ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 19 Οκτωβρίου 2017

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

<u>ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</u>

Φυλλάδιο 4

1). Έστω $\Omega \subset \mathbf{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbf{C}$ είναι ολόμορφη που έχει επιπρόσθετα την ιδιότητα

$$\text{Αν } x \in \Omega, \ \ \text{τότε είτε } \ f(z) = 0 \text{ είτε } \ f'(z) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι η σταθερή συνάρτηση.

2). Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ που ικανοποιούν

$$f(x + yi) = x^2 - y^2 + iv(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}.$$

3). Έστω $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{C}$ τόπος. Αποδείξτε πως δεν υπάρχει μη σταθερή ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbf{C}$ ώστε η εικόνα $f(\Omega)$ να περιέχεται σε ευθεία γραμμή του $\mathbf{C}$.

4). Θέτουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Αποδείξτε ότι

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Υπόδειξη: Ορίστε τη συνάρτηση $g(z) = e^{-z} f(z), \quad z \in \mathbf{C}$.

5). Έστω $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ολόμορφη, ώστε

$$f(z + w) = f(z) f(w), \quad \forall z, w \in \mathbf{C},$$
$$f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι

$$f(z) = e^z, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Υπόδειξη: Αν $z = x + yi, \quad x, y \in \mathbf{R}$ τότε αποδείξτε αρχικά ότι $f(z) = e^x A(y) + i e^x B(y)$ με $A, B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

<u>**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**</u>