ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 30 Νοεμβρίου 2017

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Φυλλάδιο 8, Θέματα Προόδου

Θέμα 1. Να υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$\alpha) \quad \int_\gamma ze^z\,dz, \ \ \gamma(t) = i\pi e^t + (1 - i\frac{\pi}{2})te^{t^3}, \ t \in [0,1].$$

$$\beta) \qquad \int_{C(0,\sqrt{3})} \frac{w^{2017}}{(w-1)^2(w^2+1)}\,dw.$$

Θέμα 2. α) Να προσδιορίστε τις σταθερές $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ ώστε η

$$f(z) = a(x^3 - 3xy^2) - b(x^2 - y^2) + c(3x^2 - y^3) - dxyi, \ \ \forall z = x + yi, \ \ x, y \in \mathbf{R},$$

να είναι ακέραια. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι όντως για τις επιλογές που κάνατε, η f είναι ακέραια.
β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει δυναμοσειρά $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. $|z| < 1$, ώστε να ισχύουν:

$$i) \quad g(\frac{1}{n}) = 1, \ \ n = 2, 3, \cdots$$

$$ii) \qquad g'(0) > 0.$$

Θέμα 3. α) Έστω Ω τόπος και $f : \Omega \to \mathbf{C}$ ολόμορφη, ώστε

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Αποδείξτε με όλες τις λεπτομέρειες ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες g, h για τις οποίες υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύουν:

$$|g'(z)| \le c_1 + c_2|z|^{3/2}, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

$$|z| \le |h'(z)|, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Θέμα 4. α) Έστω Ω ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbf{C}$ συνεχής που επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$f^3(z) = e^{z^2}, \quad \forall z \in \Omega.$$

Αποδείξτε με όλες τις λεπτομέρειες ότι η f είναι ολόμορφη στο στο Ω.
β) Έστω $z, w \in \mathbf{C}$ ώστε $Re\ z < 0,\ Re\ w < 0$. Να αποδείξτε ότι ισχύει

$$|e^z - e^w| < |z - w|.$$

Θέμα 5. α) Έστω Ω τόπος και $f : \Omega \to \mathbf{C}$ ολόμορφη ώστε για $f(z) = u(z) + v(z)i,\ \ u, v : \Omega \to \mathbf{R}$ να ικανοποιεί

$$u^3(z) + v^3(z) = 1,\ \ \forall z \in \Omega.$$

Ποιά είναι η μορφή της f;
β) Έστω $g : D(0,1) \to \mathbf{C}$ ολόμορφη και υποθέτουμε ότι

$$|g(z) - z| < |z|,\ \ 1/2 < |z| < 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$|g'(1/2)| \leq 8.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!