ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

12 - 5 - 2020

Ποιο ειναι το επομενο προβλημα ?

- Συγκλιση σειρων
- .. Απλοποιηση σειρων

Προβλημα 1 Επιλυση προβληματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \qquad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = g(x,y), \qquad x^2+y^2=1$$

οπου η συναρτηση $g: \partial B_1 \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχης.

Αρχικα εχουμε το Λημμα:

Λημμα Εστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ και $N \in \mathbb{N}$. Τοτε

i) $$1+2\sum_{k=1}^{N} z^k = \frac{1+z-2z^{N+1}}{1-z} = \frac{1+z-\bar{z}-|z|^2-2z^{N+1}+2z^{N+1}\bar{z}}{1-z-\bar{z}+|z|^2}$$

ii) $$\sum_{k=1}^{N} z^{2k-1} = \frac{z-z^{2N+1}}{1-z^2} = \frac{z\left(1-\bar{z}^2-z^2+z^{2N}\bar{z}^2\right)}{1-z^2-\bar{z}^2+|z|^4}.$$

Ειδικοτερα εχουμε για $0<r<1$ και $x \in \mathbb{R}$ οτι:

iii) $$1+2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx)\, r^k = \frac{1-r^2-2r^{N+1}\cos((N+1)x)+2r^N\cos(Nx)}{1-2r\cos x+r^2}$$

iv) $$\sum_{k=1}^{N} \cos((2k-1)x)\, r^{2k-1} = \frac{r\cos x - r^3\cos x - r^3\cos(3x) + r^{2N+3}\cos((2N-1)x)}{1-2r^2\cos(2x)+r^4}.$$

<u>Αποδ.</u> Η βασικη αρχη ειναι (γεωμετρικη προοδος)

$$\text{Αν} \quad S_m = \sum_{k=1}^{m} z^k = z \sum_{k=1}^{m} z^{k-1} = z \sum_{\ell=0}^{m-1} z^{\ell}$$

$$= z \, \frac{1-z^m}{1-z} = \frac{z - z^{m+1}}{1-z} \quad \text{αν} \quad z \neq 1.$$

Οποτε

i) $$1+2\sum_{k=1}^{N} z^k = 1+2\,\frac{z-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1-z+2z-2z^{N+1}}{1-z}$$

$$= \frac{(1+z-2z^{N+1})(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1+z-\bar{z}-z\bar{z}-2z^{N+1}+2z^{N+1}\bar{z}}{1-z-\bar{z}+|z|^2}$$

ii) Παρομοια

$$\sum_{k=1}^{N} z^{2k-1} = z\sum_{k=1}^{N} z^{2(k-1)} = z\sum_{\ell=0}^{N-1} z^{2\ell} = z\sum_{\ell=0}^{N-1} (z^2)^{\ell}$$

$$= z\,\frac{1-z^{2N}}{1-z^2}.$$

iii) Θετουμε $z = re^{ix}$, οποτε ευκολα προκυπτει οτι

$$1+2\sum_{k=1}^{N} r^k \cos(kx) = \operatorname{Re}\left(1+2\sum_{k=1}^{N} r^k e^{ikx}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(1+2\sum_{k=1}^{N} (re^{ix})^k\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1+z-\bar{z}-|z|^2-2z^{N+1}+2z^{N+1}\bar{z}}{1-z-\bar{z}+|z|^2}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1-r^2-2r^{N+1}\cos((N+1)x)+2r^{N+2}\cos(Nx)}{1-2r\cos x+r^2}\right.$$

$$\left. + i\,\frac{2r\sin x-2r^{N+1}\sin((N+1)x)+2r^{N+2}\sin(Nx)}{1-2r\cos x+r^2}\right).$$

Παρομοια προκυπτει το iv) με $z = re^{ix}$, κανοντας χρηση του ii).

Επιστροφή στο πρόβλημα

Λύση 1ου προβλήματος

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες.

Είδαμε:

$$u(x,y) = v(r,\theta)$$

$$x = r\cos\theta \qquad 0 < r < 1, \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$
$$y = r\sin\theta$$

Τότε η v ικανοποιεί

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

$$v(r,0) = v(r,2\pi)$$
$$v_\theta(r,0) = v_\theta(r,2\pi)$$

$$v(1,\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) := \bar{g}(\theta), \qquad \theta \in [0,2\pi).$$

Αν θέσαμε

$$v(r,\theta) = A(r)\,B(\theta)$$

τότε προκύπτουν:

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0$$
$$B(0) = B(2\pi)$$
$$B'(0) = B'(2\pi)$$

&

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - \lambda A(r) = 0$$

είδαμε: Ιδιοτιμές

$$\lambda_0 = 0 \longrightarrow \text{Ιδιοσυνάρτηση } B_0(\theta) = 1$$

$$\lambda_n = n^2 \longrightarrow \text{ιδιοσυναρτήσεις } \cos(n\theta), \sin(n\theta)$$

και τελικά

Γενική λύση

$$(*) \quad u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) \right) r^n ,$$

βρήκαμε συντελεστές Fourier από

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) \right) = \overline{g}(\theta)$$

οπότε

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(\theta) d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(\theta) \cos(n\theta) d\theta , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(\theta) \sin(n\theta) d\theta , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Το βασικό ερώτημα αφορά τη σύγκλιση της σειράς (*).

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την ακολουθία

$$S_N(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta) \right) r^k, \quad N \in \mathbb{N}.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big[\int_0^{2\pi} \overline{g}(\theta) d\theta + 2 \sum_{n=1}^{N} \int_0^{2\pi} \overline{g}(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \, \cos(n\theta) \, r^n$$

$+$

$$2\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\bar{g}(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi\ \sin(n\theta)r^n\Big]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{g}(\varphi)\Big[1+2\sum_{n=1}^{N}\big(\cos(n\varphi)\cos(n\theta)+\sin(n\varphi)\sin(n\theta)\big)r^n\Big]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{g}(\varphi)\Big[1+2\sum_{n=1}^{N}\cos(n(\varphi-\theta))r^n\Big]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{g}(\varphi)\frac{1-r^2-2r^{N+1}\cos((N+1)(\varphi-\theta))+2r^N\cos(N(\varphi-\theta))}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$K_N(r,\varphi-\theta)=\frac{1-r^2-2r^{N+1}\cos((N+1)(\varphi-\theta))+2r^N\cos(N(\varphi-\theta))}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

Τότε αν $0\leq r\leq r_0<1$, $\varphi,\theta\in\mathbb{R}$

$$K_N(r,\varphi-\theta)\longrightarrow\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\quad \text{ομοιόμορφα}$$

$N\to+\infty$.

(γιατί;)

Οπότε έχουμε για $0\leq r\leq r_0<1$, $\theta\in[0,2\pi)$

$$v(r,\theta)=\lim_{N\to\infty}S_N(r,\theta)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{g}(\varphi)K_N(r,\varphi-\theta)d\varphi$$

$$\overset{\text{Ομοιόμορφη σύγκλιση}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{g}(\varphi)\lim_{N\to+\infty}K_N(r,\varphi-\theta)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(\varphi) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi$$

$$= \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(\varphi) \frac{d\varphi}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

$\forall\, 0 \leq r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi)$.

Μαλιστα με αναλογο τροπο μπορουμε να αποδειξουμε οτι η σειρα ειναι C^2 συναρτηση στο $[0,1) \times [0,2\pi)$. και λυνει το προβλημα.

Προεκυψε μαλιστα πολυ πιο ευκολος τροπος ευρεσης της λυσης (σε πολικες)

$$v(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{g}(\varphi)}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi$$

$0 \leq r < 1$

$0 \leq \theta < 2\pi$.

$\boxdot$

<u>Προσοχη</u> Η σύγκλιση της σειρας <u>δεν</u> ειναι εν γενει ομοιομορφη στο $[0,1] \times [0, 2\pi)$.

<u>Παρατηρηση</u> Ευκολα μπορουμε να γραψουμε τη λυση σε καρτεσιανες συντεταγμενες.

Προβλημα 2 Επιλυση προβληματος:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x^2+y^2<1, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x,y) = g(x,y), \quad x^2+y^2=1, \quad x>0, y>0$$

οπου $g : \{(x,y) \mid x^2+y^2=1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\} \to \mathbb{R}$ συνεχης συναρτηση ωστε $g(1,0)=0$.

Αποδ. Οπως ειδαμε σε πολικες συντεταγμενες το προβλημα γραφεται:

$$u(x,y) = v(r,\theta)$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

και εχουμε

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, \quad 0<r<1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$v(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1$$
$$v_\theta(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad 0<r<1.$$

$$v(1,\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) := \bar{g}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Επισης η αναζητηση λυσεων στη μορφη

$$v(r,\theta) = A(r)B(\theta)$$

μας οδηγει στα προβληματα

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0 \quad , \quad 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$$
$$B(0) = 0$$
$$B'(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

&

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - \lambda A(r) = 0$$

Ειδαμε:

Ιδιοτιμες $\lambda_k = (2k-1)^2 , \ k \in \mathbb{N}$

Ιδιοσυναρτησεις $B_k(\theta) = \sin((2k-1)\vartheta)$

και τον δευτερον

$$A_k(r) = r^{2k-1} \quad , \ k \in \mathbb{N} , \ 0<r<1 .$$

και η γενικη λυση ειναι:

$$u(r,\vartheta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sin((2k-1)\vartheta)\, r^{2k-1}$$

με

$$\beta_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{g}(\theta) \sin((2k-1)\theta)\, d\theta \quad , \quad k \in \mathbb{N} .$$

Τα ερωτηματα πους μας απασχολουν:

Συγκλιση σειρας

που συγκλινει η σειρα ;

Αρχικα θεωρουμε:

$$S_N(r,\vartheta) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin((2k-1)\vartheta)\, r^{2k-1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_0^{\pi/2} \bar{g}(\varphi) \sin((2k-1)\varphi)\,d\varphi \, \sin((2k-1)\theta)\, r^{2k-1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{g}(\varphi) \sum_{k=1}^{N} \sin((2k-1)\varphi) \sin((2k-1)\theta)\, r^{2k-1}\, d\varphi$$

Θετουμε

$$\overline{K}_N(r,\vartheta,\varphi) = 2 \sum_{k=1}^{N} \sin((2k-1)\varphi) \sin((2k-1)\theta)\, r^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Big(\cos((2k-1)(\varphi-\theta)) - \cos((2k-1)(\varphi+\theta)) \Big) r^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \cos((2k-1)(\varphi-\theta))\, r^{2k-1}$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \cos((2k-1)(\varphi+\theta))\, r^{2k-1}$$

Λημμα (iv)

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{r\cos(\varphi-\theta) - r^3\cos(\varphi-\theta) - r^3\cos(3(\varphi-\theta)) + r^{2N+3}\cos((2N+1)(\varphi-\theta))}{1 - 2r^2\cos(2(\varphi-\theta)) + r^4}$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \frac{r\cos(\varphi+\theta) - r^3\cos(\varphi+\theta) - r^3\cos(3(\varphi-\theta)) + r^{2N+3}\cos((2N+1)(\varphi+\theta))}{1 - 2r^2\cos(2(\varphi+\theta)) + r^4}$$

Μπορουμε να δουμε οτι καθε σειρα συγκλινει ομοιομορφα αν $0 \le r \le r_0 < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ και μαλιστα

εχουμε :

$$\lim_{N\to\infty} \bar{K}_N(r,\vartheta,\varphi) = \underbrace{\frac{r\cos(\varphi-\vartheta) - r^3\cos(\varphi-\vartheta) - r^3\cos(3(\varphi-\vartheta))}{1-2r^2\cos(2(\varphi-\vartheta)) + r^4} - \frac{r\cos(\varphi+\vartheta) - r^3\cos(\varphi+\vartheta) - r^3\cos(3(\varphi+\vartheta))}{1-2r^2\cos(2(\varphi+\vartheta)) + r^4}}_{K(r,\vartheta,\varphi)}$$

και επιπροσθετα η σειρα συγκλινει ομοιομορφα

στην

$$v(r,\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \bar{g}(\varphi)\, K(r,\vartheta,\varphi)\, d\varphi \quad .$$

επισης καποιος μπορει να αποδειξει

η συναρτηση

$$(r,\vartheta) \longmapsto \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \bar{g}(\varphi)\, K(r,\vartheta,\varphi)\, d\varphi$$ ειναι C^2 στο $[0,1)\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

και ειναι λυση του προβληματος.

$\boxed{-}$