ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

23-4-2020

Η μεθοδος ενεργειας και το μονοσημαντο λυσεων

Εναλλακτικος τροπος κατασκευης της βοηθητικης συναρτησης

Οπως ειδαμε το μονοσημαντο των λυσεων του

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0<x\leq\pi, \ t>0$$
$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$\qquad t\geq 0$$
$$u(\pi,t) = g_2(t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\leq x\leq\pi$$

αναγεται στην αποδειξη του:

Αν $w \in C^{2,1}([0,\pi]\times(0,+\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,+\infty))$ ικανοποιει

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t), \quad 0\leq x\leq\pi, \ t>0$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t\geq 0$$

$$w(x,0) = 0, \quad 0\leq x\leq\pi$$

Τοτε $w\equiv 0$ στο $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

Το ερωτημα που τιθεται ειναι πως καποιος θα μπορουσε να εισαγει καταλληλη βοηθητικη συναρτηση απ' όπου θα προέκυπτε το ζητούμενο.

Ένας τρόπος για να οδηγηθούμε στην κατασκευή είναι να πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) \qquad (1)$$

με $w(x,t)$ και να ολοκληρώσουμε στο διάστημα $[0,\pi]$, δηλ.

$$\int_0^\pi w(x,t)\, w_t(x,t)\, dx = \int_0^\pi w(x,t)\, w_{xx}(x,t)\, dx$$

Όμως έχουμε

$$\int_0^\pi w(x,t)\, w_t(x,t)\, dx = \frac{d}{dt}\, \frac{1}{2} \int_0^\pi w^2(x,t)\, dx$$

και

$$\int_0^\pi w(x,t)\, w_{xx}(x,t)\, dx \overset{\text{ολοκλήρωση κατά μέλη}}{=} -\int_0^\pi w_x^2(x,t)\, dt + \Big(w(x,t)\, w_x(x,t)\Big)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= -\int_0^\pi w_x^2(x,t)\, dx + w(\pi,t)\, w_x(\pi,t) - w(0,t)\, w_x(0,t)$$

$$= - \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\,dx$$

μιας και $w(\pi,t) = w(0,t) = 0, \quad t \geq 0,$

και τελικα

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx \leq 0$$

$$\forall t>0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi} w^2(x,t)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi} w^2(x,0)\,dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad w(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

Παρομοια μπορει καποιος να αποδειξει το ζητουμενο αν πολλαπλασιασει της (1) με

$$|w(x,t)|^{\sigma} w(x,t)$$

και $\sigma > 0$ (γιατι ;)

$\boxdot$

Παμε τωρα να δουμε ποιο ηταν το οφελος της διαδικασιας αυτης ;

Ενα πρωτο οφελος ηταν οτι δεν υπηρχε αναγκη κατανοησης φυσικης.

Θα δουμε και αλλα οφελη λιγο αργοτερα.

Επιστρεφουμε στο μονοσημαντο του προβληματος:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \ t > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{array}\right., \quad t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array}\right., \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Οπως επισης ειδαμε το μονοσημαντο προκυπτει αν αποδειξουμε οτι αν

$w \in C^{2,2}([0,1] \times (0,+\infty)) \cap C^{0,1}([0,1] \times [0,+\infty))$ λυση του

$$w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \end{array}\right., \quad 0 \leq x \leq 1$$

Τοτε $w(x,t) \equiv 0$ στο $[0,1] \times [0,+\infty)$.

Αυτη τη φορα πολλαπλασιαζουμε την

$$w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t)$$

με $\quad w_t(x,t)$

και ολοκληρωνουμε στο $[0,1]$ και παιρνουμε:

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{tt}(x,t)\,dx = \int_0^1 w_t(x,t)\, w_{xx}(x,t)\,dx .$$

Ομως

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{tt}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\ \frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)\,dx$$

και

$$\int_0^1 w_t(x,t)\, w_{xx}(x,t)\,dx = -\int_0^1 w_{tx}(x,t)\, w_x(x,t)\,dx$$

$$+ \left(w_t(x,t)\, w_x(x,t) \right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= -\frac{d}{dt}\ \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx \qquad (\text{γιατι;})$$

Οποτε εχουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)dx = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx\right\} = 0 \qquad t>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,0)dx}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,0)dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow w_t^2(x,t) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$w(x,t) = w(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow w(x,t) \equiv 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0.$$

$\boxed{\cdot}$

Υπο το νεο προισμα παμε στο

ΘΕΩΡΗΜΑ Το Προβλημα Αρχικων-Συνοριακων τιμων

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

$$u(1,t) + u_x(1,t) = g_2(t), \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

οπου $f: [0,\pi] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\varphi: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ δοθεισες ομαλες ~~συνθηκες~~ συναρτησεις,

εχει το πολυ μια κλασικη λυση.

Αποδ. Εστω u_1, u_2 δυο διακεκριμενες λυσεις.

Θετουμε $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, τοτε

η w ικανοποιει:

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \ t > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} w(0,t) = 0 \\ w(\pi,t) + w_x(\pi,t) = 0 \end{array}\right., \quad t \geq 0$$

$$w(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t)$$

με $w(x,t)$ και ολοκληρώνουμε στο $[0,\pi]$

$$\Rightarrow \int_0^\pi w(x,t)\, w_t(x,t)\, dx = \int_0^\pi w(x,t)\, w_{xx}(x,t)\, dx$$

Όμως

$$\int_0^\pi w(x,t)\, w_t(x,t)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi w^2(x,t)\, dx$$

και

$$\int_0^\pi w(x,t)\, w_{xx}(x,t)\, dx = -\int_0^\pi w_x^2(x,t)\, dx$$

$$+ \left(w(x,t)\, w_x(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= -\int_0^\pi w_x^2(x,t)\, dx$$

$$\underbrace{+\, w(\pi,t)\, w_x(\pi,t)}_{= -w^2(\pi,t)} - \underbrace{w(0,t)\, w_x(0,t)}_{=0}$$

Επομένως

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx = \underbrace{-\int_0^\pi w_x^2(x,t)\,dx \;-w^2(\pi,t)}_{\leq 0}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx \leq \underset{\substack{\| \\ 0}}{\frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,0)\,dx}$$

$$\Longrightarrow \quad w(x,t) = 0\,,\quad 0 \leq x \leq \pi\,,\ t \geq 0$$

$\Longrightarrow$ ΑΤΟΠΟ

Επίσης

ΘΕΩΡΗΜΑ Το πρόβλημα Poisson

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y) \qquad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \ell \end{matrix}$$

$$u(x,0) = f_1(x)\,,\quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x,\ell) = f_2(x)\,,\quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,y) = f_3(y)\,,\quad 0 \leq y \leq \ell$$

$$u(1,y) = f_4(y)\,,\quad 0 \leq y \leq \ell$$

όπου $f: [0,1]\times[0,\ell] \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $f_3, f_4 : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις, έχει το πολύ <u>μια κλασική λύση.</u>

<u>Αποδ.</u> Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις και θέτουμε $w(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$

$$0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le \ell .$$

Τότε η w λύνει το πρόβλημα:

$$w_{xx}(x,y) + w_{yy}(x,y) = 0 \, , \, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \ell$$

$$w(x,0) = w(x,\ell) = 0 \, , \, 0 \le x \le 1$$

$$w(0,y) = w(1,y) = 0 \, , \, 0 \le y \le \ell .$$

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε με $w(x,y)$ και ολοκληρώνουμε στο $[0,1]\times[0,\ell]$ και παίρνουμε

$$\int_0^1 \int_0^\ell w(x,y)\left(w_{xx}(x,y) + w_{yy}(x,y)\right) dy\, dx = 0$$

Όμως:

ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int_0^1 w(x,y)\, w_{xx}(x,y)\, dx =$$

$$-\int_0^1 w_x^2(x,y)\, dx + \left(w(x,y)\, w_x(x,y)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= -\int_0^1 w_x^2(x,y)\, dx + w(1,y)\, \cancel{w_x(1,y)}^{\,0} - w(0,y)\, \cancel{w_x(0,y)}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 w(x,y)\, w_{xx}(x,y)\, dx = -\int_0^1 w_x^2(x,y)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^\ell w(x,y)\, w_{xx}(x,y)\, dy\, dx = -\int_0^1 \int_0^\ell w_x^2(x,y)\, dy\, dx$$

Παρόμοια έχουμε:

$$\int_0^\ell w(x,y)\, w_{yy}(x,y)\, dy = -\int_0^\ell w_y^2(x,y)\, dy$$

$$+ \left(w(x,y)\, w_y(x,y)\right)\Big|_{y=0}^{y=\ell}$$

$$= -\int_0^\ell w_y^2(x,y)\, dy + w(x,\ell)\, \cancel{w_y(x,\ell)}^{\,0} - \cancel{w(x,0)}\, w_y(x,0)$$

$$= -\int_0^\ell w_y^2(x,y)\, dy$$

Επομένως

$$\int_0^{\ell} w(x,y)\, w_{yy}(x,y)\, dy = -\int_0^{\ell} w_y^2(x,y)\, dy$$

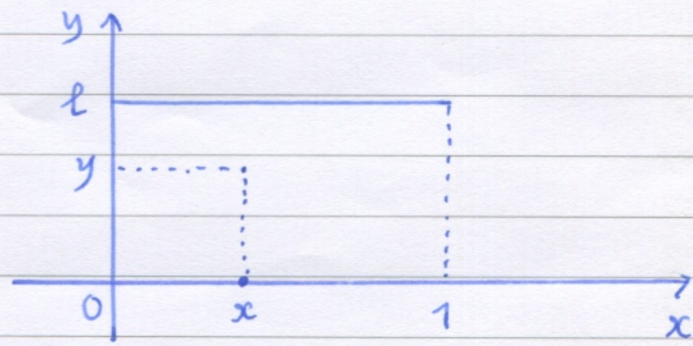
$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 \int_0^{\ell} w(x,y)\, w_{yy}(x,y)\, dy\, dx = -\int_0^1 \int_0^{\ell} w_y^2(x,y)\, dy\, dx$$

και τελικά προκύπτει ότι:

$$-\int_0^1 \int_0^{\ell} \left(w_x^2(x,y) + w_y^2(x,y) \right) dy\, dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad w_x(x,y) \equiv 0 \quad \& \quad w_y(x,y) \equiv 0 \quad , 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \ell .$$



Ομως από ΘΜΤ

$$\exists\ \xi \in (0,y)$$

$$w(x,y) - w(x,0) = (y-0)\, w_y(x,\xi)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow w(x,y) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq \ell.$

ΑΤΟΠΟ $\boxed{\cdot}$

Σειρες Fourier

a) Γενικες Ιδιοτητες

Εστω οι ομαλες συναρτησεις $\psi_k : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

(π.χ. $\psi_k \in C[a,\beta]$)

οι ψ_k ειναι ενα ορθογωνιο συστημα

(ειναι ορθογωνιες)

αν

$$\int_a^\beta \psi_k(x)\, \psi_\ell(x)\, dx = 0, \quad \forall \; k \neq \ell$$

Ποιο ειναι το πλεονεκτημα των ορθογωνιων συστηματων ;

Απαντηση: Αν

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \psi_k(x)$$

και η σύγκλιση ειναι ομοιομορφη, τοτε

ΕΧΟΥΜΕ:

$$c_m \int_a^\beta \psi_m^2(x)dx = \int_a^\beta f(x)\psi_m(x)dx, \quad \forall\, m\in\mathbb{N}$$

ΟΠΟΤΕ

$$c_m = \frac{1}{\int_a^\beta \psi_m^2(x)dx} \cdot \int_a^\beta f(x)\psi_m(x)dx \quad \forall\, m\in\mathbb{N}$$

Συναντάμε ορθογώνια συστήματα; ΝΑΙ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $P, Q : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις και λ ιδιοτιμή, φ ιδιοσυνάρτηση (αντίστοιχα μ ιδιοτιμή, ψ ιδιοσυνάρτηση) του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = \lambda\, y(x), \quad a\leq x\leq \beta$$

όπου είτε (α) $y(a)=y(\beta)$ & $y'(a)=y'(\beta)$

είτε

(β) $c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0$

$c_3 y(\beta) + c_4 y'(\beta) = 0$,

~~$c_i \geq 0$~~ , $i = 1,2,3,4$

$|c_1| + |c_2| > 0$

$|c_3| + |c_4| > 0$.

Εαν $\lambda \neq \mu$, τοτε φ, ψ ορθογωνιες, δηλ.

$$\int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

Αποδ Θα κανουμε την αποδειξη στην περιπτωση $c_2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$.

Αρχικα εχουμε

$$(P(x)\varphi'(x))' + Q(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

πολλαπλασιαζουμε με $\psi(x)$ και ολοκληρωνουμε και παιρνουμε:

$$\int_a^\beta \psi(x)(P(x)\varphi'(x))'dx + \int_a^\beta Q(x)\psi(x)\varphi(x)dx = \lambda\int_a^\beta \psi(x)\varphi(x)dx$$

Ομως:

$$\int_a^\beta \psi(x)\,(P(x)\varphi'(x))'dx = -\int_a^\beta \psi'(x)P(x)\varphi'(x)dx$$

$$+ \left(P(x)\psi(x)\varphi'(x)\right)\Big|_{x=a}^{x=\beta}$$

$$= -\int_a^\beta P(x)\psi'(x)\varphi'(x)dx$$

$$+ P(\beta)\psi(\beta)\varphi'(\beta) - P(a)\psi(a)\varphi'(a).$$

Επομενως προκυπτει:

$$-\int_a^\beta P(x)\varphi'(x)\psi'(x)dx + P(\beta)\psi(\beta)\varphi'(\beta) - P(a)\psi(a)\varphi'(a)$$
$$+ \int_a^\beta Q(x)\varphi(x)\psi(x)dx = \lambda\int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx \quad (1)$$

Παρομοια εχουμε:

$$(P(x)\psi'(x))' + Q(x)\psi(x) = \mu\,\psi(x)$$

πολλαπλασιαζουμε με $\varphi(x)$ και ολοκληρωνουμε στο $[a,\beta]$ και προκυπτει

$$\int_a^\beta \varphi(x)\,\big(P(x)\psi'(x)\big)'dx + \int_a^\beta Q(x)\varphi(x)\psi(x)dx = \mu \int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)$$

$$-\int_a^\beta P(x)\psi'(x)\varphi'(x)dx + P(\beta)\varphi(\beta)\psi'(\beta) - P(a)\varphi(a)\psi'(a)$$

$$+\int_a^\beta Q(x)\varphi(x)\psi(x)dx = \mu\int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx \quad (2)$$

Με αφαιρεση των (1), (2) προκυπτει οτι:

$$(*)\quad \begin{array}{l} P(\beta)\big(\psi(\beta)\varphi'(\beta)-\varphi(\beta)\psi'(\beta)\big) \\ + P(a)\big(\varphi(a)\psi'(a)-\psi(a)\varphi'(a)\big) \end{array} = (\lambda-\mu)\int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Ομως $c_2 \neq 0 \Rightarrow \varphi'(a) = -\frac{c_1}{c_2}\varphi(a)$

$$\psi'(a) = -\frac{c_1}{c_2}\psi(a)$$

οποτε $P(a)\big(\varphi(a)\psi'(a)-\psi(a)\varphi'(a)\big) =$

$$= P(a)\left(-\frac{c_1}{c_2}\varphi(a)\psi(a) + \frac{c_1}{c_2}\psi(a)\varphi(a)\right) = 0$$

Παρομοια προκυπτει $P(\beta)\big(\psi(\beta)\varphi'(\beta)-\varphi(\beta)\psi'(\beta)\big)=0$

και τελικα η $(*)$ δινει:

$$0 = (\lambda-\mu)\int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx$$

και επειδη $\lambda-\mu\neq 0$

$$\int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

$\boxed{\cdot}$

Εφαρμογη Οι συναρτησεις ($\ell>0$)

$$1,\ \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),\ \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ n\in\mathbb{N}$$

ειναι ενα ορθογωνιο συστημα συναρτησεων στο $[-\ell,\ell]$ η στο $[0,2\ell]$

(γιατι;)