ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

26-3-2020

Εισαγωγη στις Μερικες Διαφορικες Εξισωσεις (ΜΔΕ)

· Τι ειναι οι Μερικες Διαφορικες Εξισωσεις ;

Διαφορικες εξισωσεις που εμφανιζονται οι μερικες παραγωγοι.

Παραδειγμα : Η Δ.Ε.

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R}$$

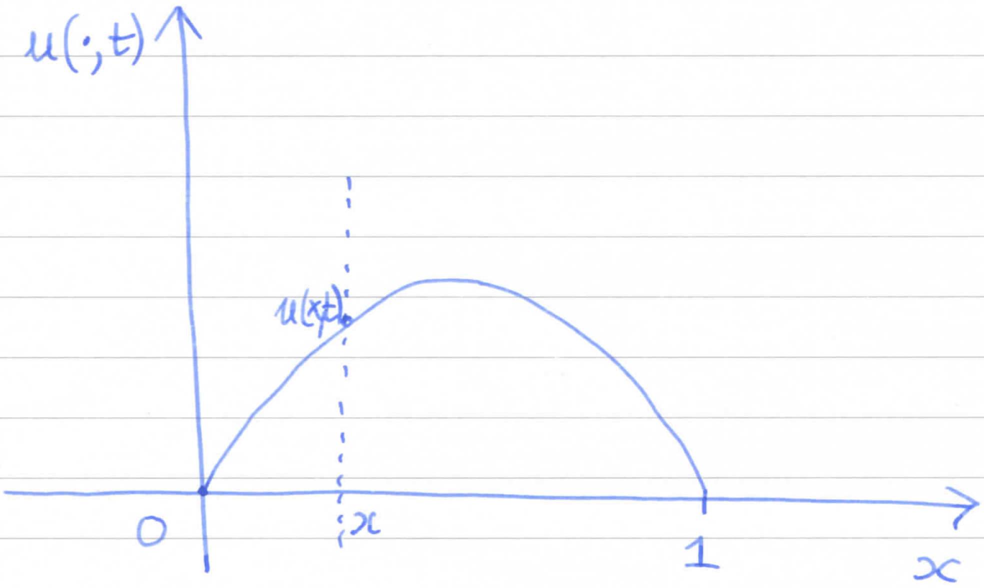
ειναι γραμμικη διαφορικη εξισωση με μερικες παραγωγους.

·· Που εμφανιζονται ΜΔΕ ;

Στη μοντελοποιηση προβληματων εφαρμογων.

Παραδειγμα Να βρεθει η εξισωση κινησης παλλομενης χορδης.

Υποθετουμε τη χορδη σαν ενα μονοδιαστατο αντικειμενο (Η χορδη εχει σταθερη διατομη)



Θεωρουμε το επιπεδο κινησης της χορδης

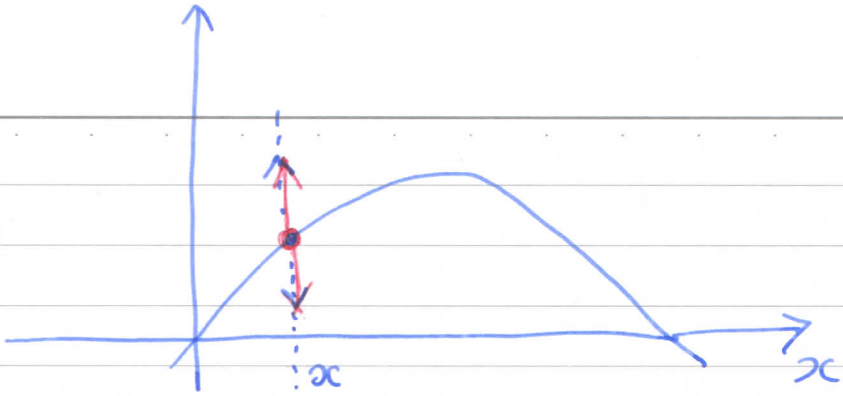
Η χορδη εχει αρχικο μηκος 1.

$u(x,t) :=$ η θεση της χορδης στη θεση x, τη χρονικη στιγμη t.

Βασικες Υποθεσεις (φυσικη)

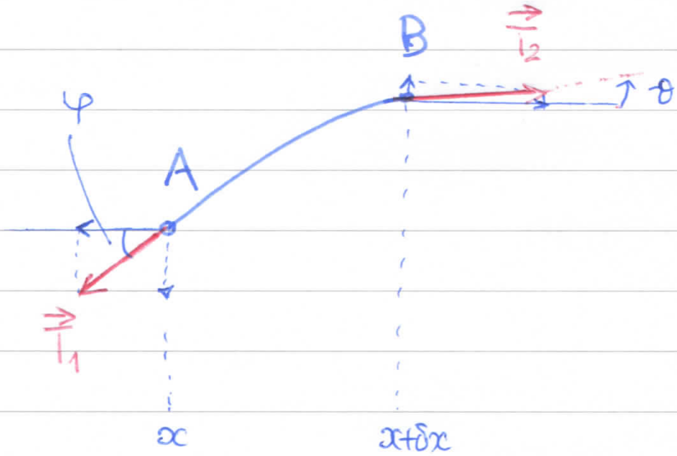
- Η χορδη εχει σταθερη διατομη και αποτελειται απο ομοιομορφο ελαστικο υλικο.

•• εαν επιλεξουμε ενα σημειο της χορδης (το βαφουμε με κοκκινο χρωμα οπως στο σχημα) Τοτε η κινηση της χορδης ειναι ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ



Πως ειναι η κινηση της χορδης ;

επιλεγουμε ενα μικρο κομματι της χορδης



Σημειωνουμε τις δυναμεις που ασκουνται στο κομματι της χορδης [x, x+δ] απο την υπολοιπη χορδη.

Στο σημειο A ασκειται δυναμη $\vec{T_1}$ που η γωνια με τον οριζοντιο αξονα ειναι φ.

Η γωνια φ ειναι αυτη της εφαπτομενης της χορδης στο x, οποτε

$$\tan\varphi = u_x(x,t).$$

Αναλυουμε τη δυναμη $\vec{T_1}$ σε δυο συνιστωσες οποτε

$$\vec{T_1} = (T_1 \cos\varphi, -T_1 \sin\varphi)$$

Παρομοια στο σημειο B εχουμε

$$\tan\vartheta = u_x(x+\delta x, t)$$

και

$$\vec{T_2} = (T_2 \cos\vartheta, T_2 \sin\vartheta)$$

Υποθεση : Το βαρος της χορδης ειναι πολυ μικρο σε σχεση με τις δυναμεις της χορδης (Ταση)

Επειδη καθε σημειο της χορδης μετακινειται μονο καταακορυφα, στον οριζοντιο αξονα εχουμε ισορροπια δυναμεων, οποτε

$$T_1 \cos\varphi = T_2 \cos\vartheta = \overset{\text{Ταση}}{T} \ \text{(ανεξαρτητη της θεσης)}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{T}{\cos\varphi} \quad , \quad T_2 = \frac{T}{\cos\vartheta}$$

Στον κατακορυφο αξονα η συνολικη δυναμη

Ειναι :

$$T_2 \sin\theta - T_1 \sin\varphi =$$

$$= T(\tan\theta - \tan\varphi)$$

$$= T(u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)).$$

Μαζα του κομματιου της χορδης $\rho\,\delta x$

οπου ρ ειναι η πυκνοτητα της χορδης

Νομος του Νευτωνα

Δυναμη = μαζα × επιταχυνση

παιρνει τη μορφη

$$T\left(u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)\right) = \rho\,\delta x \cdot u_{tt}(x,t)$$

$$\frac{T}{\rho} \cdot \frac{u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)}{\delta x} = u_{tt}(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\rho} \lim_{\delta x \to 0} \frac{u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)}{\delta x} = u_{tt}(x,t)$$

$$\frac{T}{\rho} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t).$$

Εξισωση παλλομενης χορδης

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad , 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Το προβλημα συμπληρωνεται με

⊙ Συνοριακες Συνθηκες (ΣΣ)
(ακρα χορδης)

Dirichlet Σ.Σ. $u(0,t) = 0$

$u(1,t) = 0$.

⊙⊙ Αρχικες Συνθηκες (ΑΣ)

(Αρχικη θεση χορδης) $u(x,0) = f(x), \; 0 \leq x \leq 1.$

(Αρχικη ταχυτητα χορδης) $u_t(x,0) = g(x), \; 0 \leq x \leq 1.$

Προβλημα Αρχικων-Συνοριακων Τιμων

Δοθεντος του υλικου της χορδης (c γνωστο) και της αρχικης θεσης και ταχυτητας της Χορδης, βρειτε τη θεση της χορδης τη χρονικη στιγμη t. Δηλαδη να λυθει το Προβλημα Αρχικων-Συνοριακων Τιμων

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0<x<1, \ t>0$$

ΣΣ $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $t \geq 0$

ΑΣ $u(x,0) = f(x), \ 0 \leq x \leq 1$

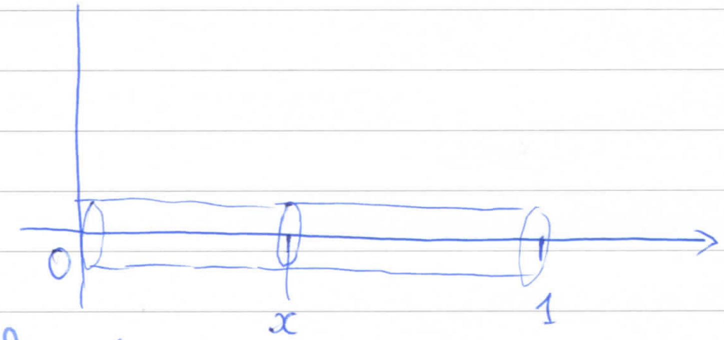
$u_t(x,0) = g(x), \ 0 \leq x \leq 1.$

Τι ειναι η λυση ενος τετοιου προβληματος;

Κλασικη λυση $u \in C^{2,2}((0,1)\times(0,+\infty)) \cap C([0,1]\times[0,\infty)) \cap C^{0,1}([0,1]\times[0,+\infty)).$

Ενα δευτερο μοντελο

Εξισωση Θερμοτητας μιας μονωμενης ραβδου



Εστω λεπτη ραβδος με σταθερη διατομη. Θεωρουμε οτι η ραβδος εχει την ιδια θερμοκρασια στην καθε διατομη

$u(x,t) :=$ θερμοκρασια της ραβδου στη θεση x, τη χρονικη στιγμη t.

Τοτε προκυπτει ο

Νομος μεταβολης θερμοκρασιας

$$u_t(x,t) = k \; u_{xx}(x,t), \; 0<x<1, \; t>0$$

διαχυση

ρυθμος μεταβολης θερμοκρασιας

(θετικη σταθερα) θερμικη διαχυτικοτητα (Υλικο ραβδου).

Προβλημα Αρχικων - Συνοριακων Τιμων Εξισωσης Θερμοτητας

$$u_t(x,t) = k \; u_{xx}(x,t), \quad 0<x<1, \; t>0$$

(Dirichlet) ΣΣ. $u(0,t) = g_1(t), \quad u(1,t) = g_2(t), \quad t \geq 0.$

ΑΣ. $u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$

Είδη Συνοριακων Τιμων

Dirichlet	$u(0,t) = g_1(t), \quad u(1,t) = g_2(t)$
Neumann	$u_x(0,t) = g_1(t), \quad u_x(1,t) = g_2(t)$
Robin $(\alpha,\beta>0)$	$u(0,t) - a\,u_x(0,t) = g_1(t), \quad u(1,t) + \beta u_x(1,t) = g_2(t)$

Καλη τοποθετηση προβληματος
(Hadamard)

- Υπαρξη λυσεων
- Μονοσημαντο λυσεων
- Συνεχης εξαρτηση λυσεων απο παραμετρους και αρχικα δεδομενα του προβληματος.

Το πιο απλο προβλημα

Να λυθει το Προβλημα Αρχικων Τιμων

$$u_t(x,t)=0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0)=f(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

οπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ειναι δοθεισα ομαλη συναρτηση. Ποσο καλη πρεπει να ειναι η f, για να υπαρχει ομαλη συναρτηση;

Λυση: Ποσο καλη πρεπει να ειναι η λυση ?

- Αρχικα πρεπει να οριζεται με κλασικο τροπο η Δ.Ε, οποτε $u\in C^{0,1}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$.
  (Συνεχης ως προς x, παραγωγισιμη (συνεχως) ως προς t)

Για να αισθανεται τα αρχικα δεδομενα πρεπει
$$u\in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$$

και επομενως η κλασικη λυση $u\in C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))\,\cap$
$\cap\, C^{0,1}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$.

($\Rightarrow$ επομενως $\overset{\text{αρχικα}}{}$ πρεπει $f \in C(\mathbb{R})$).

Προσδιορισμος της λυσης: Εστω $t > 0$, ΘΜΤ. $\exists\, \xi_t \in (0,t)$

$$u(x,t) - u(x,0) = t\, u_t(x, \xi_t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

$\boxed{\cdot}$

Γενικη Παρατηρηση

1) Εαν $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, τοτε

$\exists\, \varphi \in C(\mathbb{R})$ ωστε

$$f(x,y) = \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

διοτι $f(x,y) - f(0,y) = (x-0)\, f_x(\xi, y)$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = f(0,y) \quad (= \varphi(y))$$

2) Εαν $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0,1]$

Τοτε $\exists\, \psi \in C(\mathbb{R})$ ωστε

$$f(x,y) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ y \in [0,1]$$

(γιατι;)

3) Εαν $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0$, $x\geq 0$, $y,z\in\mathbb{R}$

τοτε $\exists\ \varphi\in C(\mathbb{R}^2)$ ωστε

$$f(x,y,z)=\varphi(y,z),\quad \forall x\geq 0, y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}.$$

(γιατι;)

Παραδειγμα: Να λυθει το προβλημα

$$u_t(x,t)+u_x(x,t)=0,\quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

οπου f ειναι δοθεισα ομαλη συναρτηση. Ποσο ομαλη πρεπει να ειναι η f;

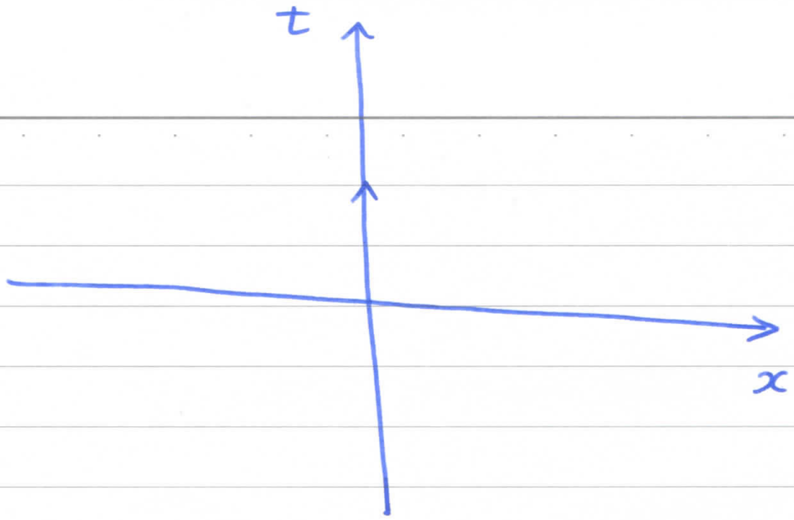
Λυση:

Για να εχει κλασικη λυση πρεπει $u\in C^{1,1}(\mathbb{R}\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$.

Γιατι μπορεσαμε να λυσαμε το προηγουμενο παραδειγμα; (Ελλειπε η μια παραγωγος)

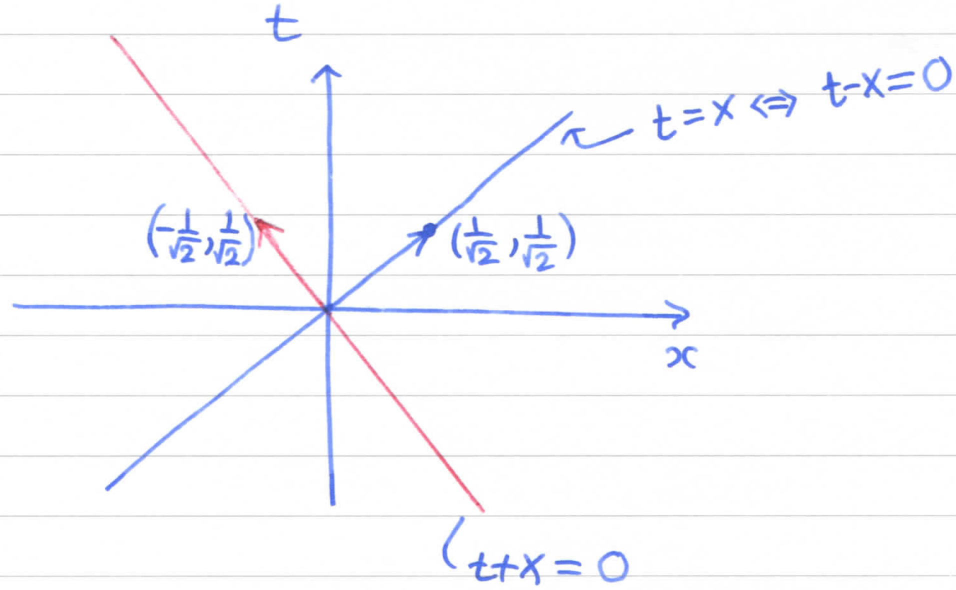
Μπορουμε να κανουμε το ιδιο και στην περιπτωση μας;

Παρατηρουμε οτι: $u_x(x,t)+u_t(x,t)=0\Leftrightarrow$
$(u_x,u_t)\cdot(1,1)=0\Leftrightarrow(u_x,u_t)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=0$



$u_t(x,t) = 0$

$(u_x, u_t)(0,1) = 0$



εισαγωμε
$$\left.\begin{matrix} \xi = t - x \\ \eta = t + x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} t = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ x = \frac{1}{2}(\eta - \xi) \end{matrix}\right.$$

και θετουμε

$$u(x,t) = v(\xi, \eta)$$

απο κανονα αλυσιδας

Τοτε
$$u_x(x,t) = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$= -v_\xi(\xi, \eta) + v_\eta(\xi, \eta)$$

$$u_t(x,t) = V_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= V_\xi(\xi,\eta) + V_\eta(\xi,\eta)$$

και ~~ξ~~ τα αρχικα δεδομενα

$$t = 0 \iff \xi+\eta = 0$$

$$(t>0) \iff \xi+\eta > 0$$

Η Δ.Ε. γραφεται:

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0 \quad , \quad t>0$$

$$\Updownarrow$$

$$V_\xi(\xi,\eta) + V_\eta(\xi,\eta) + (-V_\xi(\xi,\eta) + V_\eta(\xi,\eta)) = 0$$

$$\xi+\eta>0$$

$$\iff 2V_\eta(\xi,\eta) = 0 \iff V_\eta(\xi,\eta) = 0, \quad \eta > -\xi.$$

Οποτε ΘΜΤ. $\exists\ \sigma \in (-\xi, \eta)$

$$V(\xi,\eta) - V(\xi,-\xi) = (\eta+\xi)\, V_\eta(\xi,\sigma)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \underset{\underset{\displaystyle u(x,t)}{\|}}{V(\xi,\eta)} = \underset{\underset{\displaystyle f(-t+x)}{\|}}{V(\xi,-\xi)} = Q(\xi)$$

$$u(x,t) = f(-t+x), \quad t>0.$$

$$u(x,t) = Q(t-x)$$

$$f(x) = Q(-x)$$

$$u(x,t) = f(x-t), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Για να ειναι παραγωγισιμη η u πρεπει f παραγωγισιμη ($f\in C^1(\mathbb{R})$).

(και τοτε ευκολα διαπιστωνουμε οτι

$$\left.\begin{aligned} u_t(x,t) &= -f'(x-t) \\ u_x(x,t) &= f'(x-t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_t+u_x=0 \ )$$

$\boxed{\cdot}$

Γενικη Μεθοδος

Μεθοδος των Χαρακτηριστικων

Πως δουλευει η μεθοδος αυτη;

Ευρεση καμπυλης που συνδεει το σημειο (x,t) με κατάλληλο σημειο που υπαρχουν στα αρχικα δεδομενα.

Για παραδειγμα για το προβλημα

$$\begin{aligned} &u_t(x,t)+u_x(x,t)=0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ &u(x,0)=f(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

αναζητουμε καμπυλη $(x(s),t(s))$ που ενωνει το (x,t) με καταλληλο $(x_0,0)$. και ειναι τετοια ωστε:

$$\frac{d}{ds}u(x(s),t(s)) = u_x\,\frac{dx}{ds} + u_t\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$\Vert$$

$$u_x(x,t) + u_t(x,t)$$

Επιλεγουμε την καμπυλη

$$\frac{dx}{ds} = 1 \quad , \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad , \quad t(0) = 0.$$

$$x(s) = s + x_0$$

$$t(s) = s.$$

Αυτη ειναι η επιλογη της καμπυλης

Τοτε ομως

$$\frac{d}{ds}u(x(s),t(s)) = u_x(x(s),t(s)) + u_t(x(s),t(s)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x(s),t(s)) = u(x_0,0) = f(x_0). \qquad (*)$$

$$\text{Αν} \quad \bar{s}: \quad \left.\begin{matrix} x(\bar{s}) = x \\ t(\bar{s}) = t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \bar{s} + x_0 = x \\ \bar{s} = t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_0 = x - t \\ \bar{s} = t \end{matrix}\right\}$$

Οποτε απο (*) προκυπτει:

$$u(x,t) = f(x-t).$$

$\boxdot$

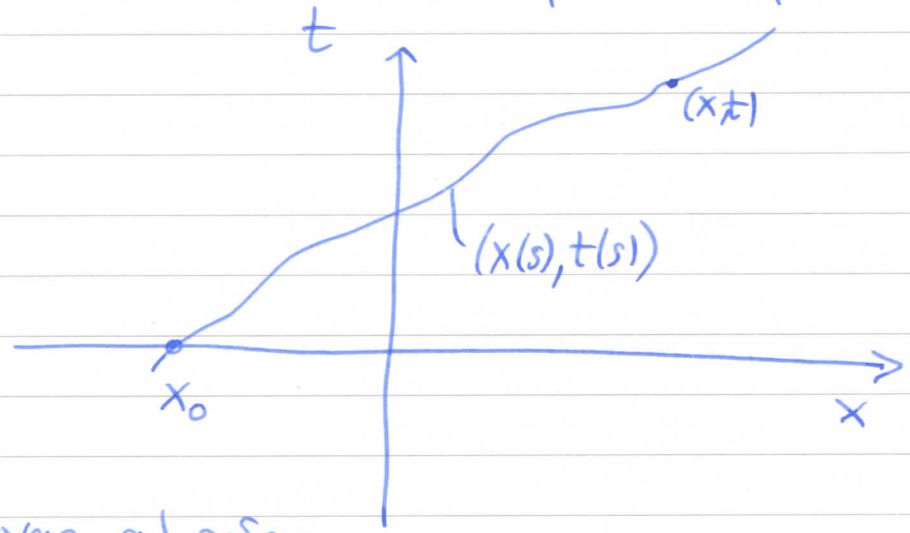
<u>Παραδειγμα</u> Να λυθει το ΠΑΤ (προβλημα Cauchy)

$$u_t(x,t) + x\,u_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

οπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ καταλληλα ομαλη συναρτηση.

<u>Λυση:</u>



Κανονας αλυσιδας

$$\frac{d}{ds}\, u(x(s),t(s)) = u_x(x(s),t(s))\cdot x'(s) + u_t(x(s),t(s))\cdot t'(s$$

Επιλεγουμε την καμπυλη ωστε

$$x'(s) = x(s), \quad x(0) = x_0$$

$$t'(s) = 1, \quad t(0) = 0.$$

$$t'(s)=1,\ t(0)=0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} t(s)=s+c \\ t(0)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c=0 \\ t(s)=s. \end{matrix}\right.$$

$$x'(s) = x(s) \Leftrightarrow x'(s) - x(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-s}x'(s) - e^{-s}x(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-s}x(s)\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad e^{-s}x(s) = e^{-0}x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = x_0 e^{s}.$$

Με αυτη την επιλογη της καμπυλης εχουμε

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = \cdots = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = f(x_0).$$

Αν $\bar{s}$ η τιμη της παραμετρου ωστε

$$\left.\begin{array}{l} x(\bar{s}) = x \\ t(\bar{s}) = t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 e^{\bar{s}} = x \\ \bar{s} = t \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = x e^{-\bar{s}} \\ \bar{s} = t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = x e^{-t} \\ \bar{s} = t \end{array}\right.$$

και επομενως

$$u(x,t) = u(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = f(x_0) = f(x e^{-t}), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$$

Απαιτειται f παραγωγισιμη συναρτηση (γιατι;).