ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 9 Νοεμβρίου 2017

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Φυλλάδιο 6

1). Να υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\alpha) \quad \int_{C(0,2)} \frac{w^2+w}{(w-1)^2}\,dw, \qquad \beta) \quad \int_{C(\frac{1+i}{2},1)} \frac{2}{(w-1)(w^2+1)}\,dw.$$

2). Με κατάλληλη χρήση των ολοκληρωτικών τύπων του Cauchy στην συνάρτηση $f(z)=e^z$, αποδείξτε ότι

$$\alpha) \quad \int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = 2\pi, \qquad \beta) \quad \int_0^{2\pi} e^{e^{it}-it}\,dt = 2\pi.$$

3). Έστω $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ ολόμορφη και $z\notin C(0,1)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw \;=\; \int_{C(0,1)} \frac{f'(w)}{w-z}\,dw.$$

4). Έστω $f:C(z_0,r)\to\mathbf{C},\ r>0$ συνεχής συνάρτηση και ορίζουμε $g:D(z_0,r)\to\mathbf{C},\ r>0$ με τύπο

$$g(z)=\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad z\in D(z_0,r).$$

Αποδείξτε ότι η g είναι ολόμορφη στο $D(z_0,r)$. Πόσο είναι η $g'(z)$?

5). Έστω Ω τόπος και $f_n,\ f:\Omega\to\mathbf{C},\ n\in\mathbf{N}$ συναρτήσεις ώστε

$$i) \ \ f_n \ \text{ ολόμορφες στο } \Omega,\ \forall n\in\mathbf{N},$$

$$ii) \ \ f_n\to f \ \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή του } \Omega.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!