· Προβλημα 1 Εστω $a \in \mathbb{R}$.

Για ποιες τιμες της παραμετρου $a \in \mathbb{R}$, το Προβλημα Αρχικων Τιμων

$$t x'(t) - 2x(t) + t^2 = 0, \quad t > 0$$

$$x(0) = a$$

εχει κλασικη λυση. Να λυθει στις περιπτωσεις αυτες το προβλημα.

Λυση. Αρχικα θα φεραμε το προβλημα στη μορφη

$$x'(t) - \frac{2}{t} x(t) + t = 0$$

και αν πολλαπλασιασουμε με καταλληλη συναρτηση $f(t)$ παιρνουμε (πολλαπλασιαστης Euler)

$$f(t) x'(t) - \frac{2}{t} f(t) x(t) + f(t) t = 0$$

Η επιλογη της f (μη μηδενικης) γινεται ωστε

$$f(t) x'(t) - \frac{2}{t} f(t) x(t) = (f(t) x(t))'$$

$$= f(t) x'(t) + f'(t) x(t)$$

Για το λογο αυτο επιλεγουμε την f ωστε

$$f'(t) = -\frac{2}{t} f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{2}{t}$$

Την f την επιλέγαμε $f>0$, οπότε

$$(\ln f(t))' = -2(\ln t)'$$

Άρα $\ln f(t) = \ln t^{-2} \Rightarrow f(t) = t^{-2}$.

Γυρίζουμε στην Δ.Ε.

$$t^{-2}x'(t) - 2t^{-3}x(t) + t^{-1} = 0$$

$t>0$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x(t)}{t^2}\right)' + \frac{1}{t} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x(t)}{t^2}\right)' + (\ln t)' = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x(t)}{t^2} + \ln t\right)' = 0, \quad t>0$$

και επομένως $\exists\, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{x(t)}{t^2} + \ln t = c, \quad t>0$$

$$\Rightarrow x(t) + t^2 \ln t = ct^2$$

$$\Rightarrow x(t) = ct^2 - t^2\ln t, \quad t>0. \quad (*)$$

Για να είναι η λύση κλασική θα πρέπει

$$x \in C[0,+\infty) \cap D^1(0,+\infty).$$

Η $(*)$ μας δίνει συνάρτηση παραγωγίσιμη για $t>0$.
Μάλιστα επειδή

$$\lim_{t\downarrow 0} x(t) = 0$$

(Σημειωση $\lim_{t\downarrow 0} t^2 \ln t = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\ln t}{t^{-2}}$

και επειδη εχουμε απροσδιοριστια $\frac{-\infty}{+\infty}$

και $$\lim_{t\downarrow 0^+} \frac{(\ln t)'}{(t^{-2})'} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}}$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{t^2}{-2} = 0$$

εχουμε $$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\ln t}{t^{-2}} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{(\ln t)'}{t^{-2}} = 0 \;)$$

Οποτε εχουμε

$$x(t) = \begin{cases} ct^2 - t^2 \ln t, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Η συνεχεια της λυσης στο $t=0$, μας δινει οτι πρεπει $a=0$ για να εχει το προβλημα λυση. Μαλιστα δε το προβλημα εχει απειρες λυσεις που για $c \in \mathbb{R}$ δινονται:

από $\quad x_c(t) = \begin{cases} ct^2 - t^2 \ln t, & t>0 \\ 0, & t=0. \end{cases}$

$\boxdot$

<u>Πρόβλημα 2</u> Να λυθεί το πρόβλημα

$$(1+2y(x))\,y'(x) + (2-y(x))(1+y^2(x))\sin x = 0$$

$$y(0)=1.$$

<u>Λύση</u>. Θέλουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών.

Επειδή η λύση θα είναι τουλάχιστον συνεχής, και $y(0)=1\neq 2$ σε μια περιοχή του μηδενός θα συνεχίζει $y(x)\neq 2$ και τότε έχουμε (μάλιστα $y(x)<2$)

$$\frac{1+2y(x)}{(2-y(x))(1+y^2(x))}\,y'(x) + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1+2y(t)}{(2-y(t))(1+y^2(t))}\,y'(t)\,dt + \int_0^x \sin t\,dt = 0$$

$y(t)=z \Rightarrow dz = y'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1+2z}{(2-z)(1+z^2)}\,dz + (-\cos t)\Big|_0^x = 0$$

$$\int_1^{y(x)} \frac{1+2z}{(2-z)(1+z^2)}dz \quad - \cos x + 1 \ = 0$$

Για τον υπολογισμο του ολοκληρωματος, διασπαμε το κλασμα σε απλα:

$$\frac{1+2z}{(2-z)(1+z^2)} = \frac{A}{2-z} + \frac{Bz+\Gamma}{1+z^2}$$

$$= \frac{A(1+z^2) + (Bz+\Gamma)(2-z)}{(2-z)(1+z^2)}$$

$$= \frac{A + Az^2 + 2Bz - Bz^2 + 2\Gamma - \Gamma z}{(2-z)(1+z^2)}$$

$$= \frac{A+2\Gamma \ + (2B-\Gamma)z + (A-B)z^2}{(2-z)(1+z^2)}$$

και επομενως πρεπει:

$$\left.\begin{aligned} A+2\Gamma &= 1 \\ 2B-\Gamma &= 2 \\ A-B &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} B+2\Gamma &= 1 \\ 2B-\Gamma &= 2 \\ A &= B \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} B &= 1-2\Gamma \\ 2(1-2\Gamma)-\Gamma &= 2 \\ A &= B \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} B &= 1-2\Gamma \\ 2-4\Gamma-\Gamma &= 2 \\ A &= B \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} B &= 1 \\ A &= 1 \\ \Gamma &= 0 \end{aligned}\right.$$

οποτε $$\frac{1+2z}{(2-z)(1+z^2)} = \frac{1}{2-z} + \frac{z}{1+z^2}$$

και απο την (1), παιρνουμε

$$\int_1^{y(x)} \left[\frac{1}{2-z} + \frac{z}{1+z^2} \right] dz \quad - \cos x + 1 = 0$$

$$\int_1^{y(x)} \frac{dz}{2-z} + \int_1^{y(x)} \frac{z\,dz}{1+z^2} - \cos x + 1 = 0$$

$$z^2 = \omega \Rightarrow 2z\,dz = d\omega$$

$$\left(-\ln(2-z)\right)\Big|_1^{y(x)} + \frac{1}{2}\int_1^{y^2(x)} \frac{d\omega}{1+\omega} - \cos x + 1 = 0$$

$$-\ln(2-y(x)) + \ln(2-1) + \left(\frac{1}{2}\ln(1+\omega)\right)\Big|_1^{y^2(x)} - \cos x + 1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\ln(2-y(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2(x)) - \frac{1}{2}\ln 2 + 1 - \cos x = 0.$$

$\boxed{\nabla}$

Προβλημα 3 Να λυθει το προβλημα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x)}{x} + \frac{e^x}{y(x)}$$

$$y(1) = 1$$

Λυση: Προκειται για Δ.Ε. Bernoulli, οποτε θετουμε

$$z(x) = y^2(x) \Rightarrow z'(x) = 2y(x)y'(x)$$

και η Δ.Ε. γραφεται:

$$y(x)y'(x) = \frac{y^2(x)}{x} + e^x \Longleftrightarrow$$

$$\frac{z'(x)}{2} = \frac{z(x)}{x} + e^x \Longleftrightarrow$$

$$z'(x) = \frac{2}{x}z(x) + 2e^x.$$

$$z(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad z'(x) - \frac{2}{x} z(x) = 2e^x .$$ (Γραμμική μη ομογενής)

Θέλουμε να βρούμε πολλαπλασιαστή Euler, έστω $\varphi > 0$ (μια συνάρτηση)

$$\Rightarrow \quad \varphi z'(x) - \frac{2}{x} \varphi z(x) = 2\varphi(x) e^x$$

$$\parallel$$

Θέλουμε

$$(\varphi(x) z(x))' = \varphi(x) z'(x) + \varphi'(x) z(x)$$

και επιλέγουμε γι' αυτό

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x}\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$(\ln \varphi(x))' = -2 (\ln x)'$$

Επιλέγουμε $\ln \varphi(x) = -2 \ln x$

δηλ

$$\varphi(x) = x^{-2}.$$

και γυρίζαμε στη Δ.Ε.

$$x^{-2} z'(x) - 2x^{-3} z(x) = 2x^{-2} e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z(x)}{x^2}\right)' = 2x^{-2} e^x$$

Οπότε πρέπει επίσης να υπολογίσουμε μια

παραγουσα συναρτηση της $x^{-2}e^{x}$,

δηλ $\int x^{-2}e^{x}dx = \int (-x^{-1})' e^{x}dx$

$$= -x^{-1}e^{x} - \int -x^{-1}e^{x}dx$$

$$= -x^{-1}e^{x} + \int x^{-1}e^{x}dx$$

$$= -x^{-1}e^{x} + \int (\ln x)' e^{x}dx$$

$$= -\frac{e^{x}}{x} + \ln x\, e^{x} - \int \ln x (e^{x})' dx$$

$$= -\frac{e^{x}}{x} + \ln x\, e^{x} - \int \ln x\, e^{x}dx$$

Δυστυχως το ολοκληρωμα

$$\int \ln x\, e^{x}dx$$

δεν υπολογιζεται!

Παντως θα ειχαμε

$$\frac{z(x)}{x^{2}} = -2\frac{e^{x}}{x} + 2\ln x\, e^{x} - 2\int_{1}^{x} \ln t\, e^{t}dt + c$$

και επειδη $z(1)=1$, εχουμε

$$1 = -2e + c \Leftrightarrow c = 1+2e$$

και επομενως

$$z(x) = -2xe^x + 2x^2 \ln x\, e^x - 2x^2 \int_1^x \ln t\, e^t dt + (1+2e)x^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2(x) = -2xe^x + 2x^2 \ln x\, e^x - 2x^2 \int_1^x \ln t\, e^t dt + (1+2e)x^2.$$

$\boxed{}$

<u>Προβλημα 4</u> Να λυθει το προβλημα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$$

$$y(1) = 0$$

<u>Λυση:</u> Προκειται για ομογενη Δ.Ε οποτε θετουμε

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = x\, z(x)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = x\, z'(x) + z(x)$$

και η Δ.Ε. γραφεται

$$x\, z'(x) + z(x) = \frac{x\, z(x) - 4x}{x - x\, z(x)} \Leftrightarrow$$

$$x\, z'(x) + z(x) = \frac{z(x) - 4}{1 - z(x)} \Leftrightarrow$$

$$x\, z'(x) = \frac{z(x) - 4}{1 - z(x)} - z(x) \Leftrightarrow$$

$$x\, z'(x) = \frac{z(x) - 4 \quad - z(x) + z^2(x)}{1 - z(x)} \iff$$

$$x\, z'(x) = \frac{z^2(x) - 4}{1 - z(x)}\,.$$

Επίσης: $y(1) = 0 \iff z(1) = 0$, οπότε λόγω συνέχειας

της z κοντά στο $x = 1$, θα είναι κοντά

στο 0 και ειδικότερα το επιχείρημά μας

θα τρέξει όσο $-2 < z(x) < 1$ (γιατί;)
(αρχικά)
και τότε μπορούμε να διαιρέσουμε το δεξί

μέλος. Για να διαιρέσουμε με το x, πρέπει

$x \neq 0$ και επειδή ξεκινάμε με $x = 1$

επιλέγουμε το διάστημα να περιέχεται στο

$(0, +\infty)$. Τότε έχουμε

$$\frac{1 - z(x)}{z^2(x) - 4}\, z'(x) = \frac{1}{x}\,. \qquad x > 0$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{1 - z(s)}{z^2(s) - 4}\, z'(s)\,ds = \int_1^x \frac{ds}{s}$$

$$z(s) = w \Rightarrow dw = z'(s)\,ds$$

$$\int_{z(1)}^{z(x)} \frac{1 - w}{w^2 - 4}\, dw = \ln x$$

$$\int_0^{z(x)} \frac{1-\omega}{w^2-4}\,d\omega = \ln x, \qquad x>0$$

Διασπαμε το κλασμα

$$\frac{1-\omega}{w^2-4} = \frac{1-\omega}{(w-2)(\omega+2)} = \frac{A}{w-2} + \frac{B}{w+2}$$

$$= \frac{A(\omega+2) + B(w-2)}{w^2-4}$$

$$= \frac{(A+B)\,\omega + 2\,(A-B)}{w^2-4}$$

Οποτε πρεπει

$$\left.\begin{array}{l} 2(A-B)=1 \\ A+B=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A-B=\frac{1}{2} \\ A+B=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

και επομενως εχουμε $\frac{1-\omega}{w^2-4} = \frac{-1/4}{w-2} + \frac{-3/4}{w+2}$

$$\int_0^{z(x)} \left(\frac{-\frac{1}{4}}{w-2} + \frac{-3/4}{w+2}\right) d\omega = \ln x \iff$$

$$\iff \int_0^{z(x)} \frac{\frac{1}{4}}{2-\omega}\,d\omega - \frac{3}{4}\int_1^{z(x)} \frac{d\omega}{w+2} = \ln x$$

$$\iff \left(-\frac{1}{4}\ln(2-\omega)\right|_0^{z(x)} - \left(\frac{3}{4}\ln(2+\omega)\right)\Big|_1^{z(x)} = \ln x$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left(2-z(x)\right)+\frac{1}{4}\ln 2 \quad -\frac{3}{4}\left(\ln\left(2+z(x)\right)-\ln 3\right)$$

$$=\ln x$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(2-z(x)\right)-3\ln\left(2+z(x)\right)+\ln 2+3\ln 3=4\ln x$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(2-z(x)\right)\cdot\left(2+z(x)\right)^3+\ln 54=4\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2-z(x)\right)\left(2+z(x)\right)^3=\ln 54+\ln x^{-4}$$

$$\left(2-z(x)\right)\left(2+z(x)\right)^3=54\,x^{-4}$$

όμως $\quad z(x)=\dfrac{y(x)}{x} \quad$ και παίρνουμε

$$\left(2-\frac{y(x)}{x}\right)\left(2+\frac{y(x)}{x}\right)^3=\frac{54}{x^4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-y(x)\right)\left(2x+y(x)\right)^3=54.$$

(Η λύση σε πεπλεγμένη μορφή).

Προβλημα 5   Να λυθει η ΔΕ.

$$7x^6y^3+2xy+y^5+(3x^7y^2+x^2+5xy^4)\,y'(x)=0$$

Λυση: Θετουμε $M(x,y)=7x^6y^3+2xy+y^5$ και

$$N(x,y)=3x^7y^2+x^2+5xy^4.$$

επειδη $M_y(x,y)=21x^6y^2+2x+5y^4$ και

$$N_x(x,y)=21x^6y^2+2x+5y^4=M_y(x,y)$$

προκυπτει οτι η ΔΕ ειναι πληρης (ακριβης, τελειο διαφορικο).

Επομενως υπαρχει βαθμωτη συναρτηση f ωστε

$$f_x(x,y)=7x^6y^3+2xy+y^5 \quad \text{και}$$

$$f_y(x,y)=3x^7y^2+x^2+5xy^4.$$

Για την ευρεση της f, εχουμε

$$f_x(x,y)=7x^6y^3+2xy+y^5=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^7y^3+x^2y+xy^5\right)$$

και επομενως

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y)-x^7y^3-x^2y-xy^5\right)=0 \Rightarrow \exists\, g=g(y) \text{ ωστε}$$

$$f(x,y)-x^7y^3-x^2y-xy^5=g(y)\Rightarrow$$

$$f(x,y)=x^7y^3+x^2y+xy^5+g(y).$$

Ομως εχουμε επισης

$$f_y(x,y) = 3x^7y^2 + x^2 + 5xy^4 \iff$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^7y^3 + x^2y + xy^5 + g(y)\right) = 3x^7y^2 + x^2 + 5xy^4$$

$$\iff 3x^7y^2 + x^2 + 5xy^4 + g'(y) = 3x^7y^2 + x^2 + 5xy^4$$

$$\iff g'(y) = 0 \implies \exists\, c \in \mathbb{R} : g(y) = c,$$

και τελικα

$$f(x,y) = x^7y^3 + x^2y + xy^5 + c,$$

οποτε επειδη

$$\frac{d}{dx} f(x,y(x)) = f_x(x,y) + f_y(x,y(x))\, y'(x)$$
$$= 0$$

προκυπτει

$$x^7y^3 + x^2y + xy^5 + c_1 = c_2$$

δηλ.

$$x^7y^3 + x^2y + xy^5 = c.$$

$\boxdot$

<u>Προβλημα 6</u> Να λυθει η ΔΕ

$$(3x^2y + 2y^2)\,dx + (x^2 + 2xy^2)\,dy = 0.$$

$$(3xy + 2y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0.$$

Λυση: Θετουμε $M(x,y) = 3xy + 2y^2$, $N(x,y) = x^2 + 2xy$

τοτε $M_y(x,y) = 3x + 4y$, $N_x(x,y) = 2x + 2y$

οποτε $M_y(x,y) - N_x(x,y) = 3x + 4y - 2x - 2y = x + 2y$.

Η Δ.Ε δεν ειναι πληρης. Ομως επειδη

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} = \frac{x+2y}{x^2+2xy} = \frac{x+2y}{x(x+2y)} = \frac{1}{x}$$

υπαρχει πολλαπλασιαστης που ειναι συναρτηση του x, που γινεται πληρης, δηλ $\exists\ \varphi(x)$:

$$\varphi(x)(3xy + 2y^2)\,dx + \varphi(x)(x^2 + 2xy)\,dy = 0$$

να ειναι πληρης. Οποτε πρεπει

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(x)(3xy + 2y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x)(x^2 + 2xy)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(x)(3x + 4y) = \varphi'(x)(x^2 + 2xy) + \varphi(x)(2x + 2y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)(x^2 + 2xy) + \varphi(x)(2x + 2y - 3x - 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)(x^2 + 2xy) - \varphi(x)(x + 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)\,x - \varphi(x) = 0$$

(Εδω αναζητααμε μια τετοια συναρτηση $\overset{\varphi>0}{\varphi(x)}$)

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \ln\varphi(x) = \ln x + c$$

παιρνουμε την $\varphi(x) = x$.

και τοτε η ΔΕ.

$$x(3xy+2y^2)\,dx + x(x^2+2xy)\,dy = 0$$

είναι πλήρης. Οπότε $\exists$ βαθμωτή $f = f(x,y)$ ώστε

$$f_x(x,y) = x(3xy+2y^2) = 3x^2y + 2xy^2$$

$$f_y(x,y) = x(x^2+2xy) = x^3 + 2x^2y$$

Για την επίλυση της f:

$$f_x(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y + x^2y^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y) - x^3y - x^2y^2\right) = 0$$

$\Rightarrow \ \exists \ g = g(y)$ ώστε

$$f(x,y) - x^3y - x^2y^2 = g(y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + g(y)$$

Επίσης

$$f_y(x,y) = x^3 + 2x^2y \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y + x^2y^2 + g(y)\right) = x^3y + 2x^2y \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 2x^2y + g'(y) = x^3y + 2x^2y$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(y) = 0 \Rightarrow \exists\, c_1 \in \mathbb{R} : \ g(y) = c_1.$$

δηλ.
$$f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + c_1$$

και επειδη

$$\frac{d}{dx}\left(x^3y(x)+x^2y^2(x)+c_1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^3y+x^2y^2+c_1=c_2$$

δηλ

$$x^3y+x^2y^2=c \quad \text{(πεπλεγμένη μορφή).}$$

στε

(Αν μας εδινε αρχικες συνθηκες, θα τη λυναμε).

∎

Προβλημα 7 Να βρεθει η γενικη λυση της

$$y''(t)-3y'(t)-4y(t)=\cos t\, e^{-t}$$

Λυση: Η ΔΕ ειναι γραμμικη με σταθερους συντελεστες μη ομογενης, με μη ομογενεια $\cos t\, e^{-t}$ (τελικα ευθετικη)

Αρχικα λυναμε την ομογενη.

$$y''-3y'-4y=0$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση $(y(t)=e^{\lambda t})$ ειναι

$$\lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=4\\ \lambda=-1\end{cases}$$

Λυσεις ομογενους e^{-t}, e^{4t}. Παμε στην μη ομογενη.

Θετουμε $y(t)=e^{-t}z(t) \Rightarrow y'(t)=e^{-t}z'(t)-e^{-t}z(t)$

$\Rightarrow y''(t)=e^{-t}z''(t)-2e^{-t}z'(t)+e^{-t}z(t)$ και η Αρχικη ΔΕ γράφεται:

$$e^{-t}z''(t) - 2e^{-t}z'(t) + e^{-t}z(t) - 3\left(e^{-t}z'(t) - e^{-t}z(t)\right) - 4e^{-t}z(t) = \cos t\, e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}z''(t) - 5e^{-t}z'(t) = \cos t\, e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow z''(t) - 5z'(t) = \cos t$$

(Μπορούμε να τη λύσουμε με πολλούς τρόπους!)

Θέτουμε $z'(t) = w(t)$

ΔΕ

$$\Rightarrow w'(t) - 5w(t) = \cos t$$

$$\Leftrightarrow e^{-5t}w'(t) - 5e^{-5t}w(t) = e^{-5t}\cos t$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-5t}w(t)\right)' = \cos t\, e^{-5t} = \left(\int_0^t \cos t\, e^{-5t}\right)'$$

$\Rightarrow$ Υπολογίζουμε το

$$\int_0^t \cos s\, e^{-5s}\,ds = \int_0^t \cos s \left(-\frac{e^{-5s}}{5}\right)' ds = \left(-\frac{1}{5}\cos s\, e^{-5s}\right)\Big|_0^t$$

$$- \int_0^t (\cos s)'\left(-\frac{e^{-5s}}{5}\right) ds = -\frac{\cos t\, e^{-5t}}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\int_0^t \sin s\, e^{-5s}\,ds$$

$$= -\frac{\cos t\, e^{-5t}}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\int_0^t \sin s\left(-\frac{e^{-5s}}{5}\right)' ds$$

$$= -\frac{\cos t\, e^{-5t}}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left[\left(-\frac{\sin s\, e^{-5s}}{5}\right)\Big|_0^t - \int_0^t (\sin s)'\left(-\frac{e^{-5s}}{5}\right) ds\right]$$

$$= -\frac{\cos t\, e^{-5t}}{5} + \frac{1}{5} + \frac{\sin t\, e^{-5t}}{25} - \frac{1}{25}\int_0^t \cos s\, e^{-5s}\,ds$$

Επομένως. $\left(1+\frac{1}{25}\right)\int_0^t \cos t\, e^{-5t} dt = \frac{1}{5} - \frac{\cos t\, e^{-5t}}{5} + \frac{\sin t\, e^{-5t}}{25}$

$$\Rightarrow \int_0^t \cos t\, e^{-5t} dt = \frac{25}{26}\left(\frac{1}{5} - \frac{\cos t\, e^{-5t}}{5} + \frac{\sin t\, e^{-5t}}{25}\right)$$

$$= \frac{5}{26} - \frac{5\cos t\, e^{-5t}}{26} + \frac{\sin t\, e^{-5t}}{25}.$$

και έτσι:

$$e^{-5t} w(t) = \frac{5}{26} - \frac{5\cos t\, e^{-5t}}{26} + \frac{\sin t\, e^{-5t}}{26} + c$$

$$\Rightarrow e^{-5t} z'(t) = c - \frac{5\cos t\, e^{-5t}}{26} + \frac{\sin t\, e^{-5t}}{26}$$

$$\Rightarrow z'(t) = c e^{+5t} - \frac{5\cos t}{26} + \frac{\sin t}{26}$$

$$\Rightarrow z(t) = c_1 e^{5t} + c_2 - \frac{5\sin t}{26} - \frac{\cos t}{26}$$

Γυρίζαμε πίσω

$$e^{t} y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 - \frac{5\sin t}{26} - \frac{\cos t}{26}$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{5\sin t}{26} e^{-t} - \frac{\cos t}{26} e^{-t}.$$

$\boxed{\cdot}$

<u>Πρόβλημα 8</u> Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε

$$t^2 y''(t) - t(t+2)y'(t) + (t+2)y(t) = 0$$

αν είναι γνωστό ότι έχει λύση στη μορφή $\kappa_1 t + \lambda$.

Λυση: Αρχικα θα βρουμε τη λυση στη μορφη

$$y(t) = kt + \lambda$$

$$\Rightarrow y'(t) = k$$

$$\Rightarrow y''(t) = 0$$

οποτε εχουμε:

$$t^2 \cdot 0 - t(t+2)k + (t+2)(kt+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -kt(t+2) + (t+2)(kt+\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(t+2)(-kt+kt+\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(t+2) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = 0$$

και επομενως η $y(t) = t$ ειναι λυση της Δ.Ε.

Για την ευρεση της δευτερης λυσης θετουμε

$$y(t) = t\, z(t) \Rightarrow y'(t) = t z'(t) + z(t)$$

$\Rightarrow y''(t) = t z''(t) + 2z'(t)$ και η Αρχικη ΔΕ γραφεται:

$$t^2(t z''(t) + 2z'(t)) - t(t+2)(t z'(t) + z(t)) + t(t+2)z(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 z''(t) + 2t^2 z'(t) - t^2(t+2)z'(t) - t(t+2)z(t) + t(t+2)z(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 z''(t) - t^3 z'(t) = 0$$

Αρκεί να λύσουμε τη Δ.Ε

$$z'' - z' = 0.$$

Είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, οπότε αν $z(t) = e^{\lambda t}$

η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ λύσεις $1, e^t$

και η γενική λύση είναι

$$z(t) = c_1 + c_2 e^t \qquad (y(t) = t z(t))$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = t(c_1 + c_2 e^t) = c_1 t + c_2 t e^t, \text{ η}$$

γενική λύση της αρχικής Δ.Ε.

$\boxminus$

<u>Πρόβλημα 9</u> Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y''(t) + 4y(t) = 8 \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

<u>Λύση</u>: Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Lagrange (μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών)

Για τον σκοπό αυτό λύνουμε αρχικά την ομογενή ΔΕ

$$y''(t) + 4y(t) = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $(y(t)=e^{\lambda t})$

$$\lambda^2+4=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\pm 2i$$

(μιγαδικές)

$\Rightarrow$ λύσεις $e^{\pm 2ti} = \cos 2t \pm i \sin 2t$

Πραγματικές λύσεις $\cos 2t$, $\sin 2t$.

Γενική λύση ομογενούς

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) .$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη μέθοδο Lagrange. Ψάχνουμε λύση για της αρχικής Δ.Ε στη μορφή

$$y(t) = c_1(t) \cos(2t) + c_2(t) \sin(2t) .$$

Επειδή

$$y'(t) = c_1'(t) \cos(2t) + c_2'(t) \sin(2t)$$
$$-2c_1(t) \sin(2t) + 2c_2(t) \cos(2t) .$$

Απαιτούμε αρχικά

$$c_1'(t) \cos(2t) + c_2'(t) \sin(2t) = 0$$

οπότε $y'(t) = -2c_1(t) \sin(2t) + 2c_2(t) \cos(2t)$

$$\Rightarrow \quad y''(t) = -2c_1'(t) \sin(2t) + 2c_2'(t) \cos(2t)$$
$$-4c_1(t) \cos(2t) - 4c_2(t) \sin(2t)$$

και η ΔΕ γραφεται:

$$y'' + 4y(t) = 8\tan t$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2c_1'(t)\sin 2t + 2c_2'(t)\cos 2t = 8\tan t$$

Προσδιοριζουμε τα c_1', c_2' λυνοντας το συστημα

$$c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\sin(2t) = 0$$

$$-c_1'(t)\sin(2t) + c_2'(t)\cos(2t) = 4\tan t \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

και προκυπτει:

$$c_1'(t) = -4\tan t\,\sin 2t = -4\frac{\sin t}{\cancel{\cos t}}\cdot 2\sin t\,\cancel{\cos t}$$

$$= -8\sin^2 t = -8\,\frac{1-\cos 2t}{2} = -4(1-\cos 2t)$$

$$c_2'(t) = 4\tan t\cos 2t = 4\frac{\sin t}{\cos t}(2\cos^2 t - 1)$$

$$= 8\sin t\cos t - 4\tan t = 4\sin(2t) - 4\tan t.$$

Επομενως

$$c_1(t) = c_1 - 4t + 2\sin(2t)$$

$$c_2(t) = c_2 + \int_0^t \left(4\sin(2s) - 4\tan s\right)ds$$

$$= c_2 + \left(-2\cos(2s)\right)\Big|_0^t - 4\int_0^t \frac{\sin s}{\cos s}\,ds$$

$$\cos s = \xi \Rightarrow d\xi = -\sin s\,ds$$

$$= c_2 - 2\cos(2t) + 2 - 4\int_1^{\cos t} \frac{-d\xi}{\xi}$$

$$= c_2 + 2 - 2\cos 2t + 4(\ln \xi)\Big|_1^{\cos t}$$

$$= \underbrace{c_2 + 2}_{c_2} - 2\cos(2t) + 4\ln(\cos t).$$

Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$y(t) = (c_1 - 4t + 2\sin 2t)\cos 2t + (c_2 - 2\cos(2t) + 4\ln(\cos t)) \cdot \sin 2t$$

$$= c_1\cos 2t + c_2\sin 2t - 4t\cos 2t + \sin(4t) - \sin(4t)$$

$$+ 4\sin(2t)\ln(\cos t), \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Προβλημα 10 Να λυθει το συστημα

$$x'(t) = -2x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = x(t) - 2y(t)$$

$$x(0) = 1, \; y(0) = -1.$$

Λυση: Το γραφουμε σαν συστημα

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

οποτε ψαχνουμε για λυσεις στη μορφη

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \text{ οποτε}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

και έτσι παίρνουμε από τα σύστημα ΔΕ

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Επομένως λ ιδιοτιμή του πίνακα με $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Οπότε παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (2+\lambda)^2 - 1^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+3) = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -3 \end{cases}.$$

Εύρεση ιδιοδιανύσματος στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

Από $(*)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -a+\beta = 0 \\ a-\beta = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta = a$$

οπότε $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και επομένως μια λυση ειναι η

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Ευρεση ιδιοδιανυσματος στην ιδιοτιμη $\lambda = -3$ (απο (*))

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και επομενως μια δευτερη λυση ειναι η

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Επομενως η γενικη λυση του συστηματος ειναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Θα προσδιορισουμε τις σταθερες απο τις αρχικες συνθηκες.

Εχουμε $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, οποτε πρεπει:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - c_2 &= -1 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned} \right.$$

και επομενως η λυση του συστηματος

ειναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad , \text{δηλ}$$

$$x(t) = e^{-3t} \, , \quad y(t) = -e^{-3t} \, , \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxdot$

<u>Προβλημα 11</u> Να λυθει το συστημα ΔΕ

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= -4x(t) - y(t) \end{aligned} \quad , \; t \in \mathbb{R}.$$

<u>Λυση</u>: Εχουμε:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Ψαχνουμε για λυσεις στη μορφη

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

οποτε προκυπτει:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και επομενως η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 + 4^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+1)^2 - (4i)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1+4i)(\lambda+1-4i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1-4i \\ \lambda = -1+4i \end{cases}$$

Ευρεση (μιγαδικων) ιδιοδιανυσματων

- Ιδιοτιμη $-1-4i$

$$\begin{pmatrix} 4i & 4 \\ -4 & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4ai + 4\beta = 0 \\ -4a + 4\beta i = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = -ai$$

οποτε $\overset{\text{ιδιοδιανυσμα}}{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

μιγαδικη λυση

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1-4i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t-4ti}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos(4t) - i \sin 4t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 4t - i \sin 4t \\ -\sin 4t - i \cos 4t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 4t \\ -\sin 4t \end{pmatrix} e^{-t} - i \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Πραγματικές λύσεις

$$\begin{pmatrix} \cos 4t \\ -\sin 4t \end{pmatrix} e^{-t} \quad , \quad \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Γενική λύση συστήματος:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 4t \\ -\sin 4t \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} e^{-t}$$

και επομένως

$$x(t) = c_1 \cos 4t\, e^{-t} + c_2 \sin 4t\, e^{-t}$$

$$y(t) = -c_1 \sin 4t\, e^{-t} + c_2 \cos 4t\, e^{-t} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Δεν υπάρχει λόγος να βρούμε ιδιοδιανύσματα στην συζυγή ιδιοτιμή $\overline{\lambda = -1+4i}$, γιατί θα προκύψει ιδιοδιάνυσμα $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ και λύση

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+4i)t} = \dots = \begin{pmatrix} \cos 4t \\ -\sin 4t \end{pmatrix} e^{-t} + i \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} e^{-t}).$$

$\blacksquare$

Προβλημα 12

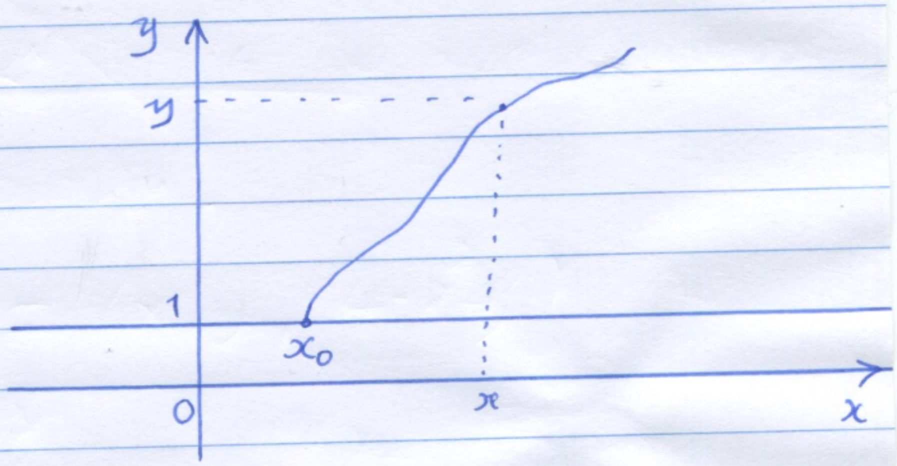
Να λυθει το προβλημα

$$(y+u(x,y))\,u_x(x,y) + y\,u_y(x,y) = x-y \,,$$

$$u(x,1) = 1+x \,, \quad x\in\mathbb{R}$$

Σε ποια σημεια του xy επιπεδου, οριζεται η λυση;

Λυση



Εστω $(x(s),y(s))$ η χαρακτηριστικη καμπυλη.

Η εξισωση γινεται ως εξης

$$\frac{d}{ds}u(x(s),y(s)) = u_x(x(s),y(s))\,x'(s) + u_y(x(s),y(s))\,y'(s)$$

$$x'(s) = y(s) + u(x(s),y(s)) \,, \quad x(0) = x_0$$

$$y'(s) = y(s) \,, \quad y(0) = 1$$

και τοτε αν $f(s) = u(x(s),y(s))$, προκυπτει το συστημα

$$f'(s) = u_x x' + u_y y' = x(s) - y(s)$$

$$x'(s) = y(s) + f(s)$$

$$y'(s) = y(s)$$

με $y(0)=1$, $x(0)=x_0$, $f(0) = u(x(0), y(0)) =$

$= u(x_0, 1) = 1 + x_0$.

Επειδη $y'(s) = y(s) \Leftrightarrow (e^{-s} y(s))' = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{-s} y(s) = e^{-0} y(0) \Leftrightarrow y(s) = e^{s}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

και

$$x'(s) = e^{s} + f(s)$$

$$f'(s) = x(s) - e^{s}$$

επομενως $f''(s) = x'(s) - e^{s} = e^{s} + f(s) - e^{s}$

$\Leftrightarrow \quad f''(s) - f(s) = 0.$ και $x(s) = f'(s) + e^{s}$

οποτε με χρηση της χαρακτηριστικης εξισωσης ($f(s) = e^{\lambda s}$) προκυπτει

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

και επομενως υπαρχουν σταθερες ωστε

$$f(s) = c_1 e^{s} + c_2 e^{-s} \Rightarrow f'(s) = c_1 e^{s} - c_2 e^{-s}$$

οποτε $x(s) = (c_1 + 1) e^{s} - c_2 e^{-s}$.

όπως $\quad x(0)=x_0$

$\qquad f(0)=1+x_0$

και επομένως

$$\left.\begin{array}{l} c_1+c_2=1+x_0 \\ c_1+1-c_2=x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1+c_2=1+x_0 \\ c_1-c_2=-1+x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=x_0 \\ c_2=1 \end{array}\right.$$

Επομένως έχουμε

$$x(s)=(1+x_0)e^{s}-e^{-s}$$

$$y(s)=e^{s} \qquad , s\in\mathbb{R}$$

$$f(s)=x_0e^{s}+e^{-s}$$

Αν $\bar{s}$ τέτοιο ώστε $\left.\begin{array}{l} x(\bar{s})=x \\ y(\bar{s})=y \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1+x_0)e^{\bar{s}}-e^{-\bar{s}}=x \\ e^{\bar{s}}=y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{πρέπει αρχικά } y>0 \\ \bar{s}=\ln y \\ (1+x_0)y-\frac{1}{y}=x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+x_0=\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2} \\ \bar{s}=\ln y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}-1 \\ \bar{s}=\ln y \end{array}\right.$$

οπότε

$$f(\bar{s})=u(x(\bar{s}),y(\bar{s}))=u(x,y)$$

$$u(x,y) = x_0 e^{\bar{s}} + e^{-\bar{s}} = \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} - 1\right) y + \frac{1}{y}$$

$$= x + \frac{1}{y} - y + \frac{1}{y} = x - y + \frac{2}{y}, \quad y>0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Η λυση οριζεται για $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. $\square$

Προβλημα 13 Να λυθει το προβλημα Αρχικων - Συνοριακων τιμων

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t), \quad 0<x<1, \ t>0$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \cos^2(\pi x)$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

$$u_t(x,0) = 2\cos(2\pi x)$$

Λυση: Λυνουμε αρχικα την ομογενη ΔΕ

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

ψαχνοντας για λυσεις στη μορφη

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

και τοτε προκυπτουν οι συνοριακες συνθηκες

$$A'(0) = A'(1) = 0$$

και

$$\frac{B''(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$$

οποτε

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0 \quad , \quad 0<x<1$$
$$A'(0) = A'(1) = 0$$

Χαρακτηριστικη εξισωση $\quad (e^{kx})$

$$k^2 + \lambda = 0$$

1) εαν $\lambda < 0 \Longrightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$

$\Rightarrow \quad A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$\Rightarrow \quad A'(x) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$

$$\left.\begin{aligned} A'(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 - c_2 = 0 \\ A'(1) = 0 &\Leftrightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

2) εαν $\lambda = 0$, $\quad A(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow A'(x) = c_1$

$A'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Longrightarrow A_0(x) = 1$ ιδιοσυναρτηση

3) εαν $\lambda > 0 \rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Longrightarrow$

$A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \Longrightarrow$

$A'(x) = \sqrt{\lambda}\left(-c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)\right).$

$A'(0)=0 \Leftrightarrow c_2=0$

$A'(1)=0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda})=0=\sin 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_k}=k\pi \quad , k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda_k=(k\pi)^2, \ k\in\mathbb{N}$

ιδιοσυναρτήσεις $A_k(x)=\cos(k\pi x)$, $k\in\mathbb{N}$.

Επίσης

$$B''(t)+(k\pi)^2 B(t)=0$$

$$\Rightarrow B(t)=c_1\cos(k\pi t)+c_2\sin(k\pi t)$$

ιδιοσυναρτήσεις $\cos(k\pi t)$, $\sin(k\pi t)$.

Οπότε θα αξιοποιήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις

$$\cos(k\pi x)$$

για να περιγράψουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος.

Η συνάρτηση $\cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$ είναι γραμμένη σε σειρά Fourier, το ίδιο και το $u_t(x,0)$. Απομένει το $u(x,0)=\cos^2(\pi x)=\frac{1+\cos 2\pi x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x$

και έτσι έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$u_{tt}-u_{xx}=\cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$
$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$$
$$u(x,0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi x)$$
$$u_t(x,0)=2\cos(2\pi x).$$

Για τον σκοπό αυτό λύνουμε τα προβλήματα

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = \frac{1}{2}$$
$$u_t(x,0) = 0$$

πραγματικά για το σκοπό που η γενική λύση

επειδή

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t)\right)\cos(n\pi x)$$

οπότε ισχύει

$$\frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = 1, \quad a_n = 0, \; n \in \mathbb{N}$$

Επίσης

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\pi a_n \sin(n\pi t) + n\pi \beta_n \cos(n\pi t)\right)\cos(n\pi x)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \beta_n \cos(n\pi x) \Rightarrow \beta_n = 0, \; n \in \mathbb{N}$$

άρα τελικά

$$u(x,t) = \frac{1}{2}$$

και το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$$

$$u_t(x,0) = 2\cos(2\pi x)$$

Τη λυση τη ψαχνουμε στη μορφη

$$u(x,t) = \cos(2\pi x)\, Q(t)$$

$$\Rightarrow \quad u_{tt} = \cos(2\pi x)\, Q''(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = -(2\pi)^2 \cos(2\pi x)\, Q(t)$$

οποτε πρεπει:

$$\cos(2\pi x)\left(Q''(t) + (2\pi)^2 Q(t)\right) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$

$$\Leftrightarrow \quad Q''(t) + (2\pi)^2 Q(t) = \cos(2\pi t)$$

$$Q(0) = \frac{1}{2}$$

$$Q'(0) = 2$$

Για να λυση τη Δ.Ε. θα αποφυγω τη μεθοδο Lagrange και επειδη $\cos(2\pi t) = Re\left(e^{i2\pi t}\right)$ θα λυσουμε στο $\mathbb{C}$, τη

$$Q'' + (2\pi)^2 Q = e^{i2\pi t} \qquad (*)$$

οποτε ψαχνουμε για λυση στη μορφη

$$Q(t) = \alpha\, t\, e^{i2\pi t} \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

$$Q' = \alpha e^{i2\pi t} + i2\pi\alpha t e^{i2\pi t}$$

$$Q'' = 2i2\pi\alpha e^{i2\pi t} - (2\pi)^2 \alpha t e^{i2\pi t}$$

και η ΔΕ δινει οτι πρεπει

$$i4\pi\alpha e^{i2\pi t} = e^{i2\pi t}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{4\pi i} = -\frac{i}{4\pi}$$

Επομενως μια λυση της (*) ειναι

$$-\frac{it}{4\pi} e^{i2\pi t} =$$

$$= -\frac{it}{4\pi}\left(\cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)\right)$$

$$= -\frac{it}{4\pi}\cos(2\pi t) + \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)$$

(Επειδη $\cos 2\pi t = \mathrm{Re}\left(e^{i2\pi t}\right)$ (πραγματικο μερος))

η λυση ειναι το πραγματικο μερος, αρα

$\frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)$ ειναι μια λυση της

$$Q'' + (2\pi)^2 Q = \cos(2\pi t)$$

και επομενως εχουμε οτι

$$Q(t) = c_1 \cos(2\pi t) + c_2 \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)$$

όπως δείξαμε επίσης $Q(0) = \frac{1}{2}$, $Q'(0) = 2$

άρα $c_1 = \frac{1}{2}$

$$Q'(t) = -\frac{2\pi}{2} \sin(2\pi t) + 2\pi c_2 \cos(2\pi t) + \frac{\sin(2\pi t)}{4\pi} + \frac{t}{2} \cos(2\pi t)$$

$$\Rightarrow Q'(0) = 2 \Leftrightarrow 2\pi c_2 = 2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)$$

και έτσι η λύση του δεύτερου προβλήματος είναι

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)\right) \cos(2\pi x)$$

και του αρχικού προβλήματα είναι το άθροισμα (προβλημάτων) των επιμέρους λύσεων, δηλ.

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)\right) \cos(2\pi x)$$

$\boxdot$

Προβλημα 14 Να βρεθει η τιμη της παραμετρου a ωστε το προβλημα

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \quad 0 \le y \le \pi$$

$$u_y(x,\pi) = 0, \quad 0 \le x \le \pi$$

$$u_y(x,0) = a - 3\cos(3x), \quad 0 \le x \le \pi$$

να εχει λυση. Ποια ειναι η λυση τοτε ?

Λυση Αρχικα θα επιχειρησουμε να λυσουμε το προβλημα, βρισκοντας τη γενικη λυση της ομογενους Δ.Ε.

Εφαρμοζουμε τη μεθοδο Fourier και βρισκουμε λυσεις στη μορφη

$$u(x,y) = A(x)B(y).$$

Οι συνοριακες συνθηκες δινουν:

$$u_x(0,y) = 0 \Leftrightarrow A'(0)B(y) = 0 \Rightarrow A'(0) = 0.$$

$$u_x(\pi,y) = 0 \Leftrightarrow A'(\pi)B(y) = 0 \Rightarrow A'(\pi) = 0$$

$$u_y(x,\pi) = 0 \Leftrightarrow A(x)B'(\pi) = 0 \Rightarrow B'(\pi) = 0$$

και η Δ.Ε. δινει:

$$A''(x)B(y) + A(x)B''(y) = 0$$

οποτε προκυπτει:

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda$$

και ετσι εχουμε τα προβληματα

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi.$$
$$A'(0) = A'(\pi) = 0$$

&

$$B''(y) - \lambda B(y) = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq \pi.$$
$$B'(\pi) = 0$$

Το πρωτο προβλημα εχουμε δει οτι εχει ιδιοτιμες

$\lambda_0 = 0$, ιδιοσυναρτηση $A_0(x) = 1$

$\lambda_n = n^2$, ιδιοσυναρτησεις $A_n(x) = \cos(nx)$

Το δευτερο προβλημα, η Δ.Ε. εχει λυσεις

$\lambda_0 = 0$, $B_0(y) = 1$

$\lambda_n = n^2$, $B(y) = c_1 \cosh(ny) + c_2 \sinh(ny)$

$B'(y) = n c_1 \sinh(ny) + n c_2 \cosh(ny)$

$B'(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \tanh(n\pi).$

$\Rightarrow B_n(y) = \cosh(ny) - \tanh(n\pi)\sinh(ny).$

$0 \leq y \leq \pi.$

Γενικη λυση

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)\left(\cosh(ny) - \tanh(n\pi)\sinh(ny)\right)$$

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

$$\Rightarrow u_y(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \cos(nx)\left(\sinh(ny) - \tanh(n\pi)\cosh(ny)\right)$$

$$\Rightarrow a - 3\cos(3x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \cos(nx) \tanh(n\pi).$$

Για να αναπτυσσεται η $a-3\cos(3x)$ σε σειρα Fourier μονο των $\cos(nx)$ πρεπει $a=0$. (Διαφορετικα με ολοκληρωση προκυπτει $a=0$).

και επιπροσθετα τοτε $a_n = 0$, $n \neq 3$ και

$$-3 = -3a_3 \tanh(3\pi) \Rightarrow a_3 = \frac{1}{\tanh(3\pi)}$$

και η λυση ειναι:

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \frac{\cos(3x)}{\tanh(3\pi)}\left(\cosh(3y) - \tanh(3\pi)\sin 3y\right)$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$0 \leq y \leq \pi.$$

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

(το προβλημα εχει απειρες λυσεις τοτε!)

Η συνθηκη για το a μπορει να προκυψει

και διαφορετικα: Ειδικοτερα εχαμε

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left(u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)\right) dx dy = 0 \quad (*)$$

Ομως
$$\int_0^{\pi} u_{xx}(x,y)\,dx = \left(u_x(x,y)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= u_x(\pi,y) - u_x(0,y)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} u_{xx}(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Επισης
$$\int_0^{\pi} u_{yy}(x,y)\,dy = \left(u_y(x,y)\right)\Big|_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= u_y(x,\pi) - u_y(x,0)$$

$$= -u_y(x,0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} u_{yy}(x,y)\,dx\,dy = -\int_0^{\pi} u_y(x,0)\,dx$$

και η (*) γινεται

$$-\int_0^{\pi} u_y(x,0)\,dx = 0.$$ Ομως $u_y(x,0) = a - 2\cos(3x)$

Οποτε πρεπει

$$\int_0^{\pi} \left(a - 3\cos(3x) \right) dx = 0 \iff a\pi = 0 \iff a = 0.$$

$\boxdot$

<u>Προβλημα 15</u> Για ποιες τιμες της παραμετρου a το προβλημα

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x^2+y^2 \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = a + \cos\theta \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

εχει λυση. Να λυθει τοτε το προβλημα.

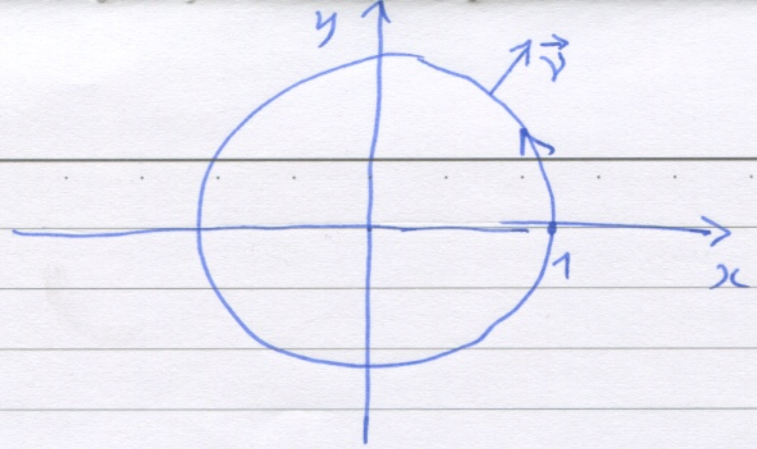
<u>Λυση:</u> Αρχικα θα βρουμε τη συνθηκη στο a. Εχουμε

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \right) dx\,dy = 0$$

$$\iff \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \operatorname{div} \left(\nabla u(x,y) \right) dx\,dy = 0$$

Θ. απαλοιφης

$$\iff \oint_{x^2+y^2=1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0 \qquad \Big(\oint_{x^2+y^2=1} \nabla u(x,y) \cdot \vec{\nu}\, ds \overset{\text{''}}{0} \Big)$$



Παραμετρικοποίηση κύκλου : $\vec{r}(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

$\vartheta \in [0, 2\pi)$.

$\Rightarrow \vec{\nu} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

οπότε $$\oint_{x^2+y^2=1} \nabla u \cdot \vec{\nu}\, ds = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} (u_x, u_y) \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(1,\vartheta)\, d\vartheta = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} (a + \cos\vartheta)\, d\vartheta = 0 \Leftrightarrow a \cdot 2\pi = 0$$

$\Leftrightarrow a = 0.$

Πρέπει επομένως $a = 0$.

Για την ευρεση της λυσης θετουμε

$$u(x,y) = v(r,\vartheta) \quad , \quad \begin{array}{l} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{array}$$

οποτε προκυπτει

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta} = 0$$

$$v(r,0) = v(r,2\pi)$$

$$v_\vartheta(r,0) = v_\vartheta(r,2\pi)$$

και ψαχνοντας για λυσεις στη μορφη

$$v(r,\vartheta) = A(r)\, B(\vartheta)$$

οι συνοριακες συνθηκες δινουν $B(0) = B(2\pi)$ &

$B'(0) = B'(2\pi)$

και η ΔΕ.

$$\overset{B(\theta)}{A''(r)} + \frac{1}{r} A'(r) B(\theta) + \frac{1}{r^2} A(r) B''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 \left(\frac{A''(r)}{A(r)} + \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} \right) = - \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = \lambda$$

Οπότε

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$B(0) = B(2\pi)$$
$$B'(0) = B'(2\pi) .$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 0$, ιδιοσυνάρτηση $B_0(\theta) = 1$

$\lambda = n^2$, ιδιοσυναρτήσεις $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$

και

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - \lambda A(r) = 0$$

Εάν $\lambda = 0 \Rightarrow$ λύσεις 1, $\ln r$
(απορρίπτεται γιατί είναι αφραγής στο 0

$\lambda = n^2 \Rightarrow$ λύσεις r^n, r^{-n} (απορρίπτεται αφραγής στο 0)

Επομένως γενική λύση:

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\right) r^n .$$

$$\Rightarrow v_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\right) r^{n-1}$$

$v_r(1,\vartheta) = \cos\vartheta$

$$\Rightarrow \quad \cos\vartheta = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\right)$$

με εξίσωση συντελεστών Fourier προκύπτει:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = 0, \quad n \neq 1$$
$$\beta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

και επομένως

$$v(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + r\cos\vartheta$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + x \qquad , \quad x^2+y^2 \leq 1 .$$

$\boxdot$

Πρόβλημα 16 Να λυθεί το πρόβλημα

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u_x(1,t) = 0 , \qquad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

όπου $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση. Τι συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η f για να υπάρχει λύση ? $\left(f(0) = 0, \ f'(1) = 0 \right)$.