ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

31 - 3 - 2020

ΜΔΕ α' ταξης

Μεθοδος Χαρακτηριστικων

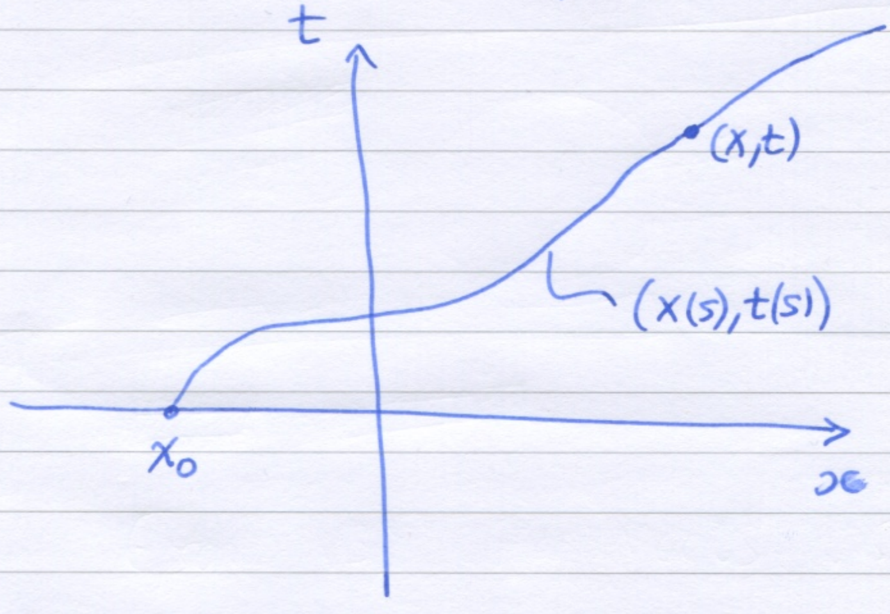
Παραδειγμα Να λυθει το ΠΑΤ (προβλημα Cauchy)

$$u_t(x,t) + x\, u_x(x,t) = x u(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

οπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δοθεισα ομαλη συναρτηση.

Λυση



επιλεγουμε χαρακτηριστικη καμπυλη $(x(s), t(s))$, $s \geq 0$

που για $s=0$ ειναι στον αξονα των αρχικων δεδομενων και εστω

$$(x(0), t(0)) = (x_0, 0),$$

και για κάποια τιμή της παραμέτρου s, $\bar{s}$ διέρχεται από το σημείο (x,t) που θέλουμε να βρούμε τη λύση, οπότε

$$(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x,t).$$

Ο προσδιορισμός της καμπύλης θα γίνει ώστε όταν παραγωγίζουμε τη λύση πάνω στην χαρακτηριστική καμπύλη, να παίρνουμε το πρώτο μέρος (το γράμμικο των u_x, u_t) της Δ.Ε,

οπότε επειδή

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) \overset{\text{Κανόνας αλυσίδας}}{=} u_x(x(s), t(s)) \frac{dx}{ds} + u_t(x(s), t(s)) \frac{dt}{ds}$$

Επιλέγουμε τη χαρακτηριστική ώστε

$$\frac{dx}{ds}(s) = x(s) \quad , \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dt}{ds}(s) = 1 \quad , \quad t(0) = 0$$

Όπως και πριν έχουμε $t(s) = s$ και

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-s} x(s)\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-s} x(s) = e^{-0} x(0) = x_0$$

$$\Leftrightarrow x(s) = x_0 e^{s}.$$

Για την επιλογή αυτή της χαρακτηριστικής καμπύλης, η Δ.Ε. γράφεται :

$$\frac{d}{ds} u(x(s),t(s)) = u_x\, x'(s) + u_t\, t'(s)$$

$$= x\, u_x(x(s),t(s)) + u_t(x(s),t(s))$$

$$= x(s)\, u(x(s),t(s)).$$

και αν θεσουμε $\sigma(s) = u(x(s),t(s))$

$$= u(x_0 e^{s}, s), \quad \sigma(0) = f(x_0)$$

τοτε $\sigma'(s) = x_0 e^{s} \sigma(s) \iff$

$$e^{-x_0 e^{s}} \sigma'(s) - x_0 e^{s} e^{-x_0 e^{s}} \sigma(s) = 0 \iff$$

$$\left(e^{-x_0 e^{s}} \sigma(s)\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$e^{-x_0 e^{s}} \sigma(s) = e^{-x_0 e^{0}} \sigma(0) \iff$$

$$\sigma(s) = e^{-x_0 + x_0 e^{s}} f(x_0).$$

$$u(x_0 e^{s}, s) = e^{-x_0 + x_0 e^{s}} f(x_0).$$

Για $s = \bar{s}$ παιρνουμε

$$u(x_0 e^{\bar{s}}, \bar{s}) = e^{-x_0 + x_0 e^{\bar{s}}} f(x_0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 e^{\bar{s}} = x \\ \bar{s} = t \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x_0 = x e^{-t} \\ \bar{s} = t \end{array}\right.$$

και επομενως

$$u(x,t) = e^{-xe^{-t}+xe^{-t}\cdot e^{t}} f(xe^{-t})$$

$$= e^{x-xe^{-t}} f(xe^{-t}), \quad x\in\mathbb{R},\ t>0.$$

Για να ειναι η λυση κλασικη πρεπει

$f\in C^1(\mathbb{R})$ και τοτε $u\in C^{1,1}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$.

$\boxdot$

Τι χρειαζεται για να δουλευει η προηγουμενη μεθοδος των χαρακτηριστικων;

<u>Απαντηση</u>: ειναι απαραιτητο η Δ.Ε να εχει τη μορφη

$$a(x,t,u)\, u_x(x,t) + \beta(x,t,u)\, u_t(x,t) = \gamma(x,t,u).$$

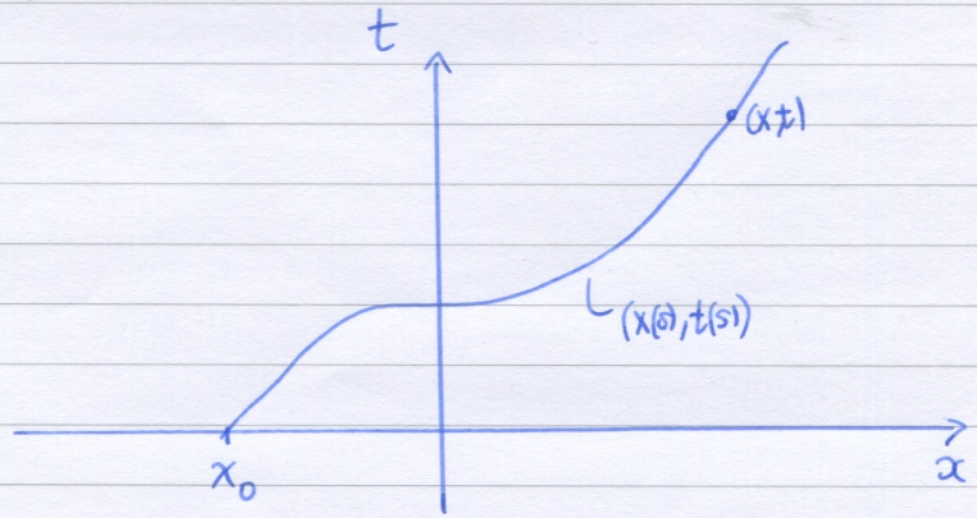
<u>Παραδειγμα</u> Να λυθει το προβλημα Cauchy

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = u^2(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t>0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

οπου $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$ ομαλη συναρτηση. Τι γινεται αν η f παιρνει και θετικες τιμες;

<u>Λυση:</u>



Οπως πριν επειδη απο τον κανονα της αλυσιδας

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x(x(s), t(s))\, x'(s) + u_t(x(s), t(s))\, t'(s)$$

επιλεγουμε την καμπυλη απο:

$$x'(s) = 1, \quad x(0) = x_0$$
$$t'(s) = 1, \quad t(0) = 0$$

οποτε $\quad t(s) = s \quad$ και

$$(x(s) - s)' = 0 \Rightarrow x(s) - s = x(0) - 0$$
$$= x_0$$

$$\Rightarrow x(s) = x_0 + s,$$

και τοτε αν

$$\sigma(s) = u(x(s), t(s)) = u(x_0 + s, s),$$

$$\sigma'(s) = u_x(x(s), t(s)) + u_t(x(s), t(s))$$
$$\overset{\Delta.E}{=} u^2(x(s), t(s)) = \sigma^2(s).$$

Επειδη $\quad \sigma(0) = u(x_0, 0) = f(x_0) \neq 0 \quad$ και λογω

συνεχειας της σ στο $s = 0$, προκυπτει

οτι για μικρα s, $\sigma(s) \neq 0$ και τοτε

$$\frac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\sigma(s)}\right) = \frac{d}{ds} s \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\sigma(s)} - s\right) = 0,$$

και επομενως

$$-\frac{1}{\sigma(s)} - s = -\frac{1}{\sigma(0)} - 0 \iff$$

$$\frac{1}{\sigma(s)} + s = \frac{1}{\sigma(0)} = \frac{1}{f(x_0)}$$

$$\iff \frac{1}{\sigma(s)} = \frac{1}{f(x_0)} - s$$

$$\iff \frac{1}{u(x_0+s, s)} = \frac{1}{f(x_0)} - s .$$

Οποτε αν $\bar{s}$, η τιμη της παραμετρου s ωστε

$$\left.\begin{aligned} x_0 + \bar{s} &= x \\ \bar{s} &= t \quad (\bar{s} > 0) \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} x_0 &= x - t \\ \bar{s} &= t \end{aligned}\right.$$

εχουμε

$$\frac{1}{u(x,t)} = \frac{1}{f(x-t)} - t \quad (<0)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\frac{1}{f(x-t)} - t} = \frac{f(x-t)}{1 - t f(x-t)}$$

Επειδη $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, προυποτει οτι η λυση $u(x,t) = \dfrac{f(x-t)}{1-t f(x-t)}$

οριζεται $\forall\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$

Για να ειναι κλασικη η λυση, πρεπει
$$f \in C^1(\mathbb{R})$$
και τοτε $u \in C^1(\mathbb{R}\times(0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$.

Στο ερωτημα τι γινεται αν η f γινεται θετικη σε καποια σημεια;

Αν x_0 ωστε $f(x_0) > 0$, τοτε ενω για $t=0$, ο παρονομαστης ειναι 1

ενδεχεται η εξισωση
$$1 - t f(x-t) = 0$$
να εχει θετικες λυσεις (ως προς t) και τοτε η λυση να μην οριζεται τη χρονικη στιγμη t.

ΜΔΕ 2ης τάξης

Ας κάνουμε μια επανάληψη.

Είδαμε τη Δ.Ε

$$u_t(x,t) = k\, u_{xx}(x,t)$$ (Εξ. θερμότητας)

(Παραβολική Εξίσωση)

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$ (Εξ. παλλόμενης χορδής)

(Εξ. κύματος)

(Υπερβολική εξίσωση)

$$\Delta u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$ (Εξ. Poisson)

(Ελλειπτική Εξίσωση)

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$ (Αρμονικές συναρτ.)

<u>Σημαντικό</u> Οι ανωτέρω Δ.Ε συμπεριφέρονται <u>ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ</u>!

Είναι σημαντικό να αναγνωρίζουμε το είδος της Δ.Ε.

Ταξινομηση $2^{ης}$ ταξης ΜΔΕ.

έστω η Δ.Ε.

$$a(x,y)\,u_{xx}(x,y) + 2\beta(x,y)\,u_{xy}(x,y) + \gamma(x,y)\,u_{yy} + \delta(x,y)\,u_x(x,y) + \varepsilon(x,y)\,u_y(x,y) + J(x,y)u(x,y) = f(x,y).$$

Ποιο ειναι το ειδος ;

<u>Απαντηση</u> Εξαρταται απο το $\Delta(x,y) = 4\beta^2(x,y) - 4a(x,y)\gamma(x,y)$

$$= 4\left(\beta^2(x,y) - a(x,y)\gamma(x,y)\right).$$

Ειδικοτερα :

εαν $\beta^2(x,y) - a(x,y)\gamma(x,y) > 0$ ειναι <u>υπερβολικη</u>

εαν $\beta^2(x,y) - a(x,y)\gamma(x,y) < 0$ ειναι <u>ελλειπτικη</u>

εαν $\beta^2(x,y) - a(x,y)\gamma(x,y) = 0$ ειναι <u>παραβολικη</u>

(+ καποιος απο τους $a(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$ <u>δεν</u> ειναι μηδεν)

Παραδειγμα Δινεται η Δ.Ε

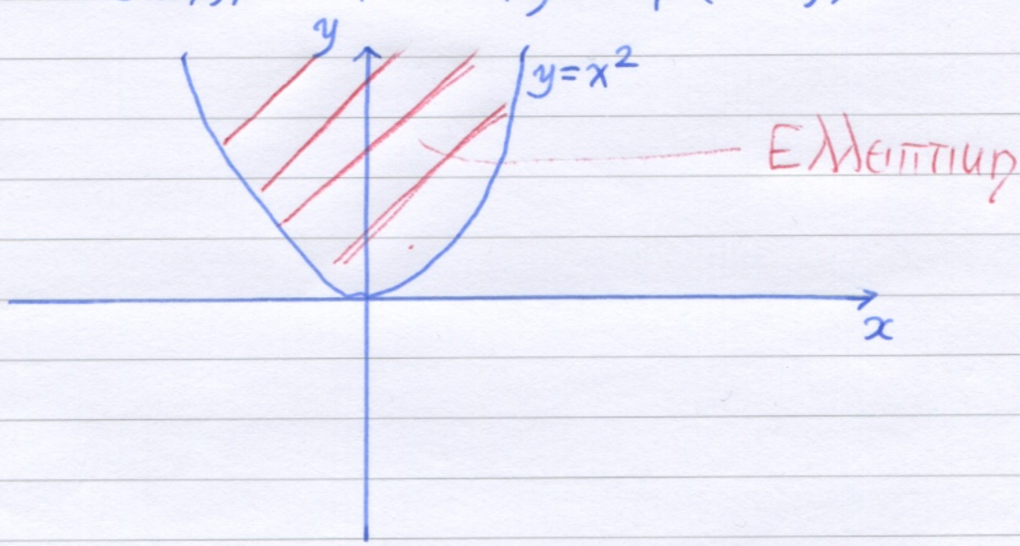
$$u_{xx}(x,y) + 2x\, u_{xy}(x,y) + y\, u_{yy}(x,y) = 0.$$

Βρειτε σε ποια σημεια του επιπεδου $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ η Δ.Ε ειναι ελλειπτικη, σε ποια υπερβολικη και σε ποια παραβολικη.

Απαντηση Εχουμε:

$$\Delta(x,y) = 4x^2 - 4y = 4(x^2 - y).$$

οποτε



Επομενως: Αν $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>x^2\}$ ειναι το χωριο που η Δ.Ε. ειναι Ελλειπτικη διοτι

$$\Delta = 4(x^2-y) < 0.$$

Ενω στο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y<x^2\}$ ειναι υπερβολικη και στο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=x^2\}$ ειναι παραβολικη.

Να λυθει το προβλημα

$$(y^2+u(x,y))\,u_x(x,y) + y\,u_y(x,y) = 1\,, \quad x>0,\ y\in\mathbb{R}$$

$$u(0,y) = 0\,, \quad y\in\mathbb{R}$$

<u>Λυση:</u> Χαρακτηριστικη εξισωση

$$x'(s) = y^2(s) + u(x(s),y(s))\,, \quad x(0)=0$$

$$y'(s) = y(s)\,, \quad y(0)=y_0$$

$$\sigma'(s) = 1\,, \quad \cancel{y}\ \sigma(0)=0$$

οπου $\sigma(s) = u(x(s),y(s))$ και επομενως το συστημα ειναι

$$x'(s) = y^2(s) + \sigma(s)\,, \quad x(0)=0$$

$$y'(s) = y(s)\,, \quad y(0)=y_0$$

$$\sigma'(s) = 1\,, \quad \sigma(0)=0.$$

$$\sigma'(s) = 1 \quad , \quad \sigma(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(s) = s + \sigma(0) = s . \qquad (1)$$

$$y'(s) = y(s), \quad y(0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-s} y'(s) - e^{-s} y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{-s} y(s)\right)' = 0$$

$$e^{-s} y(s) = e^{-0} y(0) = y_0$$

$$\Rightarrow \quad y(s) = y_0 e^{s} \qquad (2)$$

$$x'(s) = y^2(s) + \sigma(s) \quad , \quad x(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x'(s) = y_0^2 e^{2s} + s$$

$$\Rightarrow \quad \left(x(s) - \frac{y_0^2}{2} e^{2s} - \frac{s^2}{2}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(s) - \frac{y_0^2}{2} e^{2s} - \frac{s^2}{2} = -\frac{y_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = \frac{y_0^2}{2}\left(e^{2s} - 1\right) + \frac{s^2}{2} . \qquad (3)$$

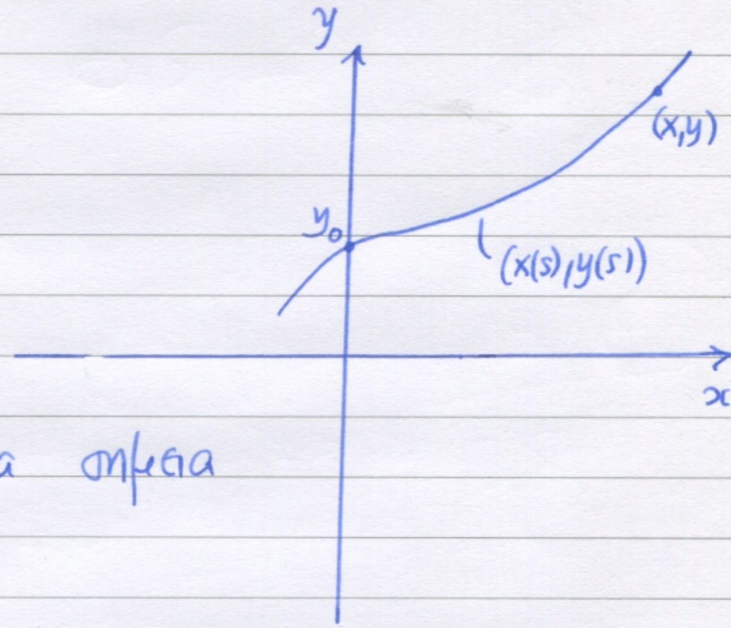
Εαν $\bar{s}$, η τιμη της παραμετρου ωστε

$x(\bar{s}) = x$

$y(\bar{s}) = y$

Τοτε εχουμε το συστημα

$$(\Sigma)\begin{cases} \dfrac{y_0^2}{2}\left(e^{2\bar{s}}-1\right) + \dfrac{\bar{s}^2}{2} = x \\ \\ y_0 e^{\bar{s}} = y \end{cases}$$



Για την επιλυση του συστηματος:

Αρχικα διακρινουμε τα σημεια $(x,0)$, $x>0$.

Τοτε αναγκαστικα $y_0 = 0$, οποτε $\dfrac{\bar{s}^2}{2} = x \Leftrightarrow$

$\bar{s} = \sqrt{2x}$, και

$$\sigma(\bar{s}) = \bar{s} \Leftrightarrow u(x(\bar{s}), y(\bar{s})) = \bar{s} \Leftrightarrow u(x,0) = \sqrt{2x}$$
$$x>0.$$

Εαν $y \neq 0$, τοτε πρεπει το y_0 να ειναι τετοιο ωστε $e^{\bar{s}} = \dfrac{y}{y_0} > 0 \Leftrightarrow \bar{s} = \ln\left(\dfrac{y}{y_0}\right)$, και το y_0 προσδιοριζεται απο:

$$\ln^2\left(\frac{y}{y_0}\right) - y_0^2 = 2x - y^2. \quad (*)$$

και τοτε

$$u(x,y) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

πω το y_0 βρισκεται (οριζεται) απο την $(*)$.