ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 21 Δεκεμβρίου 2017

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Επαναληπτικό Φυλλάδιο

**1**). α) Βρείτε πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο

$$z^{2017} + 36z^{1960} + 71z^{10} + z^3 - z - 31,$$

στον δίσκο $D(0,1)$.
β) Βρείτε πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο

$$2z^5 - 66z^2 + z + 1,$$

στον δακτύλιο $1 \leq |z| \leq 2$.

**2**). Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

**3**). Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

**4**). Έστω $\alpha > 1$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$ze^{\alpha - z} \; = \; 1,$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στον δίσκο $D(0,1)$ που είναι πραγματική και θετική.

**5**). Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|w|=1} \frac{dw}{w^2(e^{\frac{1}{w}} - 1)}$$

Υπόδειξη: Να γίνει η αλλαγή $\frac{1}{w} = z$. Προσοχή στον προσανατολισμό.

**6**). Έστω $\Omega$ ανοικτό και $f:\Omega\to\mathbf{C}$ ολόμορφη και $z_0\in\Omega$ ώστε $f'(z_0)\neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r>0$ αρκετά μικρό ώστε $D(z_0,r)\subset\Omega$ και να ισχύει

$$\frac{1}{f'(z_0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{dw}{f(w)-f(z_0)}.$$

**7**). Έστω $\Omega$ τόπος, $f:\Omega\to\mathbf{C}$ ολόμορφη και μη σταθερή,

$$\gamma:[0,1]\to\Omega,$$

απλό κλειστό μονοπάτι ώστε

$$|f(\gamma(t))|=1,\quad \forall\, t\in[0,1].$$

Αποδείξτε ότι η $f$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο εσωτερικό της $\gamma$.

**8**). Έστω $\Omega$ τόπος και $f:\Omega\to\mathbf{C}$ ολόμορφη ώστε για $f(z)=u(z)+v(z)i,\quad u,v:\Omega\to\mathbf{R}$ να ικανοποιεί

$$u^2(z)-v^2(z)=1,\ \ \forall z\in\Omega.$$

Ποιά είναι η μορφή της $f$;

**9**). Να βρείτε όλες τις ακέραιες $f$ για τις οποίες υπάρχουν θετικές σταθερές $c_1,c_2,c_3$ ώστε να ισχύουν:

$$|f(z)|^3\le c_1+c_2|z|^3+c_3|f(z)|,\quad \forall z\in\mathbf{C}.$$

**10**). Έστω $\Omega$ ανοικτό, $D(0,1)\subset\Omega,\ \ z_0\in\Omega,\ \ |z_0|=1$, και $f:\Omega\setminus\{z_0\}\to\mathbf{C}$ ολόμορφη. Επιπρόσθετα η $f$ έχει πόλο στο $z_0$ τάξης 1. Αν

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,z^n,\quad |z|<1,$$

αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0.$$

**11**). Να βρείτε όλες τις ακέραιες $f$ για τις οποίες ισχύει

$$f(\mathbf{C})\subset\mathbf{C}\setminus(-\infty,0].$$

Υπόδειξη: Αν $g(z)=\frac{\sqrt{f(z)}-1}{\sqrt{f(z)}+1}$ τότε $|g(z)|<1$.

**12**). Έστω $f:H_0\to\mathbf{C}$ ολόμορφη,

$$H_0=\{z\in\mathbf{C},z=x+yi,\ x,y\in\mathbf{R},\ y\ge 0\},\quad H=\{z\in\mathbf{C},z=x+yi,\ x,y\in\mathbf{R},\ y>0\},$$

για την οποία υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0, \;\; c > 0$, ώστε να ισχύει:

$$|f(z)| \le \frac{c}{|z|^{\alpha}}, \;\; \forall z \in H_0, \; |z| \ge 1.$$

Για $z \in H$ αποδείξτε ότι ισχύει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} \, dt.$$

Υπόδειξη: Ολοκληρώστε κατάλληλη συνάρτηση στο σύνορο του χωρίου $D(z, R) \cap H_0$ για μεγάλα $R$.

**<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>**