ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

5 - 5 - 2020

Επομενος στοχος:

επιλυση του προβληματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y) \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad , \quad x^2+y^2=1,$$

οπου $f : B_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ και

$g : \partial B_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

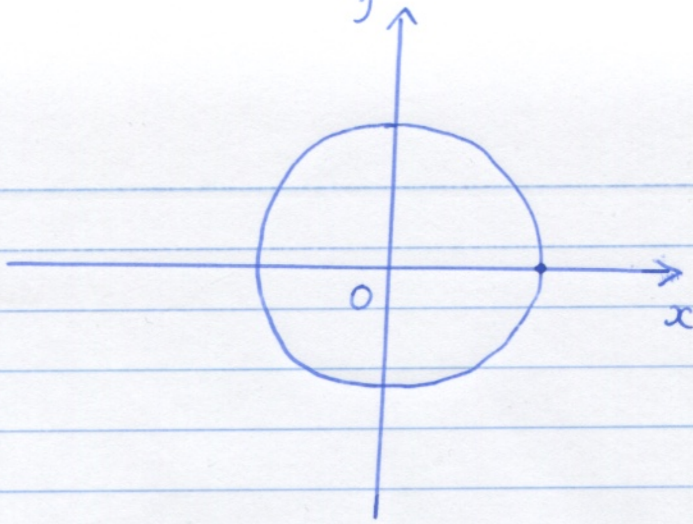
ειναι δοθεισες ομαλες συναρτησεις.

Οπως εχουμε κανει μεχρι τωρα ξεκιναμε απο την επιλυση του:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad , \quad x^2+y^2=1.$$

Αμεσα μπορουμε να δουμε οτι η μεθοδος Fourier <u>δεν</u> μπορει να εφαρμοστει, λογω της φυσης του χωριου:



δεν μπορουμε να βρουμε λυσεις στη μορφη,

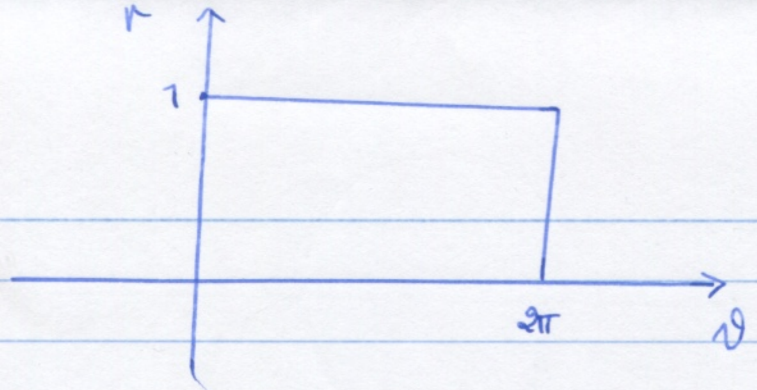
$$u(x,y) = A(x)\,B(y).$$

Η λυση στο προβλημα μας ειναι να αξιοποιησουμε τις συμμετριες του χωριου. Ειδικοτερα αν εισαγουμε πολικες συντεταγμενες $(x,y) \neq (0,0)$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\left(r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \right)$$

υπαρχει ακριβως ενα τοξο $\theta \in [0, 2\pi)$, και τοτε στο (r,θ) επιπεδο το χωριο ειναι:



ορθογωνιο!

Επομενως θα μετασχηματισουμε το αρχικο προβλημα σε πολικες συντεταγμενες, θετοντας

$$u(x,y) = v(r,\vartheta) \quad , \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 < r \leq 1 \end{matrix}$$

$$x = r\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\vartheta$$

οποτε απο τον κανονα της αλυσιδας παιρνουμε

$$u_x(x,y) = v_r(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x} + v_\theta(r,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
$$u_y(x,y) = v_r(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial y} + v_\theta(r,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

ομως επειδη

$$r^2(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$2r\,r_x = 2x \Rightarrow r_x(x,y) = \frac{x}{r} = \cos\vartheta$$

$$2r\,r_y = 2y \Rightarrow r_y(x,y) = \frac{y}{r} = \sin\vartheta,$$

Επισης $x = r\cos\vartheta \Rightarrow$

$$1 = r_x\cos\theta - r\sin\theta\,\theta_x$$

$$1 = \cos^2\theta - r\sin\theta\, \theta_x$$

$$\Rightarrow \quad \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

$$x = r\cos\theta \Rightarrow \quad 0 = r_y \cos\theta - r\sin\theta\, \theta_y$$

$$0 = \sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\, \theta_y$$

$$\Rightarrow \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Οποτε

$$u_x(x,y) = v_r(r,\theta)\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r} v_\theta(r,\theta)$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}v_\theta\right)\frac{\partial r}{\partial x} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}v_\theta\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \left(\cos\theta\, v_{rr}(r,\theta) + \frac{\sin\theta}{r^2}v_\theta \cancel{\theta} - \frac{\sin\theta}{r}v_{\theta r}\right)\cos\theta$$

$$+\left(\cos\theta\, v_{r\theta} - \sin\theta\, v_r - \frac{\cos\theta}{r}v_\theta - \frac{\sin\theta}{r}v_{\theta\theta}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$= \cos^2\theta\, v_{rr} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}v_\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}v_{\theta r}$$

$$- \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}v_{r\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}v_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}v_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r^2}v_{\theta\theta}$$

$$= \cos^2\theta\, v_{rr} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}v_{\theta r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}v_{\theta\theta}$$

$$+ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}v_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r}v_r$$

Παρομοια εχουμε:

$$u_y(x,y) = v_r\, r_y + v_\theta\, \theta_y$$

$$= \sin\theta\, v_r(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r} v_\theta(r,\theta).$$

$\Rightarrow$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\, v_r + \frac{\cos\theta}{r} v_\theta\right) r_y + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_r + \frac{\cos\theta}{r} v_\theta\right)\theta_y$$

$$= \left(\sin\theta\, v_{rr} - \frac{\cos\theta}{r^2} v_\theta + \frac{\cos\theta}{r} v_{\theta r}\right)\sin\theta$$

$$+ \left(\cos\theta\, v_r + \sin\theta\, v_{r\theta} - \frac{\sin\theta}{r} v_\theta + \frac{\cos\theta}{r} v_{\theta\theta}\right)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$= \sin^2\theta\, v_{rr} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} v_\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} v_{\theta r}$$

$$+ \frac{\cos^2\theta}{r} v_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} v_{r\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} v_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r^2} v_{\theta\theta}$$

$$= \sin^2\theta\, v_{rr} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} v_{r\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} v_{\theta\theta}$$

$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} v_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r} v_r,$$

και τελικα προκυπτει:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta).$$

Το αρχικο προβλημα μετασχηματιζεται στο

$$(*)\quad \begin{cases} v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 0<r<1,\ 0\le\theta<2\pi \\ v(1,\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) = \bar{g}(\theta), & 0\le\theta<2\pi. \end{cases}$$

Στο προβλημα (*) μπορουμε να χρησιμοποιησουμε τη μεθοδο Fourier!

επισης κρυβεται αυθεν μια συνθηκη:

Συνεχεια της u στα σημεια $(x,0)$

οποτε πρεπει

$$\lim_{\theta \downarrow 0} v(r,\theta) = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} v(r,\theta)$$

Συνεχεια της παραγωγου της u και αρα

$$\lim_{\theta \downarrow 0} v_\theta(r,\theta) = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} v_\theta(r,\theta) .$$

(Οι συνθηκες δινουν περιοδικοτητα ως προς θ).

Μεθοδος Fourier:

Ευρεση λυσεων στη μορφη

$$v(r,\theta) = A(r)\, B(\theta)$$

Αρχικα οι συνθηκες δινουν:

$$B(0) = B(2\pi) \quad \text{και}$$
$$B'(0) = B'(2\pi) \,,$$

Η Δ.Ε γραφεται ισοδυναμα:

$$A''(r)\,B(\theta) + \frac{1}{r} A'(r)\,B(\theta) + \frac{1}{r^2} A(r)\,B''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{A(r)}\left(A''(r) + \frac{1}{r} A'(r) \right) = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = \lambda$$

και τα προβληματα που προκυπτουν:

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

$$B(0) = B(2\pi)$$

$$B'(0) = B'(2\pi)$$

και

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - \lambda A(r) = 0 , \quad 0 < r < 1.$$

Το πρωτο προβλημα εχει μελετηθει:

ιδιοτιμες $\lambda_0 = 0$, ιδιοσυναρτηση $B_0(\theta) = 1$

$\lambda_n = n^2$, $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$

Για $\lambda_0 = 0$, το δευτερο προβλημα γινεται

$$r^2 A''(r) + r A'(r) = 0 \Rightarrow r A''(r) + A'(r) = 0$$

$$\Rightarrow (r A'(r))' = 0 \Rightarrow r A'(r) = c_1 \Rightarrow$$

$$A(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad , \quad 0 < r < 1.$$

Η συναρτηση $\ln r$ ειναι αρραυτη στο 0 και την απορριπτουμε και παιρνουμε $A_0(r) = 1$.

Για $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ το δευτερο προβλημα δινει:

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - n^2 A(r) = 0$$

που ειναι Δ.Ε. Euler. Τη λυνουμε ψαχνοντας για λυσεις στη μορφη:

$$A(r) = r^\mu \Rightarrow A'(r) = \mu r^{\mu-1}, \quad A''(r) = \mu(\mu-1) r^{\mu-2}$$

οποτε

$$\mu(\mu-1) r^{\mu} + \mu r^{\mu} - n^2 r^{\mu} = 0 \Rightarrow \mu^2 - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \pm n$$

Λυσεις r^{n}, r^{-n}

οπως πριν η r^{-n} ειναι αφραχτη στο 0 και απορριπτεται.

Γενικη λυση της Δ.Ε.

$$(*) \quad v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) \right) r^{n}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Παιρνε στις συνοριακες συνθηκες:

$$v(1,\theta) = \bar{g}(\theta) \Rightarrow$$

$$\bar{g}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) \right), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

και επομενως

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(\theta) d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(\theta) \cos(n\theta) d\theta \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \bar{g}(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Θα δουμε αργοτερα κατω απο τι υποθεσεις στην $\bar{g}$ η σειρα (*) συγκλινει.

Προβλημα: Να λυθει το προβλημα Συνοριακων Τιμων

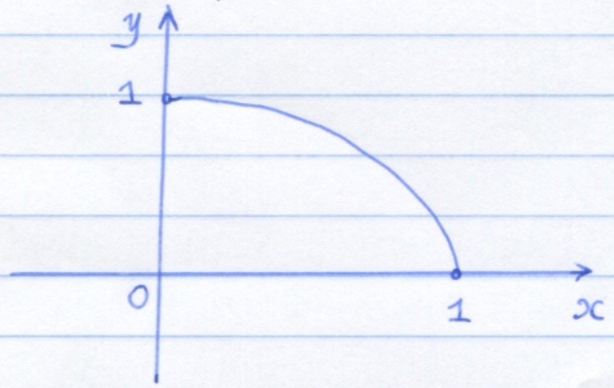
$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x^2+y^2<1, \; \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(\sqrt{1-y^2}, y) = 5y - 8y^3, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Απαντηση: Αρχικα σχεδιαζουμε το χωριο επιλυσης:



επειδη προκειται για κομματι κυκλικου δισκου εισαγαμε πολικες συντεταγμενες

$$u(x,y) = v(r,\theta)$$

$$\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix} \quad , 0 \leq r < 1, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Τοτε αρχικα βλεπουμε οτι:

$x \in [0,1]$ $\quad u(x,0) = 0 \Leftrightarrow v(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1.$

$y \in [0,1]$ $\quad u_x(0,y) = 0 \Leftrightarrow v_r(r,\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{r} v_\theta(r,\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\left(u_x(x,y) = v_r(r,\theta)\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r} v_\theta(r,\theta) \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad v_\theta(r, \tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

και έτσι η v λύνει το πρόβλημα:

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, \quad 0<r<1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(r,0) = 0 \\ v_\theta(r,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}\right. \quad 0<r<1$$

$$v(1,\theta) = 5\sin\theta - 8\sin^3\theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Για την επίλυση, βρίσκουμε αρχικά τη γενική λύση του ομογενούς προβλήματος, με τη μέθοδο Fourier.

Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή

$$v(r,\theta) = A(r)\,B(\theta), \quad 0<r<1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$v(r,0) = 0 \Leftrightarrow A(r)\,B(0) = 0, \quad \forall\, r \in (0,1) \quad \text{και}$$

άρα

$$B(0) = 0.$$

Παρόμοια

$$v_\theta(r,\theta) = A(r)\,B'(\theta) \Rightarrow$$

$$v_\theta(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow A(r)\,B'(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad \forall\, r \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \qquad B'(\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

Η Δ.Ε γράφεται:

$$A''(r)B(\theta) + \frac{1}{r}A'(r)B(\theta) + \frac{1}{r^2}A(r)B''(\theta) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{r^2}{A(r)}\left(A''(r)+\frac{1}{r}A'(r)\right) = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = \lambda$$

και προκυπτουν τα προβληματα:

$$(**) \quad \begin{cases} B''(\theta)+\lambda B(\theta) = 0 , & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ B(0) = B'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$r^2 A''(r) + r A'(r) - \lambda A(r) = 0, \quad 0<r<1.$$

Λυνουμε αρχικα το προβλημα ιδιοτιμων (**).

Χαρακτηριστικη εξισωση $(e^{k\theta})$ $k^2+\lambda = 0$.

Ευκολα μπορουμε να δουμε οτι εχει μονο θετικες ιδιοτιμες (γιατι;)

και τοτε $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ωστε

$$B(\theta) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$$

$B(0)=0 \Leftrightarrow c_1 = 0$, τοτε

$$B'(\theta) = \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\theta)$$

$$B'(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{\lambda}\tfrac{\pi}{2}) = 0 = \cos(\tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{γιατι;})$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = 2k-1 \quad (\Leftrightarrow \lambda_k = (2k-1)^2,\ k \in \mathbb{N})$$

Ιδιοσυναρτησεις $\quad B_k(\theta) = \sin((2k-1)\theta), \quad k \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$

Το δευτερο προβλημα γινεται:

$$r^2 A''(r) + r A''(r) - (2k-1)^2 A(r) = 0, \quad 0<r<1.$$

(Εξ. Euler)

$$A(r) = r^{\mu} \Longrightarrow$$

$$\mu(\mu-1) r^{\mu} + \mu r^{\mu} - (2k-1)^2 r^{\mu} = 0$$

$$\Longrightarrow \mu^2 - (2k-1)^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm (2k-1)$$

$\Rightarrow$ Λυσεις r^{2k-1}, $r^{-(2k-1)}$ αφραχτη στο 0, απορριπτεται

$$\Rightarrow B_k(r) = r^{2k-1}.$$

$$\Longrightarrow v_k(r,\theta) = \sin((2k-1)\theta)\, r^{2k-1}$$

Γενικη λυση

$$v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sin((2k-1)\theta)\, r^{2k-1}.$$

Παμε τωρα στην μη ομογενη συνοριακη συνθηκη

$$v(1,\theta) = 5\sin\theta - 8\sin^3\theta$$

$$\Longrightarrow \underbrace{5\sin\theta - 8\sin^3\theta}_{\bar{g}(\theta)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sin((2k-1)\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ενας τροπος ειναι να βρουμε τους συντελεστες Fourier (β_k)
με ολοκληρωση

$$\beta_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{g}(\theta) \sin((2k-1)\theta)\, d\theta, \quad k \in \mathbb{N}$$

και να υπολογισουμε τα ολοκληρωματα.

Θα κανουμε κατι διαφορετικο.

Θα γραψουμε τη συναρτηση $\bar{g}(\theta)$ αμεσα σε σειρα Fourier
των ημιτονων.

Για το σκοπο αυτο παρατηρουμε οτι ο ορος

$$\sin^3\vartheta$$

μπορει να υποβαθμισουμε τη δυναμη απο το τριπλασιο τοξο.

ειδικοτερα επειδη εχουμε

$$\sin(3\theta) = \sin(\vartheta+2\theta) = \sin\theta\cos2\theta + \cos\theta\sin2\theta$$

$$= \sin\vartheta(1-2\sin^2\vartheta) + 2\sin\vartheta\cos^2\vartheta$$

$$= \sin\vartheta(1-2\sin^2\vartheta) + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)$$

$$= 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta$$

$$\Rightarrow \sin^3\vartheta = \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$$

και επομενως

$$\bar{g}(\vartheta) = 5\sin\theta - 8\sin^3\vartheta = 5\sin\vartheta - 8\cdot\frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$$

$$= -\sin\theta + 2\sin(3\vartheta)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sin((2k-1)\vartheta)$$

οποτε $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 2$ και $\beta_k = 0$, $k \geq 3$,

και η λυση ειναι:

$$v(r,\vartheta) = \beta_1 \sin\vartheta\, r + \beta_2 \sin(3\theta) r^3$$

$$= -\sin\theta\, r + 2\sin(3\theta) r^3, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Επειδη το αρχικο προβλημα τεθηκε σε καρτεσιανες συντεταγμενες,

θα μετασχηματισουμε τη λυση που βρηκαμε σε πολικες, σε καρτεσιανες.

Αρχικα εχουμε $\quad x = r\cos\theta$

$\qquad\qquad\qquad\quad y = r\sin\theta$

και για το $\quad \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\Longrightarrow$

$$u(r,\theta) = -y + 2\left(3\sin\theta - 4\sin^3\theta\right) r^3$$

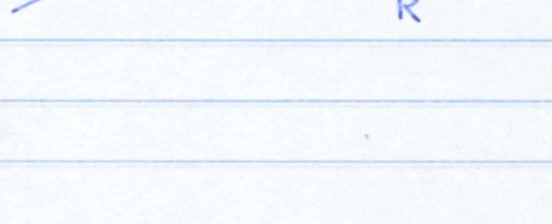
$$= -y + 6\sin\theta\, r\cdot r^2 - 8\,(r\sin\theta)^3$$

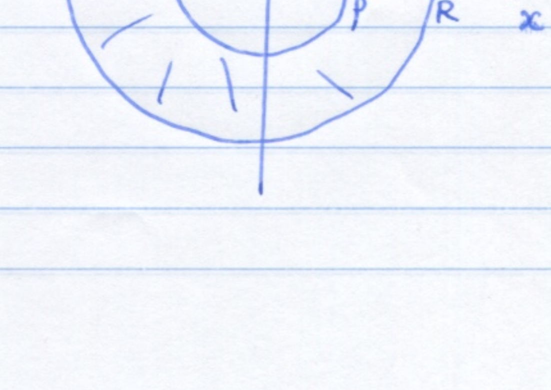
$$= -y + 6y(x^2+y^2) - 8y^3 = u(x,y)$$

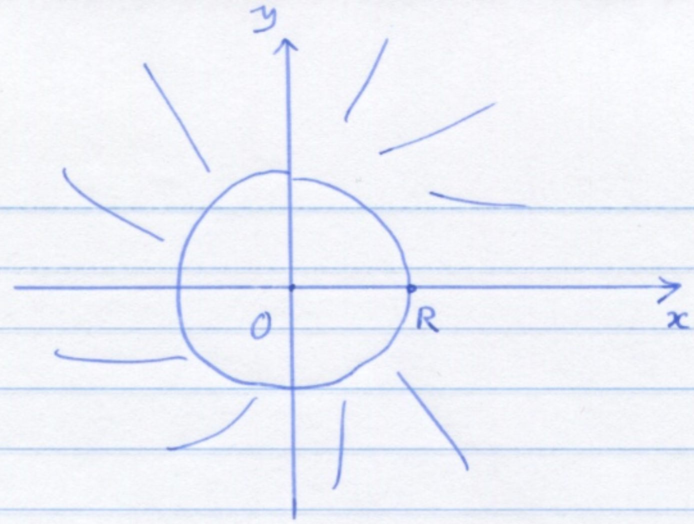
$$x^2+y^2<1,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0.$$

<u>Σημειωση</u> Οταν το χωριο μας εχει συμμετριες κυκλου, θα εισαγουμε πολικες συντεταγμενες.

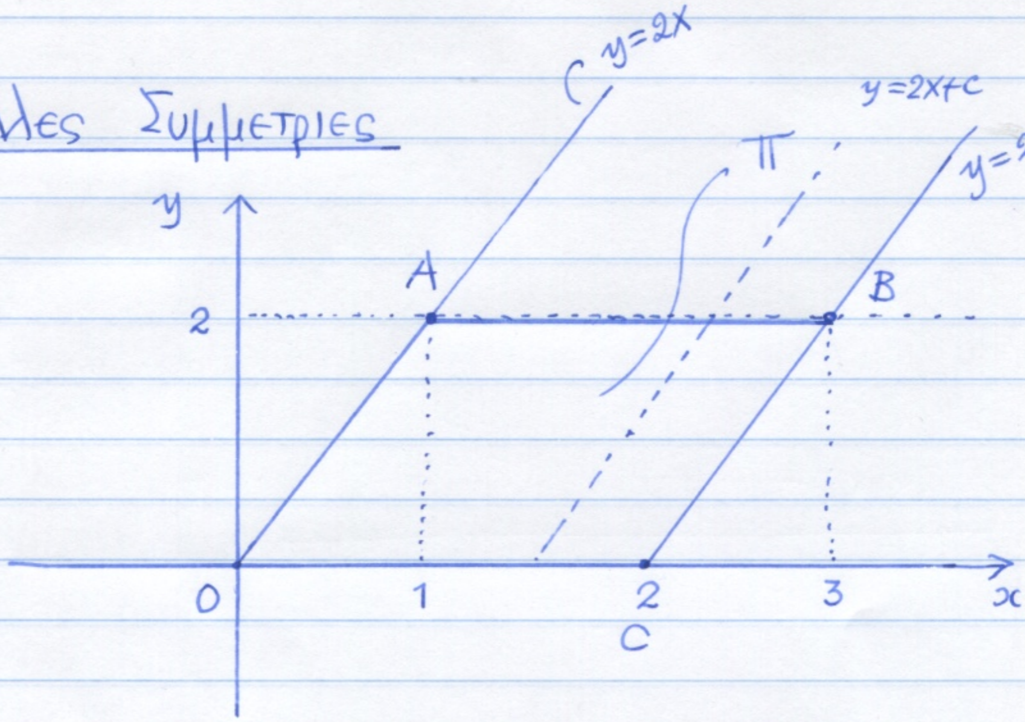
<u>Παραδειγματα τετοιων χωριων</u>







Αλλες Συμμετριες



Προβλημα: Το Παραλληλογραμμο OABC εχει κορυφες την αρχη των αξονων, A(1,2), B(3,2) και C(2,0).

Να λυθει το προβλημα

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , \quad (x,y) \in \Pi$$

$$u(x,0) = f(x) \, , \quad 0 \leq x \leq 2$$

Dirichlet Σ.Σ. στα υπολοιπα κομματια του παραλληλογραμμου.

οπου $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ δοσμενη ομαλη συναρτηση.