# Δ. Ε.

# ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

24 - 3 - 2020

Α. ΤΕΡΤΙΚΑΣ

---

Παραδειγμα 1 Να βρεθει η γενικη λυση του συστηματος

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) + z(t) \\ y'(t) &= x(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

Λυση:

Συστημα στη διανυσματικη μορφη

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

- Υπενθυμιση διαστασης χωρου λυσεων
- Ευρεση λυσεων στη μορφη $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

Τοτε $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}' = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

Οποτε πρεπει

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

αρα $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Επομενως λ πρεπει να ειναι <u>ιδιοτιμη</u> του πινακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ <u>ιδιοδιανυσμα</u> που αντιστοιχει στην ιδιοτιμη λ.

- Ευρεση Ιδιοτιμων του πινακα A.
  Χαρακτηριστικη Εξισωση

$$\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

· (Ιδιοτητες Οριζουσων)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & -\lambda-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$-(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$. (Αλγεβρικη πολλαπλοτητα ιδιοτιμων)

· $\lambda = 2$ απλη ιδιοτιμη.
·· $\lambda = -1$ διπλη ιδιοτιμη (ιδιοτιμη πολλαπλοτητας 2)

· Ευρεση Ιδιοδιανυσματων

· $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \beta+\gamma = 2\alpha \\ \alpha+\gamma = 2\beta \\ \alpha+\beta = 2\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta = 2\alpha-\gamma \\ \alpha+\gamma = 2(2\alpha-\gamma) \\ \alpha+2\alpha-\gamma = 2\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta = 2\alpha-\gamma \\ \gamma = \alpha \\ \gamma = \alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta = \alpha \\ \gamma = \alpha \end{bmatrix}.$$

Οπότε το $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$.

(Απλή ιδιοτιμή, Ιδιόχωρος έχει διάσταση 1 επίσης).

- Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων για την ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \beta+\gamma = -\alpha \\ \alpha+\gamma = -\beta \\ \alpha+\beta = -\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma = -(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Επομένως ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ -a-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

προκύπτουν τα:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα; ΝΑΙ διότι

αν

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ -\lambda-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \mu = 0.$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

είναι μια βάση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί

στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$. (Γεωμετρική διάσταση 2)

(Γεωμετρική διάσταση ιδιοτιμής := 

Διάσταση ιδιοχώρου).

Λυσεις της διανυσματικης Δ.Ε.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$$

Γενικη λυση

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$$

$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$, $y(t) = c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t}$, $z(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - c_3 e^{-t}$

( Γιατι δουλεψε η μεθοδος ;

Η διασταση του χωρου των λυσεων 3

Βρηκαμε 3 γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις )

Η μεθοδος θα δουλευει ακριβως με τον ιδιο τροπο αν ο πινακας $A$ ειναι διαγωνοποιησιμος, δηλ. Αλγεβρικη πολλαπλοτητα καθε ιδιοτιμης = Γεωμετρικη πολλαπλοτητα.

$\Leftrightarrow$ Οταν για καθε ιδιοτιμη μπορουμε να

βρουμε γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα
οσα ειναι η πολλαπλοτητα της ιδιοτιμης
στην <u>χαρακτηριστη εξισωση</u>.

<u>Παραδειγμα 2</u> (Καθαρα μιγαδικες ιδιοτιμες)

Να βρεθει η γενικη λυση του συστηματος:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - y(t) \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

<u>Λυση</u>: Σε διανυσματικη μορφη:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

- Διασταση χωρου λυσεων ;

.. Ευρεση λυσεων στη μορφη

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

οποτε

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Η Δ.Ε γίνεται:

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda-1 & 2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 + 2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1-2i \\ \lambda = -1+2i \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές είναι καθαρά μιγαδικοί αριθμοί.

Θα προσδιορίσουμε ιδιοδιανύσματα με συντελεστές στο $\mathbb{C}$ (αρχικά).

Οπότε στην ιδιοτιμή $\lambda = -1-2i$, έχουμε

$$\begin{pmatrix} -\lambda-1 & 2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 2ai + 2\beta = 0 \\ -2a + 2i\beta = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \beta = -ai \\ \phantom{0} \end{array} \right] \quad (\text{γιατί;})$$

Ιδιοδιανυσμα $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -ai \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Μιγαδικη λυση

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1-2i)t}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} \cdot e^{-2ti}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos(-2t) + i\sin(-2t))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos(2t) - i\sin(2t))$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t - i\sin 2t \\ -\sin 2t - i\cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t} - i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Παρομοια στην ιδιοτιμη $\lambda = -1+2i$ εχουμε

$$\begin{pmatrix} -\lambda-1 & 2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2ai + 2\beta = 0 \\ -2a - 2\beta i = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\beta = ai]$$

Ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Μιγαδική λύση

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+2i)t}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos 2t + i \sin 2t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -\sin 2t + i \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Όπως και στις γραμμικές Δ.Ε. έχουμε πραγματικές λύσεις του συστήματος (πραγματικό, φανταστικό μέρος)

$$\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Γενική λύση: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$x(t) = c_1 \cos 2t\, e^{-t} + c_2 \sin 2t\, e^{-t}$, $y(t) = -c_1 \sin 2t\, e^{-t} + c_2 \cos 2t\, e^{-t}$.

Τι γίνεται αν ο πινακας δεν ειναι διαγωνοποιησιμος; (Δεν μπορουμε να βρουμε αρκετα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα).

Μεθοδος γενικευμενων ιδιοδιανυσματων

Παραδειγμα 3 Να βρεθει η γενικη λυση του συστηματος:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Λυση: Διασταση χωρου λυσεων: 2

ψαχνουμε αρχικα λυση στη μορφη

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

προκυπτει:

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2=0.$$

Ιδιοτιμες: $\lambda=2$ διπλη.

Ιδιοδιανυσματα:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\alpha-\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\beta=-\alpha].$$

Οποτε

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βρισκουμε οτι ο ιδιοχωρος εχει διασταση 1!

(Αλγεβρικη πολλαπλοτητα ιδιοτιμης 2

Γεωμετρικη πολλαπλοτητα ιδιοτιμης 1).

Και επομενως εχουμε μονο μια λυση

την $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$.

Πρεπει να βρουμε και μια δευτερη

γραμμικα ανεξαρτητη λυση.

Τι κανουμε ;

??? ?

Ας κανουμε καποιες σκεψεις.

Πως αντιμετωπισαμε την περιπτωση των εξισωσεων ;

Παραδειγμα: Να βρεθει η γενικη λυση της Δ.Ε.

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Λυση: ψαχνοντας για λυση στη μορφη $y(t) = e^{\lambda t}$, προκυπτει η

Χαρακτηριστικη εξισωση $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0.$

Οποτε μια λυση ειναι η $e^{-t}$.

Τι κανανε για να βρουμε μια δευτερη γραμμικα ανεξαρτητη λυση ?

Εγινε με αντικατασταση

$$y(t) = e^{-t} z(t) \Rightarrow$$

$$y'(t) = e^{-t} z'(t) - e^{-t} z(t), \quad y''(t) = e^{-t} z''(t) - 2e^{-t} z'(t) + e^{-t} z(t)$$

και η Δ.Ε γράφεται:

$$e^{-t}z''(t) - 2e^{-t}z'(t) + e^{-t}z(t) + 2\left(e^{-t}z'(t) - e^{-t}z(t)\right)$$
$$+ e^{-t}z(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z''(t) = 0 \Leftrightarrow z(t) = c_1 + c_2 t.$$

Οπότε γυρίζοντας πίσω προκύπτει:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$
$$= \underline{c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}}. \quad (*)$$

(ΤΕΛΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ)

Μήπως μπορούμε να αξιοποιήσουμε την εμπειρία που αποκτήσαμε στο πρόβλημα μας; (Πάντοτε δοκιμάζουμε, μπορεί να αποτύχουμε αλλά δεν πειράζει ΜΑΘΑΙΝΟΥΜΕ).

Ποιο είναι το ανάλογο της (*) στην περίπτωση μας?

Δοκιμάζουμε να βρούμε λύση στη μορφή

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{u}e^{2t} + \vec{v}te^{2t} \ ? \quad (**)$$

όπου $\vec{u}, \vec{v}$ κατάλληλα διανύσματα.

Τότε $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = 2\vec{u}e^{2t} + \vec{v}e^{2t} + 2\vec{v}te^{2t}$

και άρα πρέπει:

$$2\vec{u}e^{2t} + \vec{v}e^{2t} + 2\vec{v}te^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\vec{u}e^{2t} + \vec{v}te^{2t})$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{u} + \vec{v} + 2t\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{u} + t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{v}$$

Η σχέση πρέπει να ισχύει $\forall\, t \in \mathbb{R}$ και άρα πρέπει:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{u} = 2\vec{u} + \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{v} = 2\vec{v} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2I_2\right)\vec{v} = \vec{0} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{v}. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{v}. \end{array}\right.$$

• $\vec{v}$ ιδιοδιανυσμα (της ιδιοτιμης $\lambda = 2$).

Οποτε μπορουμε να επιλεξουμε

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.. $\vec{u}$ ειναι <u>γενικευμενο</u> ιδιοδιανυσμα (ΔΕΝ ειναι ιδιοδιανυσμα)

διοτι:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \vec{u} = \vec{0}$$

Ευρεση του γενικευμενου ιδιοδιανυσματος. Εστω $\vec{u} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\gamma - \delta = 1 \\ \gamma + \delta = -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \delta = -1 - \gamma \right],$$ Οποτε:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -1-\gamma \end{pmatrix}.$$

Το πιο απλο γενικευμενο ιδιοδιανυσμα ($\gamma = 0$)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και επομένως μια δεύτερη λύση είναι η

$$\vec{u}\, e^{2t} + \vec{v}\, t e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix} e^{2t},$$

Γενική λύση : $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$