ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

30-4-2020

Επιλυση πληρους προβληματος

Κυματικη Εξισωση

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t)\ ,\quad 0 \leq x \leq \pi\ ,\quad t > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = g_1(t) \\ u_x(\pi,t) = g_2(t) \end{array}\right. ,\quad t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array}\right. ,\quad 0 \leq x \leq \pi$$

Οπως ειδαμε το <u>πρωτο βημα</u> ειναι να τη φερουμε σε μια αντιστοιχη Δ.Ε με ομογενεις Συνοριακες Συνθηκες.

Για τον σκοπο αυτο θετουμε

$$u(x,t) = a(x)g_1(t) + \beta(x)g_2(t) + v(x,t)$$

Επιλεγουμε το v ωστε $v(0,t) = 0$ και αρα πρεπει

$$a(0)g_1(t) + \beta(0)g_2(t) = g_1(t)$$

επειδη ζητάμε μια επιλογη

επιλεγουμε $a(0)=1$ και $\beta(0)=0$

επισης επειδη

$$u_x(x,t) = a'(x)\, g_1(t) + \beta'(x)\, g_2(t) + v_x(x,t)$$

προκυπτει:

$$a'(\pi)\, g_1(t) + \beta'(\pi)\, g_2(t) = g_2(t)$$

και για τον λογο αυτο επιλεγουμε

$$a'(\pi) = 0, \quad \beta'(\pi) = 1.$$

Μια επιλογη ειναι

$$a(x) = (x-\pi)^2 + 1 - \pi^2 = x^2 - 2\pi x + 1$$

$$\beta(x) = x$$

και επομενως:

$$u(x,t) = (x^2 - 2\pi x + 1)\, g_1(t) + x\, g_2(t) + v(x,t)$$

$$\Rightarrow u_{tt}(x,t) = (x^2 - 2\pi x + 1)\, g_1''(t) + x\, g_2''(t) + v_{tt}(x,t)$$

$$u_{xx}(x,t) = 2 g_1(t) + v_{xx}(x,t)$$

Αν αντικαταστησουμε την u, η v ικανοποιει:

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = \bar{f}(x,t) \;, 0<x\leq\pi,\; t>0$$

$$\left.\begin{aligned} v(0,t) &= 0 \\ v_x(\pi,t) &= 0 \end{aligned}\right\} , t\geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} v(x,0) &= \bar{\varphi}(x) \\ v_t(x,0) &= \bar{\psi}(x) \end{aligned}\right\} , 0\leq x\leq\pi$$

οπου

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - (x^2-2\pi x+1)\, g_1''(t) - x g_1''(t) - 2g_1(t)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - (x^2-2\pi x+1)\, g_1(0) - x\, g_2(0)$$

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) - (x^2-2\pi x+1)\, g_1'(0) - x\, g_2'(0).$$

<u>Βημα 2ο</u> επιλυουμε το προβλημα:

$$w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0 \;,\quad 0\leq x\leq\pi,\; t>0$$

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w_x(\pi,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad t\geq 0.$$

με τη μεθοδο του Fourier.

Βρισκουμε λυσεις στη μορφη

$$w(x,t) = A(x)\,B(t)$$

οποτε οι συνοριακες συνθηκες δινουν

$$A(0) = A'(\pi) = 0$$

και η Δ.Ε.

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{B''(t)}{B(t)} = -\lambda \quad (\text{γιατί;})$$

Το πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0 \ , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$A(0) = A'(\pi) = 0$$

μπορούμε εύκολα να δούμε (πως;) ότι δεν

έχει μη θετικές ιδιοτιμές λ. Αν τώρα $\lambda > 0$

η χαρακτηριστική εξίσωση $k^2 + \lambda = 0 \ \ (e^{kx})$

έχει ρίζες $k = \pm \sqrt{\lambda}\, i$ (γιατί;)

και επομένως

$$A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$\Rightarrow \quad A'(x) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad -\text{"}-$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0) = 0 \\ \\ A'(\pi) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ \\ \cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 = \cos(\frac{\pi}{2}) \end{array}\right\}.$$

επομένως $\quad \sqrt{\lambda}\pi = \underbrace{k\pi - \frac{\pi}{2}}_{>0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$k - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{2} \underset{k \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} k \in \mathbb{N}.$$

Ιδιοτιμες: $\sqrt{\lambda_k} = k - \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$

$\left(\Rightarrow \lambda_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right)$

Ιδιοσυναρτησεις $A_k(x) = \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Παμε στο 2ο προβλημα :

$$B''(t) + \left(k - \tfrac{1}{2}\right)^2 B(t) = 0$$

$\Rightarrow$ ~~..........~~ Λυσεις $\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)$, $\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)$

Γενικη λυση

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) + \beta_k \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right) \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

<u>Βημα 3ο</u> Αναλυση της $\bar{f}$ ~~σε~~ σειρα Fourier με βαση των $\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)$, $k \in \mathbb{N}$

$$\bar{f}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t) \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right) \quad , \text{ οπου}$$

με ολοκληρωση προκυπτουν οι συντελεστες $c_k(t)$:

$$\int_0^{\pi} \bar{f}(x,t) \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx = c_k(t) \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx}_{=\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow c_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \bar{f}(x,t) \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx \quad , \; k \in \mathbb{N}.$$

<u>Βημα 4ο</u> Βρισκουμε λυση στο προβλημα

$$q_{tt}(x,t) - q_{xx}(x,t) = c_k(t)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

$$q(0,t) = q_x(\pi,t) = 0$$

$$q(x,0) = c_k(0)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

$$q_t(x,0) = c_k'(0)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

Τη λυση τη βρισκουμε στη μορφη

$$q(x,t) = Q_k(t)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right) \quad , k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad q_{tt}(x,t) = Q_k''(t)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right) \quad , k\in\mathbb{N}$$

$$q_{xx}(x,t) = -Q_k(t)\,(k-\tfrac{1}{2})^2\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

Αρα πρεπει

$$Q_k''(t) + (k-\tfrac{1}{2})^2 Q_k(t) = c_k(t)$$

$$Q_k(0) = c_k(0)$$
$$Q_k'(0) = c_k'(0)$$

Η λυση του ανωτερω προβληματος θα γινει με τη μεθοδο των προσδιοριστεων συντελεστων.

Εχουμε $\quad Q_k(t) = \mu_1(t)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) + \mu_2(t)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right)$

$$\Rightarrow \quad \mu_1'(t)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) + \mu_2'(t)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) = 0$$

$$-\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\mu_1'(t)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) + \left(k-\tfrac{1}{2}\right)\mu_2'(t)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) = c_k(t)$$

Λυνοντας το συστημα και με ολοκληρωση προκυπτει:

$$\mu_1(t) = \mu_1 - \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\int_0^t c_k(s)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds$$

$$\mu_2(t) = \mu_2 + \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\int_0^t c_k(s)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds$$

και επομενως:

$$Q_k(t) = \mu_1\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) - \frac{\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)}{k-\frac{1}{2}}\int_0^t c_k(s)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds$$

$$+\mu_2\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) + \frac{\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)}{k-\frac{1}{2}}\int_0^t c_k(s)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds$$

$$Q_k(0) = c_k(0) \Leftrightarrow \mu_1 = c_k(0)$$

$$Q_k'(0) = c_k'(0) \Leftrightarrow \left(k-\tfrac{1}{2}\right)\mu_2 = c_k'(0) \Leftrightarrow \mu_2 = \frac{c_k'(0)}{k-\frac{1}{2}}.$$

$$Q_k(t) = c_k(0)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) - \frac{\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)}{k-\frac{1}{2}}\int_0^t c_k(s)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds$$

$$+\frac{c_k'(0)}{k-\frac{1}{2}}\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) + \frac{\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)}{k-\frac{1}{2}}\int_0^t c_k(s)\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds$$

Βημα 5ο Με αρχη υπερθεσης η συναρτηση

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(0)\cos\left((k-\tfrac{1}{2})t\right)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k'(0)}{k-\frac{1}{2}} \sin\left((k-\tfrac{1}{2})t\right)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos\left((k-\frac{1}{2})t\right)\sin\left((k-\frac{1}{2})x\right)}{k-\frac{1}{2}} \int_0^t c_k(s)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})s\right)ds$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left((k-\frac{1}{2})t\right)\sin\left((k-\frac{1}{2})x\right)}{k-\frac{1}{2}} \int_0^t c_k(s)\cos\left((k-\tfrac{1}{2})s\right)ds$$

Λυνει το προβλημα:

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right) = f(x,t)$$

$$v(0,t) = 0$$

$$v_x(\pi,t) = 0$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(0)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)$$

$$v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k'(0)\sin\left((k-\tfrac{1}{2})x\right).$$

Οπότε πρέπει

$$\overline{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(0) \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

$$\Longrightarrow \quad c_k(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overline{\varphi}(x)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k'(0)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx$$

$$\Longrightarrow \quad c_k'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overline{\psi}(x)\sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)dx \qquad k\in\mathbb{N}$$

και έτσι προσδιορίσαμε τη λύση! (ν)

Εύρεση λύσης στο πρόβλημα του Poisson

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \quad 0\le x\le \pi, 0\le y\le 1$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad 0\le x\le \pi$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \quad 0\le y\le 1.$$

Ακολουθούμε αντίστοιχη διαδικασία:

Βήμα 1ο Βρίσκουμε τη γενική λύση του προβλήματος

$$w_{xx}(x,y) + w_{yy}(x,y) = 0, \quad 0\le x\le \pi, \ 0\le y\le 1$$

$$w(x,0) = w(x,1) = 0, \quad 0\le x\le \pi.$$

Εναλλακτικα

του προβληματος:

$$w_{xx}(x,y) + w_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$w(0,y) = w(\pi,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Η διαδικασια ειναι παραλληλη

επιλεγουμε το 2° προβλημα.

Μεθοδος Fourier, λυση στη μορφη

$$w(x,y) = A(x)\,B(y)$$

Οι Συνοριακες συνθηκες δινουν:

$$A(0) = A(\pi) = 0$$

και η Δ.Ε.

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda$$

Οποτε προκυπτει το προβλημα ιδιοτιμων

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$A(0) = A(\pi) = 0$$

που εχουμε μελετησει πολλαπλα.

$\Rightarrow$ Ιδιοτιμες $\lambda_n = n^2$

Ιδιοσυναρτησεις $A_n(x) = \sin(nx)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Βημα 2^o Αναλυουμε την f σε σειρα Fourier των

$$\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

δηλ

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(y) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \quad c_n(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \sin(nx)\,dx \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Βημα 3^o Βρισκουμε λυση στο προβλημα

$$q_{xx}(x,y) + q_{yy}(x,y) = c_n(y) \sin(nx)$$

στη μορφη

$$q(x,y) = Q_n(y) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \quad q_{xx}(x,y) = -n^2 Q_n(y) \sin(nx)$$

$$q_{yy}(x,y) = Q_n''(y) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \quad (Q_n''(y) - n^2 Q_n(y)) \sin(nx) = c_n(y) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \quad Q_n''(y) - n^2 Q_n(y) = c_n(y) \quad , n \in \mathbb{N}$$

Ευρεση λυσης της

$$Q_n''(y) - n^2 Q_n(y) = c_n(y)$$

Μεθοδος Lagrange:

$$Q_n(y) = \mu_1(y)\cosh(ny) + \mu_2(y)\sinh(ny)$$

$$Q_n'(y) = \overbrace{\mu_1'(y)\cosh(ny) + \mu_2'(y)\sinh(ny)}^{0}$$

$$+ n\,\mu_1(y)\sinh(ny) + n\,\mu_2(y)\cosh(ny)$$

$$Q_n''(y) = n\,\mu_1'(y)\sinh(ny) + n\,\mu_2'(y)\cosh(ny)$$

$$+ \underbrace{n^2\mu_1(y)\cosh(ny) + n^2\mu_2(y)\sinh(ny)}_{n^2 Q_n(y)}$$

$$\Rightarrow Q_n''(y) - n^2 Q_n(y) = n\,\mu_1'(y)\sinh(ny) + n\,\mu_2'(y)\cosh(ny)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \mu_1'(y)\sinh(ny) + \mu_2'(y)\cosh(ny) &= \frac{c_n(y)}{n} \\ \mu_1'(y)\cosh(ny) + \mu_2'(y)\sinh(ny) &= 0 \end{aligned}\right\} (\Sigma)$$

Λυνοντας το συστημα (Σ) προκυπτει:

$$\mu_1'(y) = -\frac{c_n(y)}{n}\sinh(ny)$$

$$\mu_2'(y) = \frac{c_n(y)}{n}\cosh(ny)$$

και με ολοκλήρωση

$$\mu_1(y) = a_n - \frac{1}{n}\int_0^y c_n(s)\sinh(ns)\,ds$$

$$\mu_2(y) = \beta_n + \frac{1}{n}\int_0^y c_n(s)\cosh(ns)\,ds \qquad 0 \le y \le 1$$

και τελικά προκύπτει:

$$Q_n(y) = a_n\cosh(ny) - \frac{\cosh(ny)}{n}\int_0^y c_n(s)\sinh(ns)\,ds + \beta_n\sinh(ny) + \frac{\sinh(ny)}{n}\int_0^y c_n(s)\cosh(ns)\,ds \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Οπότε

$$q_n(x,y) = a_n\cosh(ny)\sin(nx) + \beta_n\sinh(ny)\sin(nx) - \frac{\sin(nx)\cosh(ny)}{n}\int_0^y c_n(s)\sinh(ns)\,ds + \frac{\sin(nx)\sinh(ny)}{n}\int_0^y c_n(s)\cosh(ns)\,ds.$$

<u>Βήμα 4°</u> Γενική λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(y)\sin(kx) = f(x,y)$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$$

Η γενική λύση είναι

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x,y)$$

$$\Rightarrow \ u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cosh(ky) + \beta_k \sinh(ky)\right) \sin(kx)$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)\cosh(ky)}{k} \int_0^y c_k(s)\sinh(ks)ds$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)\sinh(ky)}{k} \int_0^y c_k(s)\cosh(ks)ds \, .$$

Βημα 5ο (Τελικο) ευρεση της λυσης του προβληματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \ , \ 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0 \ , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Χρησιμοποιουμε την γενικη λυση που βρηκαμε

απλα πρεπει επιπροσθετα

$$u(x,0) = u(x,1) = 0.$$

$$u(x,0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(kx) = 0 \ , \ \text{οποτε} \quad a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$u(x,1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sinh(k) \sin(kx)$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cosh(k)}{k} \int_0^1 c_k(s)\sinh(ks)ds \, \sin kx$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh(k)}{k} \int_0^1 c_k(s)\cosh(ks)ds \, \sin kx \ = 0$$

και επομένως πρέπει

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sinh(k)\,\sin(kx) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cosh k}{k}\int_0^1 c_k(s)\sinh(ks)ds - \frac{\sinh k}{k}\int_0^1 c_k(s)\cosh(ks) \right)\sin(kx)$$

και επομένως

$$\beta_k \sinh(k) = \frac{\cosh(k)}{k}\int_0^1 c_k(s)\sinh(ks)ds - \frac{\sinh k}{k}\int_0^1 c_k(s)\cosh(ks)ds$$

$$\Rightarrow \beta_k = \frac{\cosh k}{k\sinh k}\int_0^1 c_k(s)\sinh(ks)ds - \frac{1}{k}\int_0^1 c_k(s)\cosh(ks)ds$$

$$\forall\, k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u(x,y) =$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\cosh k}{k\sinh k}\int_0^1 c_k(s)\sinh(ks)ds - \frac{1}{k}\int_0^1 c_k(s)\cosh(ks)ds\right)\sinh(ky)\cdot\sin(nx)$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)\cosh(ky)}{k}\int_0^y c_k(s)\sinh(ks)ds$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)\sinh(ky)}{k}\int_0^y c_k(s)\cosh(ks)ds$$

όπου

$$c_k(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin(kx)dx \quad , \quad k\in\mathbb{N}$$

Επομενο προβλημα

Αλλες Συμμετριες

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = f(x,y) \qquad , \; x^2+y^2=1 .$$