ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δευτέρα 29 Μαρτίου 2021
Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Φυλλάδιο 5

1). Βρείτε με απόδειξη την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

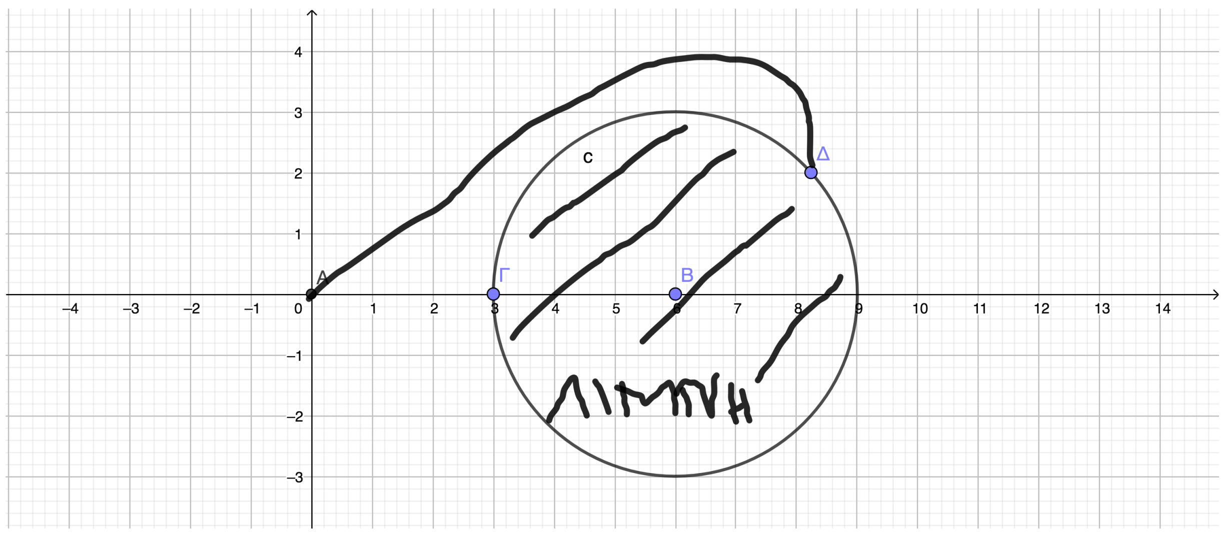
$$f(x,y) = x^{2021} + y^{2021}, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

με τη δέσμευση

$$x^2 + y^2 = 1.$$

2). Με χρήση της Θεωρίας του Μαθήματος νε βρεθεί η ελάχιστη διαδρομή (μήκος) που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να μετακινηθεί από την αρχή των αξόνων $A(0,0)$ στο σημείο $\Delta(15/2, 3\sqrt{3}/2)$ αποφεύγοντας τη λίμνη

$$(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad (x-6)^2 + y^2 \leq 9.$$



Υπόδειξη: Βρείτε αρχικά ένα σημείο στην άκρη της λίμνης που ο περιπατητής πρέπει να στοχεύσει να κινηθεί αρχικά και στη συνέχεια να κινηθεί στα όρια της λίμνης.

3). Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς

$$J(u) = \int_{-1}^{1} u^2(x)(\sqrt{3} - u'(x))^2 \, dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[-1,1], \mid u(-1)=0, \;\; u(1)=\sqrt{3}.\}$$

Αποδείξτε αρχικά ότι το πρόβλημα δεν έχει ελαχιστοποιητή. Στη συνέχεια ορίζουμε για $0<\varepsilon<1$ τις συναρτήσεις

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -\varepsilon, \\ \sqrt{3}\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon^2 - (x+\varepsilon)^2}, & -\varepsilon < x < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \sqrt{3}x, & \frac{\varepsilon}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $u_\varepsilon \in \mathcal{A}$ με

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J(u_\varepsilon) = 0,$$

οπότε συμπεράνατε ότι είναι ελαχιστοποιούσα οικογένεια συναρτήσεων.

Βρείτε ελαχιστοποιητή του συναρτησοειδούς $J(u), \;\; u \in \mathcal{B}$ με

$$\mathcal{B} = \{u \in \bar{C}^1[-1,1], \mid u(-1)=0, \;\; u(1)=\sqrt{3}.\}$$

$$\bar{C}^1 := \;\; \text{κατά τμήματα } C^1 \text{ συναρτήσεις}$$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται με αποστολή στο calcvar2021@gmail.com
μέχρι και την Κυριακή 11 Απριλίου 2021.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!