ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 15 Φεβρουαρίου 2024

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 1

1)$^{\otimes}$. Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \sin x^3, \quad x > 0, \\ y(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2)$^{\otimes}$. Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y(x) + \cos x, \quad x \in \mathbf{R}, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

3)$^{\otimes}$. Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} \sin x\frac{dy}{dx} + cos\, x y(x) &= 2x \sin x, \quad x > \frac{\pi}{2}, \\ y(\frac{\pi}{2}) &= 0. \end{aligned}$$

4)$^{\otimes}$.Αποδείξτε ότι το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} t\, x'(t) &- x(t) + t = 0, \quad t > 0, \\ x(0) &= 1, \end{aligned}$$

δεν έχει λύσεις, ενώ το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} t\, y'(t) &- y(t) + t = 0, \quad t > 0, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και να προσδιορίστε.

5). Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ και συνεχείς στο $[0, +\infty)$. Επιπρόσθετα δε ικανοποιούν:

α)

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq e^t \;\; t > 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Αποδείξτε τότε ότι θα ισχύει

$$f(t) \geq \; e^t - 1, \;\; \forall\, t > 0.$$

β)

$$\begin{aligned} g'(t) - g(t) &\geq t, \;\; t > 0, \\ g(0) &= 0. \end{aligned}$$

Αποδείξτε τότε ότι θα ισχύει

$$g(t) \geq \; e^t - t - 1, \;\; \forall\, t > 0.$$

6). Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ που ικανοποιούν

$$f(x)\; f'(x) = 3x^2\; f(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

7). Δίνεται ότι η $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$(\star)\;\; f^2(x) = 6 \int_0^x \; s^2 f(s)\; ds, \;\; \forall x \in \mathbf{R}.$$

α) Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f που ικανοποιούν την $(\star)$.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειρες συνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν την $(\star)$, τις οποίες και να προσδιορίστε.

Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά πως αν σε κάποιο σημείο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, και επιπρόσθετα η $f^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!