ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 29 Φεβρουαρίου 2024

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

<u>ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>

Φυλλάδιο 3

1)$^{\otimes}$. Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} 2\cos y &+ (3y^2 - 2x\sin y)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ y(1) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

2)$^{\otimes}$. Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} xy + y^2 + y &+ (x^2 + 3xy + 2x + y^2)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

σε πεπλεγμένη μορφή, εαν είναι γνωστό ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

$$\mu(x, y) = f(y).$$

3)$^{\otimes}$. Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} 1 + xy^2 &+ 2x^2 y\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

σε πεπλεγμένη μορφή, εαν είναι γνωστό ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

$$\mu(x, y) = f(xy^2).$$

4)$^{\otimes}$. Έστω $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να βρεθεί σε πεπλεγμένη μορφή, η λύση του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} \frac{y + \phi(x)}{x + y} &+ \frac{dy}{dx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

εαν είναι γνωστό ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu(x,y) = f(x+y)$.

5). Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} 2y(1+x+2x^2) \;&+\; (1+2x+2y^2+4xy^2)\,\frac{dy}{dx} = 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \\ y(0) \;&=\; 1, \end{aligned}$$

σε πεπλεγμένη μορφή, εαν είναι γνωστό ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

$$\mu(x,y) = f(x^2+y^2).$$

6). Έστω $g : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση και $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(t) \le 2 + \int_0^t g(s)f(s)\,ds, \quad \forall\, t \ge 0.$$

Αποδείξτε ότι θα ισχύει επίσης

$$f(t) \le 2\, e^{\int_0^t g(s)\,ds}, \quad \forall\, t \ge 0.$$

Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $Q(t) = \int_0^t g(s)f(s)\,ds, \quad \forall\, t \ge 0$.

7). Βρείτε μια λύση της ΔΕ

$$\frac{dy}{dx}(x) = -1 - x^2 + y^2(x)$$

που να ορίζεται σε όλο το $\mathbf{R}$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι κάθε άλλη λύση της ΔΕ δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbf{R}$.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!