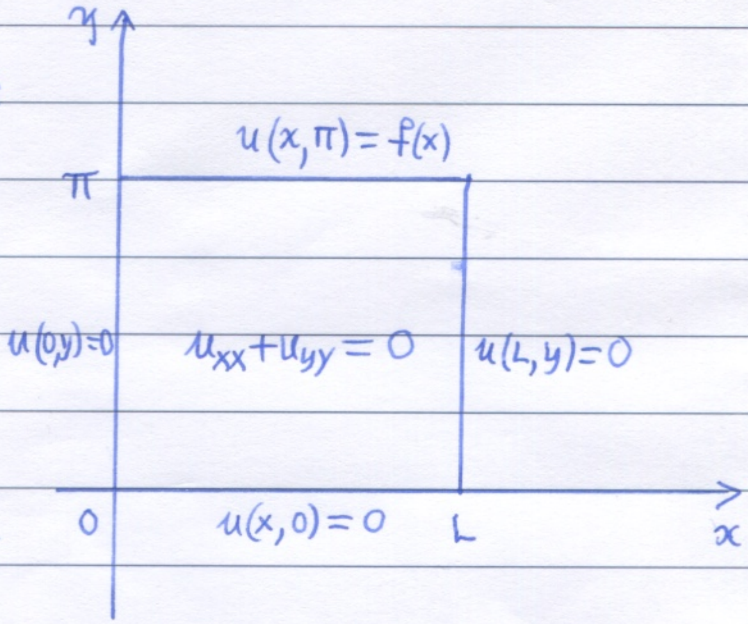
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

14-4-2020

Μεθοδος Fourier

Το προβλημα του Dirichlet σε ορθογωνιο



Προβλημα: Να λυθει το προβλημα Συνοριακων τιμων

(*) $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$

$0<x<L,\ 0<y<\pi$

$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le L$

$u(0,y)=u(L,y)=0,\ 0\le y\le\pi$

$u(x,\pi)=f(x),\ 0\le x\le L$

οπου $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ ειναι δοθειτα ομαλη συναρτηση με $f(0)=f(L)=0$.

Η εξισωση (*) ειναι η εξισωση του Laplace και οι συναρτησεις u που ικανοποιουν την εξισωση του Laplace ονομαζονται Αρμονικες συναρτησεις.

Απαντηση: Για ακομη μια φορα θα χρησιμοποιησουμε τη μεθοδο Fourier για την ευρεση της γενικης λυσης, αρχικα στο ακολουθο προβλημα:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0<x<L, \; 0<y<\pi$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L$$

$$u(0,y) = u(L,y) = 0, \quad 0 \le y \le \pi.$$

Αυτη τη φορα ψαχνουμε για λυσεις στη μορφη

$$u(x,y) = A(x)\,B(y), \quad 0<x<L, \; 0<y<\pi.$$

Αρχικα οι Συνοριακες συνθηκες δινουν:

$$u(x,0) = 0 \iff A(x)B(0) = 0, \quad \forall\, 0 \le x \le L$$

και επειδη θελουμε μη τετριμμενη λυση προυποθετει

$$B(0) = 0$$

Παρομοια

$$u(0,y) = 0 \iff A(0)B(y) = 0, \quad \forall\, 0 \le y \le \pi$$

$\Rightarrow$

$$A(0) = 0$$

$$u(L,y) = 0 \iff A(L)B(y) = 0, \quad \forall\, 0 \le y \le \pi$$

$\Rightarrow$

$$A(L) = 0.$$

και απο τη Δ.Ε. οτι

$$A''(x)\,B(y) + A(x)\,B''(y) = 0\,, \quad 0<x<L\,, \quad 0<y<\pi.$$

Γυρω απο ενα διαστημα με μη μηδενικον παρονομαστη:

$$\frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\frac{B''(y)}{B(y)}\,, \quad 0<x<L,\ 0<y<\pi.$$

$\Longrightarrow \ \exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ωστε

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda$$

και
τελικα προκυπτουν τα υποπροβληματα:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} A''(x) + \lambda A(x) = 0\,, & 0<x<L \\ A(0) = A(L) = 0 \end{cases}$$

και

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} B''(y) - \lambda B(y) = 0\,, & 0<y<\pi \\ B(0) = 0 \end{cases}$$

Επιλυση του υποπροβληματος (ιδιοτιμων) (I)

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0, \quad 0 < x < L$$
$$A(0) = A(L) = 0$$

Ψάχνουμε για λύσεις $A(x) = e^{kx}$, οπότε προκύπτει

χαρακτηριστική εξίσωση:

$$k^2 + \lambda = 0.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\lambda = 0 \Rightarrow A(x) = c_1 + c_2 x$, όμως

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \\ A(L)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 L = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{ c_1 = c_2 = 0$$

απορρίπτεται

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow$

$$A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad 0 \leq x \leq L$$ και

επειδή

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \\ A(L)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \end{array}\right\} \overset{\cdots}{\Leftrightarrow} \{ c_1 = c_2 = 0$$

μιας και ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}L} & e^{-\sqrt{-\lambda}L} \end{pmatrix}$$

$$\det A = e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L} = e^{-\sqrt{-\lambda}L}\left(1 - e^{2\sqrt{-\lambda}L}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.

iii) $\lambda > 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow$

$$A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad 0 \le x \le L$$

όμως

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \\ A(L)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \end{array}\right.$$

$$\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 = \sin 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\lambda} L = n\pi \quad , n \in \mathbb{N}$$

ιδιοτιμές: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$

ιδιοσυναρτήσεις $A_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad 0 \le x \le L.$

<u>Επίλυση υποπροβλήματος (II)</u>

$$B''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B(y) = 0, \quad 0 < y < \pi$$
$$B(0) = 0.$$

Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή

$$B(y) = e^{ky}, \quad \text{οπότε}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad k = \pm \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \quad B(y) = c_1 e^{\frac{n\pi}{L}y} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{L}y}.$$

$$B(0) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0 \iff c_2 = -c_1$$

$$\Rightarrow \quad B(y) = c_1 \left(e^{\frac{n\pi}{L}y} - e^{-\frac{n\pi}{L}y} \right)$$

$$= 2c_1 \left(\frac{e^{\frac{n\pi}{L}y} - e^{-\frac{n\pi}{L}y}}{2} \right)$$

$$= 2c_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

$$\sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

$$\Rightarrow \quad u_n(x,y) = A_n(x)\, B_n(y)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

Οποτε γενικη λυση:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Στο σημειο αυτο παιρνουμε υπ' οψιν οτι:

$$u(x,\pi) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \iff$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (**)$$

$$0 \leq x \leq L,$$

δηλαδη πρεπει να αναπτυξουμε (βρουμε) την $f(x)$ σε σειρα Fourier των

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x \leq L$$

για τον λογο αυτο πολλαπλασιαζουμε την (**) με $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$, $m \in \mathbb{N}$ και παιρνουμε

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right) dx$$

$$\overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^L c_n \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

και επειδη

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \frac{1-\cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)}{2} dx$$

$$= \left(\frac{x + \frac{\sin\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)}{\frac{2m\pi}{L}}}{2} \right) \Bigg|_0^L$$

$$= \frac{L}{2}.$$

Ενώ όταν $m \neq n$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \frac{\cos\left(\frac{(n-m)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi}{L}x\right)}{2} dx$$

$$= \left(\frac{\frac{\sin\left(\frac{(n-m)\pi}{L}x\right)}{(n-m)\pi/L} - \frac{\sin\left(\frac{(n+m)\pi}{L}x\right)}{(n+m)\pi/L}}{2} \right) \Bigg|_0^L$$

$$= 0.$$

Οπότε έχουμε:

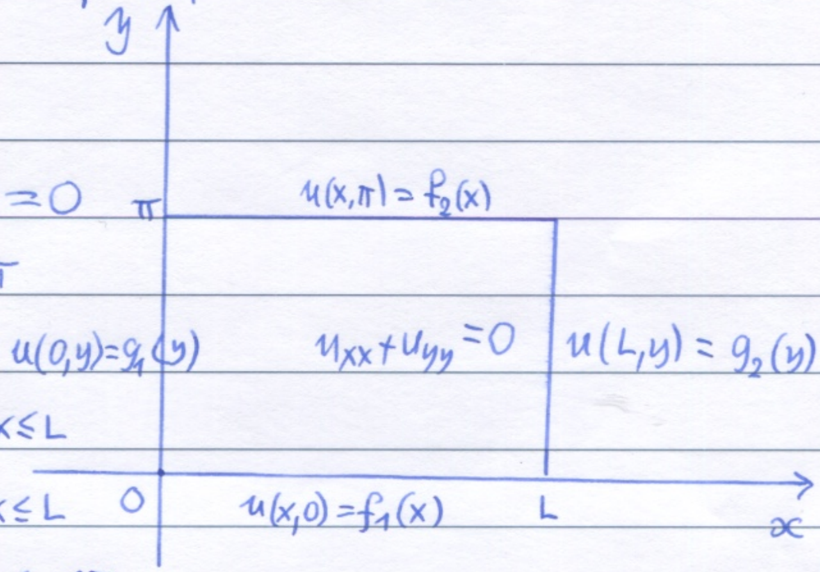
$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = c_m \cdot \sinh\left(\frac{m\pi^2}{L}\right) \cdot \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c_m = \frac{1}{\frac{L}{2} \sinh\left(\frac{m\pi^2}{L}\right)} \cdot \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

$m \in \mathbb{N}$.

Παμε τωρα να δουμε το γενικο προβλημα

Προβλημα Να λυθει το προβλημα Συνοριακων Τιμων



$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$$
$$0<x<L,\ 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=f_1(x),\ 0\le x\le L$$
$$u(x,\pi)=f_2(x),\ 0\le x\le L$$
$$u(0,y)=g_1(y),\ 0\le y\le \pi$$
$$u(L,y)=g_2(y),\ 0\le y\le \pi$$

οπου $f_1, f_2 : [0,L]\to\mathbb{R}$ και $g_1, g_2 : [0,\pi]\to\mathbb{R}$ ομαλες συναρτησεις με $f_1(0)=g_1(0)$, $g_1(\pi)=f_2(0)$, $f_2(L)=g_2(\pi)$ & $g_2(0)=f_1(L)$.

Απαντηση Αυτο που ειναι βολικο ειναι να επιλυσουμε τα ακολουθα 2 προβληματα

(1)
$$v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0$$
$$0<x<L,\ 0<y<\pi$$
$$v(x,0)=f_1(x),\ 0\le x\le L$$
$$v(x,\pi)=f_2(x),\ 0\le x\le L$$
$$v(0,y)=v(L,y)=0,\ 0\le y\le\pi$$

(2)
$$w_{xx}(x,y)+w_{yy}(x,y)=0$$
$$0<x<L,\ 0<y<\pi$$
$$w(x,0)=w(x,\pi)=0,\ 0\le x\le L$$
$$w(0,y)=g_1(y),\ 0\le y\le\pi$$
$$w(L,y)=g_2(y),\ 0\le y\le\pi$$

και τοτε η λυση του αρχικου προβληματος (αρχη υπερθεσης) ειναι $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$, $\begin{matrix}0\le x\le L\\ 0\le y\le\pi.\end{matrix}$

Επίλυση προβλήματος (1)

Εφαρμόζουμε την Αρχή του Fourier και βρίσκουμε λύσεις στη μορφή

$$v(x,y) = A(x)\,B(y), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Τότε προκύπτουν τα προβλήματα:

$$\left(\frac{A''(x)}{A(x)} = - \frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda \right)$$

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0 \qquad 0 < x < L$$
$$A(0) = A(L) = 0$$

$$B''(y) - \lambda B(y) = 0 \quad 0 < y < \pi.$$

Όπως είδαμε οι ιδιοτιμές του πρώτου προβλήματος είναι

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

ιδιοσυναρτήσεις: $A_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \qquad 0 \leq x \leq L, \ n \in \mathbb{N}$

και για το δεύτερο πρόβλημα

$$B''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B(y) = 0$$

με λύσεις $e^{\frac{n\pi}{L}y}$, $e^{-\frac{n\pi}{L}y}$. Προτιμούμε να χρησιμοποιήσουμε

$$\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) = \frac{e^{\frac{n\pi}{L}y} - e^{-\frac{n\pi}{L}y}}{2}, \quad \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) = \frac{e^{\frac{n\pi}{L}y} + e^{-\frac{n\pi}{L}y}}{2}$$

(Θα δούμε σύντομα γιατί)

οπότε προκύπτουν

$$v_n(x,y) = \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

οπότε

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

και οι συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα (1) δίνουν:

$$\left.\begin{array}{l} v(x,0) = f_1(x) \\ v(x,\pi) = f_2(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{array}\right.$$

Όμως όπως επίσης είδαμε

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad , \; n\in\mathbb{N}$$

$$a_n \cosh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \Rightarrow$$

$$\beta_n = \frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)}\int_0^L f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx - \frac{2\cosh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)}{L\sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)}\int_0^L f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

και έτσι βρήκαμε τη λύση του προβλήματος (1).

Για το πρόβλημα (2) ψάχνουμε για την εύρεση λύσεων στη μορφή

$$w(x,y) = \Gamma(x)\Delta(y)$$

Οποτε αν

$$\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{\Delta''(y)}{\Delta(y)} = -\lambda$$

προκυπτουν τα προβληματα

(I) $\quad \Gamma''(x) + \lambda \Gamma(x) = 0, \quad 0 < x < L$

(II) $\begin{cases} \Delta''(y) - \lambda \Delta(y) = 0, \quad 0 < y < \pi \\ \Delta(0) = \Delta(\pi) = 0 \end{cases}$

Επιλυουμε πρωτα το (II)

(Το προβλημα αυτο το εχουμε λυσει με $-\lambda = \mu$) δηλ το προβλημα

$$\Delta''(y) + \mu \Delta(y) = 0 \quad 0 < y < \pi$$
$$\Delta(0) = \Delta(\pi) = 0$$

εχει μονο θετικες ιδιοτιμες μ,

$$-\lambda_n = \mu_n = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$$

ιδιοσυναρτησεις $\quad \Delta_n(y) = \sin(ny)$

και γυριζοντας στο (I)

$$\Gamma''(x) - n^2 \Gamma(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_n(x) = a_n \cosh(nx) + \beta_n \sinh(nx)$$

και επομένως

$$w_n(x,y) = \left(a_n \cosh(nx) + \beta_n \sinh(nx)\right)\sin(ny)$$

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cosh(nx) + \beta_n \sinh(nx)\right)\sin(ny)$$

Συνοριακές συνθήκες της w:

$$\left.\begin{array}{l} w(0,y) = g_1(y) \\ w(L,y) = g_2(y) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g_1(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(ny) \\ g_2(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cosh(nL) + \beta_n \sinh(nL)\right)\sin(ny) \end{array}\right.$$

και επομένως

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_1(y)\sin(ny)\,dy$$

$$a_n \cosh(nL) + \beta_n \sinh(nL) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_2(y)\sin(ny)\,dy$$

$$\Longrightarrow \beta_n = \frac{2}{\pi\sinh(nL)} \cdot \int_0^{\pi} g_2(y)\sin(ny)\,dy - \frac{2\cosh(nL)}{\pi\sinh(nL)}\int_0^{\pi} g_1(y)\sin(ny)\,dy . \quad n\in\mathbb{N}$$

$\boxed{\cdot}$

Το μονοσήμαντο των λύσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ Το Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(t,x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \; t>0$$

Σ.Σ.

$$u(0,t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

$$u(\pi,t) = g_2(t), \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

όπου $f: [0,\infty)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ δοσμένες ομαλές συναρτήσεις, έχει το πολύ μια κλασική λύση.

Αποδ. Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις. Θέτουμε $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, τότε η w ικανοποιεί:

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \; t>0$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$w(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

Επιπρόσθετα δε $w \in C^{2,1}([0,\pi]\times(0,+\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,+\infty))$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx, \quad t>0.$$

Τότε θα έχουμε

$$\sigma'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} w^2(x,t)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi 2w(x,t)\, w_t(x,t)\,dx$$

$$= \int_0^\pi w(x,t)\, w_t(x,t)\,dx$$

Δ.Ε.

$$= \int_0^\pi w(x,t)\quad w_{xx}(x,t)\,dx$$

ολοκλήρωση κατά μέρη

$$= -\int_0^\pi w_x(x,t)\, w_x(x,t)\,dx \;+\; \left(w(x,t)\,w_x(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= -\int_0^\pi w_x^2(x,t)\,dx \;+\; \overset{0}{\overset{\shortparallel}{w(\pi,t)}}\,w_x(\pi,t) - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{w(0,t)}\,w_x(0,t)$$

$$= -\int_0^\pi w_x^2(x,t)\,dx$$

$$\leq 0 \quad , \quad t > 0$$

επομένως $\sigma \downarrow$ και άρα

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx = \sigma(t) \leq \sigma(0) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,0)\,dx}_{\shortparallel \atop 0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx \leq 0 \quad , \; t > 0$$

και επομένως

$$\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx = 0$$

Κανουμε χρηση της επομενης ασκησης

(Εαν $f \in C[0,1]$, $f \geq 0$ και $\int_0^1 f(x)dx = 0$

$\Rightarrow f = 0$).

και επομενως $w(x,t) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $t > 0$

$\Rightarrow$ $w \equiv 0$ στο $[0,\pi] \times [0,+\infty)$, ΑΤΟΠΟ. $\boxed{\cdot}$

<u>Παρατηρηση</u> Τι παριστανει ο ορος

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)dx \quad ?$$

<u>Απαντηση:</u> Θερμικη ενεργεια τη χρονικη στιγμη t.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Το προβλημα Αρχικων - Συνοριακων τιμων

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \ t > 0$$
$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{array}\right. \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

οπου $f : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ δοθεισες ομαλες συναρτησεις, εχει το <u>πολυ μια λυση</u>.

<u>Αποδ.</u> Όπως και πριν υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει δυο διακεκριμένες λύσεις, u_1, u_2 και θέτουμε

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

Τότε η w λύνει την αντίστοιχη ομογενή. Ειδικότερα:

$$\begin{aligned} &w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \ t > 0 \\ &w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ &\left.\begin{aligned} &w(x,0) = 0 \\ &w_t(x,0) = 0 \end{aligned}\right. \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

με $w \in C^{2,2}([0,1] \times (0,+\infty)) \cap C^{0,1}([0,1] \times [0,+\infty))$.

Αυτή τη φορά θέτουμε

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t)\right) dx, \quad t > 0$$

και τότε

$$\sigma'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\pi} \left(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t)\right) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(2 w_t(x,t) w_{tt}(x,t) + 2 w_x(x,t) w_{xt}(x,t)\right) dx$$

$$= \int_0^\pi \left(w_t(x,t)\, w_{tt}(x,t) + w_x(x,t)\, w_{xt}(x,t) \right) dx$$

Δ.Ε.

$$= \int_0^\pi \left[w_t(x,t)\, w_{xx}(x,t) + w_x(x,t)\, w_{xt}(x,t) \right] dx$$

ολοκληρωση κατα μελη

$$= \int_0^\pi \left[- w_{tx}(x,t)\, w_x(x,t) + w_x(x,t)\, w_{xt}(x,t) \right] dx$$

$$+ \left(w_t(x,t)\, w_x(x,t) \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

ομως επειδη $w \in C^{2,2} \Rightarrow w_{xt} = w_{tx}$

$$= w_t(\pi,t)\, w_x(\pi,t) - w_t(0,t)\, w_x(0,t)$$

ομως $w(\pi,t) = 0 \xRightarrow{\text{παραγωγιση}} w_t(\pi,t) = 0$

$w(0,t) = 0 \Rightarrow w_t(0,t) = 0$,

και επομενως

$$\sigma'(t) = 0 \;, \quad t > 0.$$

Τελικα

$$0 \le \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) \right) dx = \sigma(t) = \sigma(0) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(w_t^2(x,0) + w_x^2(x,0) \right) dx.$$

ομως $w(x,0) = 0 \Rightarrow w_x(x,0) = 0$

Οποτε $\sigma(0)=0$

και αρα

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)\right)dx=0$$

$$\Longrightarrow \quad w_t(x,t)=0 \quad (\& \quad w_x(x,t)=0)$$

$$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{}}\qquad \text{ΘΜΤ} \quad \exists\, \xi_t$$

$$w(x,t)-w(x,0)=w_t(x,\xi_t)(t-0)$$

$$=0$$

$$\Longrightarrow w(x,t)\equiv 0 \qquad \underline{\text{ΑΤΟΠΟ}}. \qquad \boxed{\cdot}$$

<u>Παρατηρηση</u> Ο ορος

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} w_t^2(x,t)\,dx$$

ειναι η κινητικη ενεργεια της παλλομενης χορδης, ενω ο ορος

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx$$

ειναι η δυναμικη ενεργεια αυτης.