ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 18 Απριλίου 2024

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 10

1)$^{\otimes}$. Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \ \ 0<x<\pi, \ \ t>0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t)=0, \ \ t\geq 0, \\ u(x,0) &= 2\sin x - 3\sin(2x), \ \ 0\leq x\leq \pi. \end{aligned}$$

2)$^{\otimes}$. Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \ \ 0<x<\frac{\pi}{2}, \ \ t>0, \\ u_x(0,t) &= u(\frac{\pi}{2},t)=0, \ \ t\geq 0, \\ u(x,0) &= -\cos x + 2\cos(3x), \ \ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3)$^{\otimes}$. Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t)+2\,u_x(x,t), \ \ 0<x<1, \ \ t>0, \\ u(0,t) &= u(1,t)=0, \ \ t\geq 0, \\ u(x,0) &= -3\,e^{-x}\sin(2\pi x) - +2\,e^{-x}\sin(3\pi x), \ \ 0\leq x\leq 1. \end{aligned}$$

4)$^{\otimes}$. Να λυθεί το ΠΑΤ (πρόβλημα Cauchy)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= 2u_{xx}(x,t) - u_{xt}(x,t), \ \ x\in\mathbf{R}, \ \ t>0, \\ u(x,0) &= f(x), \ \ x\in\mathbf{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \ \ x\in\mathbf{R}, \end{aligned}$$

όπου $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις. Πόσο ομαλές πρέπει να είναι οι f,g ώστε να υπάρχει κλασική λύση; Μπορούμε να βρούμε λύση σε όλα τα σημεία $x\in\mathbf{R}, \ \ t>0$?

Υπόδειξη: Μπορείτε να κάνετε την αλλαγή

$$\xi = x+t, \quad \eta = x-2t, \quad u(x,t)=v(\xi,\eta),$$

και να βρείτε τη ΔΕ που ικανοποιεί η $v(\xi,\eta)$.

5). Θεωρούμε το Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u_x(\pi,t) &+ 2\, u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Ψάχνουμε για τις μη ταυτοτικά μηδέν λύσεις του προβλήματος με τη μέθοδο Fourier στη μορφή $u(x,t) = A(x)\, B(t)$.

α) Αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματική σταθερά λ ώστε

$$\begin{aligned} A''(x) + \lambda A(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ A(0) &= 0, \\ A'(\pi) + 2\, A(\pi) &= 0, \\ \\ B'(t) + \lambda B(t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

β) Αποδείξτε ότι αν $\lambda \leq 0$, τότε $A(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$.

γ) Θέτουμε $\lambda = \mu^2, \quad \mu > 0$ τέτοιο ώστε το πρόβλημα να έχει μη τετριμμένη λύση, αποδείξτε τότε ότι ισχύει

$$(\star) \quad \mu\, \cos(\mu\pi) + 2\, \sin(\mu\pi) = 0$$

δ) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $(\star)$ έχει άπειρες θετικές λύσεις μ.

Υπόδειξη για το δ): Αν $\mu > 0$ λύση της $(\star)$ τότε θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\star\star) \quad 2\, \tan(\mu\pi) = -\mu.$$

6). Με χρήση του Θεωρήματος Green να λυθεί το ΠΑΤ (πρόβλημα Cauchy)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις. Πόσο ομαλές πρέπει να είναι οι f, g ώστε να υπάρχει κλασική λύση; Μπορούμε να βρούμε λύση σε όλα τα σημεία $x \in \mathbf{R}, \quad t > 0$?

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θ. Green στον κώνο εξάρτησης των λύσεων.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!