Διαφορικές Εξισώσεις
Εύρεση γενικής λύσης σε συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Αχιλλέας Τερτίκας

Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

19 Μαρτίου 2020

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Στόχος της Διάλεξης

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Στόχος της Διάλεξης
- Εύρεση γενικής λύσης σε συστήματα γραμμικών Διαφορικων Εξισώσεων

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Στόχος της Διάλεξης
- Εύρεση γενικής λύσης σε συστήματα γραμμικών Διαφορικων Εξισώσεων
- Σύστημα 2 Γραμμικών ΔΕ

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Στόχος της Διάλεξης
- Εύρεση γενικής λύσης σε συστήματα γραμμικών Διαφορικων Εξισώσεων
- Σύστημα 2 Γραμμικών ΔΕ

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= ax(t) + by(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
y'(t) &= cx(t) + dy(t), \quad t \in \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

- Σύστημα 3 Γραμμικών ΔΕ

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= ax(t) + by(t) + cz(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
y'(t) &= dx(t) + ey(t) + fz(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
z'(t) &= kx(t) + ly(t) + mz(t), \quad t \in \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Παρόμοια της άσκησης 7 *φυλλαδίου* 5.
Βρείτε όλες (με απόδειξη) τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *για τις οποίες έχουμε*

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ g'(t) &= f(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Σχόλια

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Παρόμοια της άσκησης 7 *φυλλαδίου* 5.
Βρείτε όλες (με απόδειξη) τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *για τις οποίες έχουμε*

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ g'(t) &= f(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Σχόλια
- Λύση

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Παρόμοια της άσκησης 7 *φυλλαδίου* 5.
Βρείτε όλες (με απόδειξη) τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *για τις οποίες έχουμε*

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ g'(t) &= f(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Σχόλια
- Λύση
- Αρχικές Παρατηρήσεις

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Παρόμοια της άσκησης 7 *φυλλαδίου* 5.
Βρείτε όλες (με απόδειξη) τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *για τις οποίες έχουμε*

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ g'(t) &= f(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Σχόλια
- Λύση
- Αρχικές Παρατηρήσεις
- Οι συναρτήσεις f, g είναι 2 φορές παραγωγίσιμες (γιατί ;)

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Παρόμοια της άσκησης 7 *φυλλαδίου* 5.
Βρείτε όλες (με απόδειξη) τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *για τις οποίες έχουμε*

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ g'(t) &= f(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Σχόλια
- Λύση
- Αρχικές Παρατηρήσεις
- Οι συναρτήσεις f, g είναι 2 φορές παραγωγίσιμες (γιατί ;)
- και επιπρόσθετα

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- $$f''(t) = g'(t) = f(t) \implies f''(t) - f(t) = 0 \quad t \in \mathbf{R}.$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- $$f''(t) = g'(t) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad f''(t) - f(t) = 0 \quad t \in \mathbf{R}.$$
- Παρόμοια
$$g''(t) = f'(t) = g(t) \quad \Longrightarrow \quad g''(t) - g(t) = 0 \quad t \in \mathbf{R}.$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- $$f''(t) = g'(t) = f(t) \implies f''(t) - f(t) = 0 \quad t \in \mathbf{R}.$$
- Παρόμοια
$$g''(t) = f'(t) = g(t) \implies g''(t) - g(t) = 0 \quad t \in \mathbf{R}.$$
- Έχουμε λοιπόν ότι οι f, g λύνουν την ίδια ΔΕ

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- $$f''(t) = g'(t) = f(t) \implies f''(t) - f(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$
- Παρόμοια

$$g''(t) = f'(t) = g(t) \implies g''(t) - g(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Έχουμε λοιπόν ότι οι f, g λύνουν την ίδια ΔΕ
- Η ΔΕ εγραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές, οπότε Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- $$f''(t) = g'(t) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad f''(t) - f(t) = 0 \;\; t \in \mathbf{R}.$$
- Παρόμοια
$$g''(t) = f'(t) = g(t) \quad \Longrightarrow \quad g''(t) - g(t) = 0 \;\; t \in \mathbf{R}.$$
- Έχουμε λοιπόν ότι οι f, g λύνουν την ίδια ΔΕ
- Η ΔΕ εγραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές, οπότε Χαρακτηριστική εξίσωση
$$\lambda^2 - 1 = 0,$$
- οπότε υπάρχουν σταθερές ώστε
$$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \;\; g(t) = c_3 e^t + c_4 e^{-t} \;\; t \in \mathbf{R}.$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Όμως
$$f'(t) = g(t),\ g'(t) = f(t),$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Όμως
$$f'(t) = g(t),\ g'(t) = f(t),$$
- Οπότε
$$c_1 e^t - c_2 e^{-t} = c_3 e^t + c_4 e^{-t} \quad t \in \mathbf{R}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Όμως

$$f'(t) = g(t), \ g'(t) = f(t),$$

- Οπότε

$$c_1 e^t - c_2 e^{-t} = c_3 e^t + c_4 e^{-t} \quad t \in \mathbf{R}$$

- Λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των e^t, e^{-t} προκύπτει

$$c_3 = c_1 \quad c_4 = -c_2$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Όμως

$$f'(t) = g(t),\ g'(t) = f(t),$$

- Οπότε

$$c_1 e^t - c_2 e^{-t} = c_3 e^t + c_4 e^{-t} \quad t \in \mathbf{R}$$

- Λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των e^t, e^{-t} προκύπτει

$$c_3 = c_1 \quad c_4 = -c_2$$

- Έτσι λοιπόν

$$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t},\quad g(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

- 1. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

- 1. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2
- 2. Δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι στη μορφή $\vec{a}e^{\lambda t}$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

- 1. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2
- 2. Δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι στη μορφή $\vec{a}e^{\lambda t}$
- Έτσι λοιπόν τίθενται τα ερωτήματα:

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

- 1. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2
- 2. Δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι στη μορφή $\vec{a} e^{\lambda t}$
- Έτσι λοιπόν τίθενται τα ερωτήματα:
- Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2 σε ένα γραμμικό σύστημα ΔΕ ;

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

- 1. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2
- 2. Δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι στη μορφή $\vec{a}e^{\lambda t}$
- Έτσι λοιπόν τίθενται τα ερωτήματα:
- Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2 σε ένα γραμμικό σύστημα ΔΕ ;
- Υπάρχουν πάντοτε λύσεις στη μορφή $\vec{a}e^{\lambda t}$;

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Επομένως

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Παρατηρήσεις

- 1. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2
- 2. Δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι στη μορφή $\vec{a}e^{\lambda t}$
- Έτσι λοιπόν τίθενται τα ερωτήματα:
- Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι 2 σε ένα γραμμικό σύστημα ΔΕ ;
- Υπάρχουν πάντοτε λύσεις στη μορφή $\vec{a}e^{\lambda t}$;
- Η απάντηση στα τα ερωτήματα είναι ΝΑΙ!

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Το πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Θεώρημα

Έστω $f, g, p, q \in C(\mathbf{R})$. *Τότε το ΠΑΤ*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(t)x(t) + g(t)y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
y'(t) &= p(t)x(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
& \quad x(t_0) = c_1, \quad y(t_0) = c_2
\end{aligned}
$$

έχει λύση και είναι ακριβώς μία λύση.

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Το πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Θεώρημα

Έστω $f, g, p, q \in C(\mathbf{R})$. *Τότε το ΠΑΤ*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(t)x(t) + g(t)y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
y'(t) &= p(t)x(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\
&\quad x(t_0) = c_1, \quad y(t_0) = c_2
\end{aligned}
$$

έχει λύση και είναι ακριβώς μία λύση.

- Επιπτώσεις

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Το πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Θεώρημα

Έστω $f, g, p, q \in C(\mathbf{R})$. *Τότε το ΠΑΤ*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t)x(t) + g(t)y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= p(t)x(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ & x(t_0) = c_1, \quad y(t_0) = c_2 \end{aligned}$$

έχει λύση και είναι ακριβώς μία λύση.

- Επιπτώσεις
- Υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος ΔΕ , ΧΩΡΙΣ Αρχικές Συνθήκες

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= 4x(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

- Λύση Γράφουμε το σύστημα σε διανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

Πρόβλημα

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= 4x(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

- Λύση Γράφουμε το σύστημα σε διανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

- Ψάχνουμε λύση στη μορφή

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Οπότε

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Οπότε

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

- Με αντικατάσταση στο σύστημα προκύπτει

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Οπότε

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

- Με αντικατάσταση στο σύστημα προκύπτει

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

- και επομένως πρέπει

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Οπότε
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$
- Με αντικατάσταση στο σύστημα προκύπτει
$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$
- και επομένως πρέπει
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$
- και από τη γραμμική προκύπτει ότι

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- λ ιδιοτιμή και

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ιδιοδιάνυσμα που αντιστεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- λ ιδιοτιμή και

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ιδιοδιάνυσμα που αντιστεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Εύρεση ιδιοτιμών

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(1+\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- λ ιδιοτιμή και

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ιδιοδιάνυσμα που αντιστεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Εύρεση ιδιοτιμών

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(1+\lambda)(3-\lambda) = 0$$

- Ιδιοτιμές

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 3.$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = -1$

$$\left[\begin{array}{rcr} a+b & = & -a \\ 4a+b & = & -b \end{array}\right] \Leftrightarrow b = -2a$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = -1$

$$\left[\begin{array}{rcr} a+b & = & -a \\ 4a+b & = & -b \end{array}\right] \Leftrightarrow b = -2a$$

- ένα ιδιοδιάνυσμα

$$\left[\begin{array}{r} 1 \\ -2 \end{array}\right]$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = -1$

$$\left[\begin{array}{rcr} a+b & = & -a \\ 4a+b & = & -b \end{array}\right] \Leftrightarrow b = -2a$$

- ένα ιδιοδιάνυσμα

$$\left[\begin{array}{r} 1 \\ -2 \end{array}\right]$$

- Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = 3$

$$\left[\begin{array}{rcr} a+b & = & 3a \\ 4a+b & = & 3b \end{array}\right] \Leftrightarrow b = 2a$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} a+b & = & -a \\ 4a+b & = & -b \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = -2a$$

- ένα ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} a+b & = & 3a \\ 4a+b & = & 3b \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = 2a$$

- ένα ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Γενική λύση του συστήματος ΔΕ υπάρχουν $c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}$ ώστε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Συστήματα Διαφορικων Εξισώσεων

- Γενική λύση του συστήματος ΔΕ υπάρχουν $c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}$ ώστε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, \\ y(t) &= -2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t}. \end{aligned}$$