ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 26 Οκτωβρίου 2017

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

<u>ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</u>

Φυλλάδιο 5

1). Να υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (z-i)\,dz$$

όπου γ το κομμάτι της παραβολής

$$\gamma(t)=t+t^2 i, \quad t\in[-1,1].$$

α) Χρησιμοποιώντας γνωστό θεώρημα.
β) Υπολογίζοντας άμεσα το επικαμπύλιο.

2). Έστω $\gamma,\sigma:[0,1]\to\mathbf{C}$ κατά τμήματα C^1 καμπύλες ώστε

$$\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=i, \quad \sigma(0)=\frac{\pi}{2},\ \sigma(1)=\frac{\pi}{2}+i.$$

Να υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_\gamma e^z\,dz, \quad \int_\sigma \cos 2z\,dz.$$

3). Έστω $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{C}$ η καμπύλη

$$\gamma(t)=e^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Να υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_\gamma z^n\,dz,\ n\in\mathbf{N}, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz.$$

4). Έστω $f:\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(z)|\le 1, \quad z\in\mathbf{C}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_{|z|=1} f(z)\, dz \right| \leq 4.$$

Υπόδειξη: Γράψτε $\int_{|z|=1} f(z)\, dz = Re^{i\theta}, \;\; R \geq 0$ και αποδείξτε αρχικά ότι

$$R \leq \int_0^{2\pi} |\sin(\theta - t)|\, dt.$$

5). Έστω $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ολόμορφη.
α) Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbf{C}$ κατά τμήματα C^1 καμπύλες ώστε

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

β) Συμπεράνατε ότι αν $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $\gamma(0) = 0, \;\; \gamma(1) = z$ τότε ορίζεται μονοσήμαντα η συνάρτηση $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_\gamma f(w)\, dw \\ &:= \int_0^z f(w)\, dw. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι η F είναι ολόμορφη και μάλιστα

$$F'(z) = f(z), \;\; z \in \mathbf{C}.$$

Που κρύβεται η αναγκαιότητα η f να είναι ολόμορφη και ΔΕΝ είναι αρκετό η f να είναι απλά συνεχής;

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>