



Πέμπτη 16 Νοεμβρίου 2017

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Φυλλάδιο 7

1). Έστω $f, g : D(0, 1) \rightarrow \mathbf{C}$ ολόμορφες. Εάν επιπρόσθετα ισχύουν

$$|f(z)| \leq 1, \quad |g(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad \forall z \in D(0, 1),$$

αποδείξτε ότι

$$a) |f'(0)| \leq 1, \quad b) |g'(0)| \leq 4, \quad |g''(0)| \leq \frac{27}{2}.$$

2). Προσδιορίστε όλες τις ακέραιες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 ώστε

$$|f'(z)| \leq c_1 + c_2|z|^{3/2}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

3). Έστω $f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ακέραιες, ώστε $g(z) \neq 0, \forall z \in \mathbf{C}$. Εάν επιπρόσθετα ισχύει

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \quad \forall z \in \mathbf{C},$$

αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbf{C}, |c| \leq 1$, ώστε $f(z) = cg(z), \forall z \in \mathbf{C}$.

4). Έστω Ω κυρτός ($\forall z, w \in \Omega, \lambda z + (1-\lambda)w \in \Omega, \forall \lambda \in (0, 1)$) τόπος και $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, ολόμορφη συνάρτηση ώστε

$$|f'(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

Αποδείξτε ότι

$$|f(z) - f(w)| \leq |z - w|, \quad \forall z, w \in \Omega.$$

5). Έστω $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbf{C}$ ολόμορφη και θέτουμε $f(z) = u(z) + iv(z), z \in D(0, 1), u, v : D(0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$. Εάν επιπρόσθετα έχουμε $u^2(0) = v^2(0)$, αποδείξτε τότε ότι

$$\int_0^{2\pi} u^2(re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} v^2(re^{it}) dt, \quad \forall 0 < r < 1.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!