^2 dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, \pi], \mid u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0, \}$$

και τη δέσμευση

$$G(u) = \int_0^\pi u^2(x) dx = 1.$$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο calcvar2021@gmail.com μέχρι και την Τρίτη 23 Μαρτίου 2021.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!