ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 26 Μαρτίου 2024

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 6

1)$^{\otimes}$. Να βρεθεί η γενική λύση των ΔΕ:

$$\alpha) \qquad y''(x) - y(x) = x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\beta) \qquad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\gamma) \qquad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

1) Βρίσκοντας μια ειδική λύση σε συγκεκριμένες κατηγορίες συναρτήσεων
2) Βρίσκοντας μια ειδική λύση με τη μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών (Μέθοδος Lagrange).

2)$^{\otimes}$. Να βρεθεί η γενική λύση με τη μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών (Μέθοδος Lagrange) της ΔΕ

$$y''(x) + y(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}.$$

3)$^{\otimes}$. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''(x) - y(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

4)$^{\otimes}$.Να βρεθεί η γενική λύση των ΔΕ:

$$\alpha) \qquad y''(x) - y(x) = x^3 - 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\beta) \qquad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\gamma) \qquad x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + 4y(x) = 2\,\ln^3 x - 1, \quad x > 0.$$

5). Έστω y λύση του ΠΑΤ

$$\begin{aligned} y'''(t) + 2e^{t^2}\, y(t) &= 0, \quad t > 0, \\ y(0) = y'(0) &= y''(0) = 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε
$$\sigma(t) = y^2(t) + (y'(t))^2 + (y''(t))^2, \;\; t > 0.$$
α) Αποδείξτε ότι ισχύει
$$\sigma'(t) \leq 4e^{t^2}\, \sigma(t), \;\; t > 0.$$
β) Αποδείξτε ότι
$$\sigma(t) = 0, \;\; t \geq 0,$$
και ότι η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι η $y(t) = 0, \;\; t \geq 0$.

6). Βρείτε όλες (με απόδειξη) τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ για τις οποίες έχουμε
$$\begin{aligned} f'(t) &= -2g(t), \;\; t \in \mathbf{R}, \\ g'(t) &= -2f(t), \;\; t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!