ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

28 - 4 - 2020

Στοιχεια σειρων Fourier (συνεχεια)

Προταση 1 Εστω $l>0$. Οι συναρτησεις

$$1, \ \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \ \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \ \forall n\in\mathbb{N}$$

ειναι ενα ορθογωνιο συστημα συναρτησεων στο $[-l,l]$ η στο $[0,2l]$.

Αποδ: Οι ανωτερω συναρτησεις ειναι ιδιοσυναρτησεις του προβληματος ιδιοτιμων

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad , -l < x < l$$

$$y(-l) = y(l)$$

$$y'(-l) = y'(-l)$$

με ιδιοτιμες $\lambda_0 = 0$, ιδιοσυναρτηση $y_0(x) = 1$

και $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n=1,2,\dots$

και ιδιοσυναρτησεις $\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ $n=1,2,\dots,n,\dots$

Οποτε αν εφαρμοσουμε το προηγουμενο ΘΕΩΡΗΜΑ

(σε διαφορετικες ιδιοτιμες, αντιστοιχουν ορθογωνιες ιδιοσυναρτησεις)

προκυπτει αμεσα οτι

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = 0$$

$n=1,2,\dots,n,\dots$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx=0 \quad , \forall n\neq m$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx=0, \quad \forall n\neq m$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx=0 \quad , \forall n\neq m$$

(διαφορετικες ιδιοτιμες)

Η τελευταια ισχυει μαλιστα και αν $n=m$

δηλ. εχουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = 0$$

$\forall n\in\mathbb{N}$

$$" \quad \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{2n\pi}{\ell}x\right)dx$$

Προταση 2 Εστω $\ell > 0$. Οι συναρτησεις

$$1, \quad \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

ειναι ενα ορθογωνιο συστημα συναρτησεων στο $[0,\ell]$.

Αποδ. Οι ανωτερω συναρτησεις ειναι ιδιοσυναρτησεις του προβληματος ιδιοτιμων

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0, \quad 0 < x < \ell$$

$$A'(0) = A'(\ell) = 0$$

με ιδιοτιμες $\lambda_0 = 0$, ιδιοσυναρτηση $A_0(x) = 1$

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, ιδιοσυναρτηση

$$A_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

και απο το ΘΕΩΡΗΜΑ προκυπτει η ορθογωνιοτητα τους!

Προκυπτει λοιπον οταν αναπτυξουμε την f στο ορθογωνιο συστημα $1, \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$
$n \in \mathbb{N}$

δηλ αν

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right)$$

τοτε επειδη

$$\int_{-\ell}^{\ell} 1\, dx = 2\ell$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \int_{-\ell}^{\ell} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \ell$$

προκυπτει οτι:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

$n = 1, 2, \dots$

$$\beta_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

Για τον υπολογισμο των συντελεστων Fourier ειναι αρκετο η f να ειναι ολοκληρωσιμη.

Το πρωτο ερωτημα που τιθεται ειναι αν η f ειναι ολοκληρωσιμη, και οι συντελεστες Fourier αυτης δινονται απο τους ανωτερω τυπους, θα αγκλινει η σειρα Fourier?

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)$$

και το επομενο ερωτημα ειναι ποια ειναι η σχεση μεταξυ της σειρας Fourier της f με την f ?

Θα δωσουμε απαντηση (χωρις αποδειξη):

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Εστω f 2ℓ περιοδικη συναρτηση. Εστω επισης η f ειναι συνεχης και η f' κατα τμηματα συνεχης. Τοτε η σειρα Fourier της f,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)$$

συγκλινει ομοιομορφα και μαλιστα

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right)$$

$$\forall \ x \in [-\ell, \ell].$$

(Το ιδιο ισχυει σε καθε 2ℓ διαστημα).

Η f' ειναι κατα τμηματα συνεχης στο $[-\ell, \ell]$ αν μπορουμε να διασπασουμε το διαστημα σε πεπερασμενο σε πληθος υποδιαστηματα

$$-\ell = \ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_k = \ell$$

ωστε η f να ειναι παραγωγισιμη

στο (ℓ_{i-1}, ℓ_i), $i = 1, \dots, k$

και να υπαρχουν τα πλευρικα ορια

$$\lim_{x \uparrow \ell_i} f'(x) \qquad \forall \ i = 1, 2, \dots, k$$

$$\lim_{x \downarrow \ell_{i-1}} f'(x)$$

Επιλυση πληρους προβληματος

Στοχος της ενοτητας αυτης ειναι η ευρεση λυσεων στα μη ομογενη προβληματα:

A) Εξισωση θερμοτητας:

$$u_t - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= g_1(t) \\ u(\pi,t) &= g_2(t) \end{aligned}\right\} \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi$$

(Συνθηκες συμβατοτητας: $g_1(0) = \varphi(0)$, $g_2(0) = \varphi(\pi)$)

B) Κυματικη εξισωση:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= g_1(t) \\ u(\pi,t) &= g_2(t) \end{aligned}\right\} , \quad t \geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} , \quad 0 \le x \le \pi$$

(Συνθηκες συμβατοτητας: $g_1(0) = \varphi(0)$, $g_2(0) = \varphi(\pi)$
$g_1'(0) = \psi(0)$, $g_2'(0) = \psi'(\pi)$)

• Άλλου είδους Συνοριακές Συνθήκες.

Πως τα επιλύουμε;

Βήμα 1ο Μετατροπή των συνοριακών συνθηκών σε ομογενείς συνοριακές συνθήκες

Περίπτωση 1 Αν έχουμε Dirichlet Σ.Σ

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u(\pi,t) = g_2(t) \quad , t \geq 0$$

(Παίρνουμε κυρτό συνδυασμό)

Θέτουμε

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) g_1(t) + \frac{x}{\pi} g_2(t) + v(x,t)$$

Τότε η v ικανοποιεί τις Σ.Σ.

$$v(0,t) = 0$$
$$v(\pi,t) = 0 \quad , t \geq 0$$

και τότε βλέπουμε το πρόβλημα που λύνει η v.

Ειδικότερα:

Εάν η u λύνει το πρόβλημα της εξίσωσης θερμότητας, τότε η v λύνει

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = \tilde{f}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi,\ t>0$$

$$\left.\begin{aligned} v(0,t) &= 0 \\ v(\pi,t) &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad t \ge 0$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad 0 \le x \le \pi$$

όπου $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - \left(1-\frac{x}{\pi}\right) g_1'(t) - \frac{x}{\pi} g_2'(t)$ και

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \left(1-\frac{x}{\pi}\right) g_1(0) - \frac{x}{\pi} g_2(0)$$

Ενώ αν η u λύνει το πρόβλημα της κυματικής εξίσωσης, τότε η v λύνει

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = \bar{\bar{f}}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi,\ t>0$$

$$\left.\begin{aligned} v(0,t) &= 0 \\ v(\pi,t) &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad t \ge 0$$

$$\left.\begin{aligned} v(x,0) &= \bar{\bar{\varphi}}(x) \\ v_t(x,0) &= \bar{\bar{\psi}}(x) \end{aligned}\right\}, \quad 0 \le x \le \pi$$

οπου :

$$\bar{\bar{f}}(x,t) = f(x,t) - \left(1-\frac{x}{\pi}\right) g_1''(t) - \frac{x}{\pi} g_2''(t)$$

$$\bar{\bar{\varphi}}(x) = \varphi(x) - \left(1-\frac{x}{\pi}\right) g_1(0) - \frac{x}{\pi} g_2(0)$$

$$\bar{\bar{\psi}}(x) = \psi(x) - \left(1-\frac{x}{\pi}\right) g_1'(0) - \frac{x}{\pi} g_2'(0) .$$

Περιπτωση 2   Αν εχουμε Neumann ΣΣ

$$\left.\begin{array}{l} u_x(0,t) = g_1(t) \\ u_x(\pi,t) = g_2(t) \end{array}\right. , \quad t \geq 0$$

(κυρτο συνδυασμο στην u_x)

Θετουμε
$$\left(u_x(x,t) = \left(1-\frac{x}{\pi}\right) g_1(t) + \frac{x}{\pi} g_2(t) + w_x(x,t) \right)$$

$$u(x,t) = -\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2 g_1(t) + \frac{x^2}{2\pi} g_2(t) + v(x,t)$$

και βλεπουμε τοτε την εξισωση που λυνει η v αναλογα με το προβλημα που λυνει η u.

Περιπτωση 3 ΣΣ Dirichlet στο ενα ακρο , Neumann στο αλλο

$$u(0,t) = g_1(t)$$

$$u_x(\pi,t) = g_2(t)$$

Θετουμε

$$u(x,t) = (x^2 - 2\pi x + 1) g_1(t) + \frac{x^2}{2\pi} g_2(t) + v(x,t)$$

οποτε τοτε

$$v(0,t) = 0$$

$$v_x(\pi,t) = 0$$

και βρισκουμε το προβλημα που λυνει η v

(Πως προεκυψε η αλλαγη; Υπαρχουν πολλες επιλογες. Ειδικοτερα αν υποθεσαμε οτι κιναμε την αλλαγη

$$u(x,t) = a(x) g_1(t) + \beta(x) g_2(t) + v(x,t)$$

ωστε να εχουμε $v(0,t) = 0$, $v_x(\pi,t) = 0$

τοτε επιλεγουμε τις πιο "απλες" συναρτησεις $a(x)$, $\beta(x)$ ωστε:

$$a(0) g_1(t) + \beta(0) g_2(t) = g_1(t)$$

και η πιο απλη επιλογη ειναι

$$a(0) = 1, \quad \beta(0) = 0$$

Επίσης επειδή

$$u_x(x,t) = a'(x)g_1(t) + \beta'(x)g_2(t) + v_x(x,t)$$

θα πρέπει

$$a'(\pi)g_1(t) + \beta'(\pi)g_2(t) = g_2(t)$$

και η πιο απλή επιλογή είναι:

$$a'(\pi) = 0, \quad \beta'(\pi) = 1.$$

Για τη συνάρτηση a θέλουμε

$$a(0) = 1, \quad a'(\pi) = 0$$

οπότε αν $a'(x) = 2(x-\pi) \Rightarrow a(x) = (x-\pi)^2 + c$

$$a(0) = 1 \Leftrightarrow \pi^2 + c = 1 \Rightarrow c = 1-\pi^2$$

$$\Rightarrow a(x) = (x-\pi)^2 + 1 - \pi^2 = x^2 - 2\pi x + 1.$$

Για τη συνάρτηση β θέλουμε

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(\pi) = 1$$

Αν θέσουμε $\beta(x) = kx \Rightarrow \beta'(x) = k$

οπότε μια πιο απλή επιλογή είναι η $\beta(x) = x$

και επομενως η αντικατασταση

$$u(x,t) = (x^2 - 2\pi x + 1)\, g_1(t) + x\, g_2(t) + v(x,t)$$

ειναι τετοια ωστε

$$v(0,t) = 0 \quad \text{και} \quad v_x(\pi,t) = 0 \quad , \; t \geq 0.$$

Πως συνεχιζουμε απο εδω;

Εχει σημασια το προβλημα

Εστω πως εχουμε να λυσουμε το

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad , \; 0 < x \leq \pi, \; t > 0$$

$$v(0,t) = 0$$

$$v(\pi,t) = 0 \quad , \; t \geq 0$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Βημα 2ο

Παμε και επιλυουμε το αντιστοιχο ομογενες προβλημα

$$(*)\begin{cases} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, & 0 \le x \le \pi,\ t>0 \\ w(0,t) = 0 & \\ & ,\quad t \ge 0 \\ w(\pi,t) = 0 & \end{cases}$$

Οπως εχουμε δει, η ευρεση λυσεων στη μορφη

$$w(x,t) = A(x)B(t)$$

αναγει το προβλημα σε 2 υποπροβληματα:

Ευρεση ιδιοτιμων - Ιδιοσυναρτησεων του

$$(I)\quad \begin{aligned} &A''(x) + \lambda A(x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ &A(0) = A(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = n^2, \quad A_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(II)\quad B'(t) - n^2 B(t) = 0, \Rightarrow B_n = e^{-n^2 t}.$$

Γενικη λυση $(*)$, $w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$

Εστω $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx)$, δηλ. $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,dx$

Βήμα 3ο Διασπάμε την f ~~στα~~ σειρά Fourier με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις $\sin(nx), n\in\mathbb{N}$

Ειδικότερα θέτουμε

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t)\sin(nx) \quad , \quad t\geq 0$$

$$0\leq x\leq \pi.$$

Οπότε προκύπτει ότι πρέπει:

$$c_n(t)\int_0^{\pi} \sin^2(nx)dx = \int_0^{\pi} f(x,t)\sin(nx)dx$$

$$\Rightarrow c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,t)\sin(nx)dx , \quad n\in\mathbb{N}.$$

Βήμα 4ο Εύρεση λύσης στο πρόβλημα

$$q_t(x,t) - q_{xx}(x,t) = c_n(t)\sin(nx)$$

$$q(0,t) = 0$$

$$q(\pi,t) = 0$$

$$q(x,0) = \beta_n \sin(nx)$$

Τη λύση τη βρίσκουμε στη μορφή

$$q(x,t) = Q_n(t)\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} q_t(x,t) &= Q_n'(t)\sin(nx) \\ q_x(x,t) &= n\,Q_n(t)\cos(nx) \\ q_{xx}(x,t) &= -n^2 Q_n(t)\sin(nx) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow q_t - q_{xx} = \left(Q_n'(t) + n^2 Q_n(t)\right)\sin(nx)$$

Οπότε πρέπει:

$$Q_n'(t) + n^2 Q_n(t) = c_n(t), \quad t>0$$

$$Q_n(0) = \beta_n \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow e^{n^2 t} Q_n'(t) + n^2 e^{n^2 t} Q_n(t) = e^{n^2 t} c_n(t)$$

$$\Rightarrow \left(e^{n^2 t} Q_n(t)\right)' = e^{n^2 t} c_n(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(e^{n^2 s} Q_n(s)\right)' ds = \int_0^t e^{n^2 s} c_n(s)\,ds$$

$$e^{n^2 t} Q_n(t) - Q_n(0) = \int_0^t e^{n^2 s} c_n(s)\,ds \Rightarrow$$

$$Q_n(t) = \beta_n e^{-n^2 t} + e^{-n^2 t}\int_0^t e^{n^2 s} c_n(s)\,ds$$

και επομένως

$$q(x,t) = \beta_n e^{-n^2 t}\sin(nx) + e^{-n^2 t}\sin(nx)\int_0^t e^{n^2 s} c_n(s)\,ds$$

Βημα 5^{o} (Τελικο βημα)

Η λυση του προβληματος

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad 0<x\leq\pi, \; t>0$$

$$v(0,t) = 0$$

$$v(\pi,t) = 0$$

$$v(x,0) = \varphi(x)$$

ειναι η

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-n^2 t}\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t}\sin(nx)\int_0^t e^{n^2 s} c_n(s)\,ds$$

οπου $\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)\,dx, \quad n=1,2,\ldots$

και :

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x,t) \sin(nx)\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Ειδικότερα η συνάρτηση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

λύνει το πρόβλημα

$$w_t - w_{xx} = 0$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0$$

$$w(x,0) = \varphi(x)$$

Ενώ η συνάρτηση:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \int_0^t e^{n^2 s} c_n(s)\, ds$$

λύνει το πρόβλημα

$$u_t - u_{xx} = f(x,t)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$\boxed{\cdot}$