ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2-4-2020

ΜΔΕ 2ης Ταξης

Κυματικη Εξισωση - Εξισωση παλλομενης χορδης

Αρχικο προβλημα

Να λυθει το ΠΑΤ

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0 \quad , \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\
u(x,0) &= f(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R} \\
u_t(x,0) &= g(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

οπου $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομαλες συναρτησεις.

Απ 1ος τροπος

Θετουμε $\xi = x-t$, $\eta = x+t$ και

$$u(x,t) = v(\xi,\eta)$$

τοτε ο κανονας της αλυσιδας δινει

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= v_\xi(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial t} + v_\eta(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t} \\
&= v_\xi(\xi,\eta)(-1) + v_\eta(\xi,\eta) \\
&= -v_\xi(\xi,\eta) + v_\eta(\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

$$u_x(x,t) = v_\xi(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial x} + v_\eta(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$= U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta)$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ -U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta) \right\}$$

$$= -U_{\xi\xi}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} - U_{\xi\eta}(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$+ U_{\eta\xi}(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= -U_{\xi\xi}(\xi,\eta)(-1) - U_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

$$+ U_{\eta\xi}(\xi,\eta)(-1) + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

$$= +U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + U_{\eta\eta}(\xi,\eta) - 2U_{\xi\eta}(\xi,\eta).$$

Παρόμοια

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta) \right\}$$

$$= U_{\xi\xi}(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\xi\eta}(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$+ U_{\eta\xi}(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2U_{\xi\eta}(\xi,\eta) + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

και επομένως η Δ.Ε. γράφεται:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \Longleftrightarrow +U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + U_{\eta\eta}(\xi,\eta) - 2U_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

$$- U_{\xi\xi}(\xi,\eta) - U_{\eta\eta}(\xi,\eta) - 2U_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

$$= 0 \Longleftrightarrow$$

$$-4\,v_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0 \iff v_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0.$$

και επειδη

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\big(v_\xi(\xi,\eta)\big)=0 \Rightarrow v_\xi(\xi,\eta)=Q(\xi)$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial\xi}\left(v(\xi,\eta)-\int_0^{\xi}Q(\sigma)d\sigma\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad v(\xi,\eta)-\int_0^{\xi}Q(\sigma)d\sigma = R(\eta)$$

Επομενως υπαρχουν 2 συναρτησεις A,B ωστε

$$v(\xi,\eta)=A(\xi)+B(\eta)$$

οποτε

$$u(x,t)=A(x-t)+B(x+t).$$

- Προσδιορισμος των συναρτησεων A,B απο τα αρχικα <u>δεδομενα</u>

επειδη $u(x,0)=f(x)$, προκυπτει $A(x)+B(x)=f(x)$ (1)

Επισης

$$\Rightarrow \quad u_t(x,t)=-A'(x-t)+B'(x+t)$$

$$u_t(x,0)=-A'(x)+B'(x)$$

$$g(x)=-A'(x)+B'(x)$$

$$\Rightarrow \left(-A(x)+B(x)\right)'=\left(\int_0^x g(s)ds\right)' \Rightarrow$$

$$-A(x)+B(x)=\int_0^x g(s)ds + c \qquad (2)$$

$$A(x)+B(x)=f(x) \qquad (1)$$

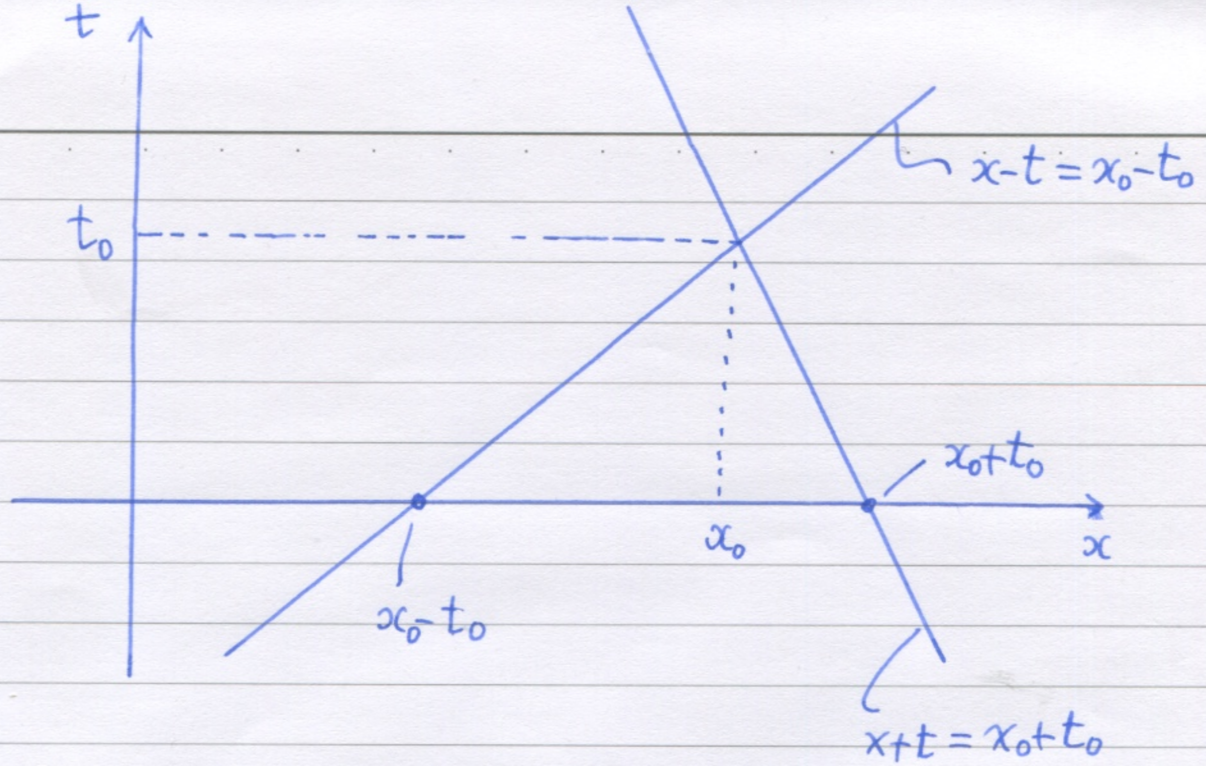
$$(1),(2) \Rightarrow \quad A(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds-\frac{c}{2}$$

$$B(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds+\frac{c}{2}.$$

<u>Επομένως:</u>

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= A(x-t)+B(x+t)\\
&= \frac{1}{2}f(x-t)-\frac{1}{2}\int_0^{x-t} g(s)ds-\frac{c}{2}\\
&\quad +\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}\int_0^{x+t} g(s)ds+\frac{c}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x-t)+f(x+t)\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left[\int_0^{x+t} g(s)ds-\int_0^{x-t} g(s)ds\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x-t)+f(x+t)\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds.
\end{aligned}$$

Ερμηνεία αποτελέσματος



- Χαρακτηριστικες καμπυλες

$$x-t=x_0-t_0$$

$$x+t=x_0+t_0$$

.. Κωνος εξαρτησης της λυσης.

2^{os} τροπος Καλουμε $u_t(x,t)-u_x(x,t)=v(x,t)$

τοτε $u_{tt}(x,t)-u_{xt}(x,t)=v_t(x,t)$

$$u_{tx}(x,t)-u_{xx}(x,t)=v_x(x,t)$$

επομενως

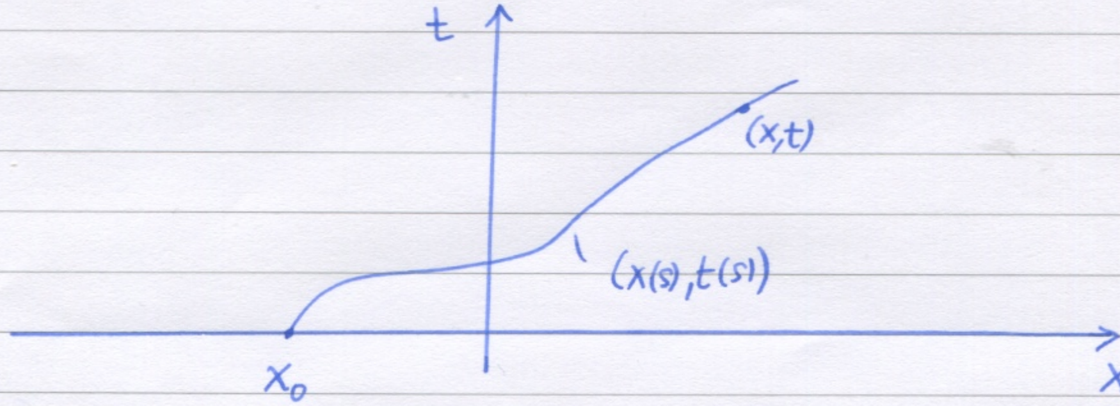
$$v_t(x,t)+v_x(x,t)=u_{tt}-u_{xt}+u_{tx}-u_{xx}=0$$

Θα εφαρμοσουμε τη μεθοδο των χαρακτηριστικων

για να επιλυσουμε το Π.ΑΤ

$$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

$$v(x,0) = \psi(x) \ , \ x \in \mathbb{R}$$



Επιλεξαμε την χαρακτηριστικη καμπυλη απο

$$\frac{dx}{ds} = 1 \ , \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \ , \quad t(0) = 0$$

$\Rightarrow$ $\quad x(s) = s + x_0 \ , \quad t(s) = s \ , \quad s \geq 0$

Τοτε $\quad \frac{d}{ds} v(x(s), t(s)) = v_t - v_x = 0$

$$\Rightarrow \ v(x,t) = v(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = v(x_0, 0) = \psi(x_0).$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \bar{s} + x_0 \\ t = \bar{s} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = x - t \\ \bar{s} = t \end{array}\right.$$

επομένως $v(x,t) = \psi(x-t)$.

και έτσι

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = \psi(x-t), \quad x \in \mathbb{R}, t>0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Παρόμοια επιλύουμε το νέο πρόβλημα

$(x(s), t(s))$ η νέα χαρακτηριστική

$$\frac{dx}{ds} = -1, \quad \frac{dt}{ds} = 1$$

$$x(0) = x_0, \quad t(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = -s + x_0, \quad t(s) = s$$

και τότε αν

$$\sigma(s) = u(x(s), t(s)) = u(-s+x_0, s)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma'(s) = -u_x(x(s), t(s)) + u_t(x(s), t(s))$$

$$= \psi(x(s) - t(s)) = \psi(-s+x_0-s)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma'(s) = \psi(x_0 - 2s) = \left(-\frac{1}{2}\int_0^{x_0-2s} \psi(\theta)\, d\theta\right)'$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sigma(s) + \frac{1}{2}\int_0^{x_0-2s} \psi(\theta)\, d\theta\right)' = 0$$

$$\sigma(s) + \frac{1}{2}\int_0^{x_0-2s} \psi(\theta)d\theta = \sigma(0) + \frac{1}{2}\int_0^{x_0} \psi(\theta)d\theta$$

ομως $\quad \sigma(0) = u(x_0,0) = \varphi(x_0)$

και αν $\bar{s}$ ωστε

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\bar{s}) = -\bar{s} + x_0 \\ t &= t(\bar{s}) = \bar{s} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_0 &= x+t \\ \bar{s} &= t \end{aligned}\right.$$

Επομενως

$u(x,t) = \sigma(\bar{s})$ και αρα

$$u(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t-2t} \psi(\theta)d\theta = \varphi(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \psi(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \varphi(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\theta)d\theta.$$

Επομενως για $t=0 \Rightarrow f(x) = \varphi(x).$ (3)

και με παραγωγιση

$$u_t(x,t) = \varphi'(x+t) + \frac{1}{2}\left(\psi(x+t) - \psi(x-t)(-1)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \varphi'(x) + \psi(x) \qquad (4)$$

$$\varphi(x) = f(x)$$

$$\psi(x) = g(x) - f'(x)$$

και τελικα:

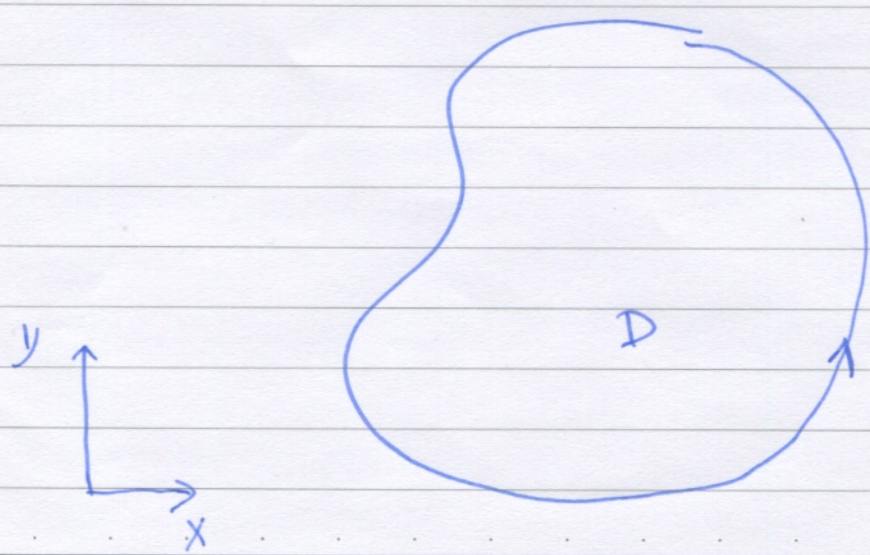
$$u(x,t) = f(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \{ g(\theta) - f'(\theta) \} d\theta$$

$$= f(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f'(\theta)d\theta$$

$$= f(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta) - \frac{1}{2}\left(f(x+t) - f(x-t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta$$

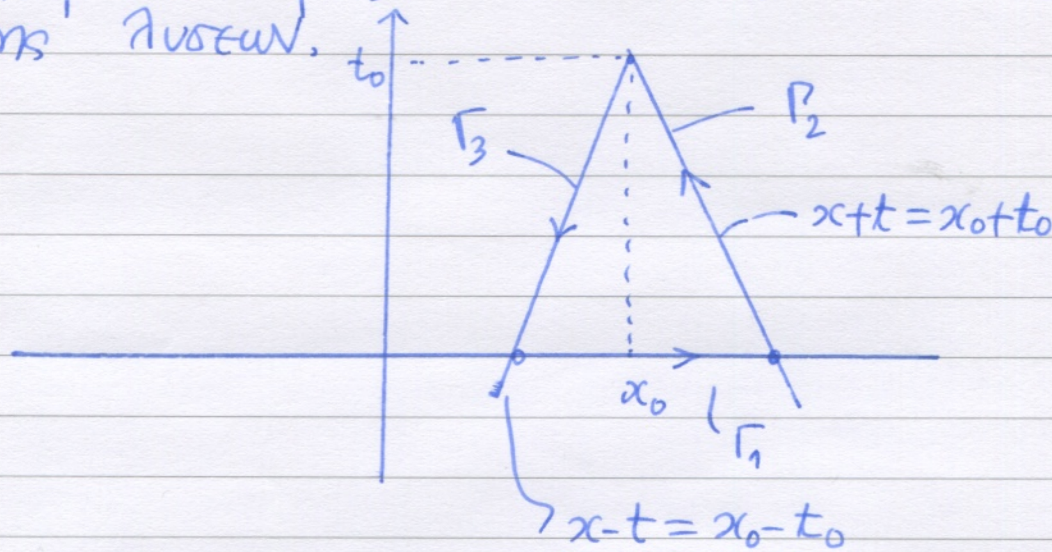
3ος Τροπος (Χρηση του Θ. Green)



D απλα συνεκτικο, τοτε

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

Στην περιπτωση μας D ειναι ο κωνος εξαρτησης λυσεων.



$(y=t)$

$$Q(x,t) = -u_x(x,t)$$

$$P(x,t) = -u_t(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad Q_x(x,t) - P_t(x,t) = -u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) = 0$$

και επομενως

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dt) = 0.$$

Ομως

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dt) = \int_{\Gamma_1} (P\,dx + Q\,dt)$$

$$+ \int_{\Gamma_2} (P\,dx + Q\,dt)$$

$$+ \int_{\Gamma_3} (P\,dx + Q\,dt).$$

οποτε $\displaystyle\int_{\Gamma_1} (P\,dx + Q\,dt)$

$\Gamma_1 : \quad (x,0), \quad x \in [x_0 - t_0,\ x_0 + t_0], \ t = 0$

αρα

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} -u_t(\vartheta, 0)\,d\vartheta = -\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(\vartheta)\,d\vartheta$$

Παραμετρικοποιηση της $\Gamma_2 : \quad (x_0 + t_0 - t,\ t), \quad t \in [0, t_0].$

$$x = x_0 + t_0 - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\int_{\Gamma_2} = \int_0^{t_0} \left[-u_t\,dx - u_x\,dt \right] =$$

$$= \int_0^{t_0} (+u_t\, dt + u_x\, dx)$$

$$= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}\, u(x(t),t)\, dt$$

$$= u(x(t_0),t_0) - u(x(0),0)$$

$$= u(x_0,t_0) - u(x\cancel{t_0}\overset{t_0}{}, 0)$$

$$= u(x_0,t_0) - f(x_0 + t_0)$$

Παρομοια

$$dx = dt$$

$$\Gamma_3 : \quad (x(t),t) = (t + x_0 - t_0, t) \quad , \quad t \in [0,t_0]$$

(Προσοχη εχω αντιθετο προσανατολισμο!)

και αρα

$$\int_{\Gamma_3} (-u_t\, dx - u_x\, dt) = -\int_0^{t_0} (-u_t\, dt - u_x\, dx)$$

$$= \int_0^{t_0} (u_t\, dt + u_x\, dx)$$

$$= \int_0^{t_0} \frac{du}{dt}\, dt = u(x(t_0),t_0) - u(x(0),0)$$

$$= u(x_0,t_0) - u(x_0-t_0,0)$$

$$= u(x_0,t_0) - f(x_0-t_0).$$

και τελικα εχουμε :

$$-\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(\theta)d\theta + u(x_0,t_0) - f(x_0+t_0)$$

$$+ u(x_0,t_0) - f(x_0-t_0) = 0$$

$$\Rightarrow u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+t_0) + f(x_0-t_0)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(\theta)d\theta .$$

$\boxdot$

Τι θα γινοτανε αν ειχαμε

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad , x\in\mathbb{R}, t>0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad x\in\mathbb{R} \qquad ?$$

Τι θα αλλάξε στο Green?

Θα είχαμε

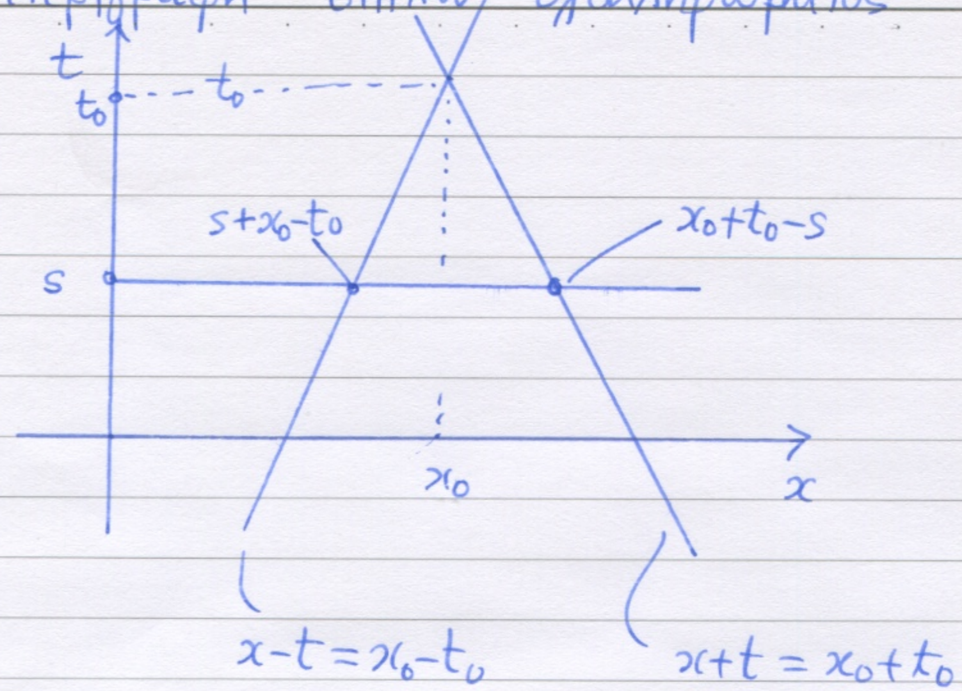
$$\int_{\partial D} \left[-u_t\, dx - u_x\, dt\right] = \iint_D \left(-u_{xx} + u_{tt}(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= \iint_D f(x,t)\, dX$$

$$\Leftrightarrow 2u(x_0,t_0) - f(x_0-t_0) - f(x_0+t_0) - \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(\theta)\, d\theta = \iint_D f(x,t)\, dx\, dt$$

$$\Rightarrow u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+t_0) + f(x_0-t_0)\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\iint_D f(x,t)\, dx\, dt.$$

Περιγραφή διπλού ολοκληρώματος



$$\iint_D f(x,t)\,dx\,dt = \int_0^{t_0}\left(\int_{s+x_0-t_0}^{x_0+t_0-s} f(x,s)\,dx\right)ds$$

και επομένως

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)\,d\theta$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t}\left(\int_{s+x-t}^{x+t-s} f(\xi,s)\,d\xi\right)ds$$

Τι ομαλότητα χρειαζόμαστε για να είναι η λύση μας κλασική;

<u>Απ</u>: $f \in C^2$, $g \in C^1$

για την μη ομογενή $f(x,t)$, $f \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$.