ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7 - 4 - 2020

Μεθοδος Fourier

Εξισωση θερμοτητας (φραγμενο χωριο)

Προβλημα Να λυθει το προβλημα Αρχικων-Συνοριακων Τιμων

$$u_t - u_{xx}(x,t) = 0 \quad , \; 0<x<1 \, , \; t>0$$

Dirichlet ΣΣ. $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0$

$$u(x,0) = f(x) \, , \quad x \in [0,1]$$

οπου $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ειναι δοθεισα ομαλη συναρτηση.

Η λυση του Fourier ευρεση αρχικα πολλων λυσεων u στο ακολουθο προβλημα Συνοριακων Τιμων με μηδεν Dirichlet συνοριακες συνθηκες:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \, , \quad 0<x<1 \, , \; t>0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \, , \quad t>0$$

στην μορφη $\quad u(x,t) = A(x)B(t)$

(αναζητανε πολλες μη τετριμμένες λυσεις) θα δουμε αργοτερα γιατι;

Ξεκιναμε αρχικα απο τις συνοριακες συνθηκες.

Θελουμε $u(0,t)=0, \quad \forall\ t\geq 0 \iff$

$$A(0)\,B(t)=0, \quad \forall\ t\geq 0$$

Πρεπει $A(0)=0$, γιατι διαφορετικα αν ηταν $A(0)\neq 0$

θα επρεπε $B(t)=0, \ \forall\ t\geq 0$ και τοτε

η λυση θα ηταν

$$u(x,t)=A(x)\,B(t)=A(x)\cdot 0$$
$$=0, \quad \forall\ x,t$$

δηλ η τετριμενη.

Παρομοια επειδη $u(1,t)=0 \iff A(1)\,B(t)=0$
$\forall t\geq 0$

$$\Rightarrow \ A(1)=0 \quad (=A(0)).$$

Επιπροσθετα επειδη η u ειναι λυση θα

εχουμε $u_t(x,t)=A(x)\,B'(t)$ &

$u_{xx}(x,t)=A''(x)\,B(t)$

$$\Rightarrow u_t=u_{xx} \iff A(x)\,B'(t)=A''(x)\,B(t) \iff$$
$$A(x)\,B'(t)-A''(x)\,B(t)=0, \ 0<x<1, \ t>0.$$

και επιπροσθετα επειδη η u δεν ειναι η τετριμμενη, οι συναρτησεις A, B δεν ειναι ταυτοτικα μηδεν και αν $1 < x_0 < 1$, $t_0 > 1$ ωστε $A(x_0) \neq 0$, $B(t_0) \neq 0$, προκυπτουν αρχικα διαστηματα μη μηδενισμου και τοτε εχουμε:

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}$$

συναρτηση μεταβλητης t — Συναρτηση μεταβλητης x

Επομενως προκυπτει για τις σταθερες συναρτησεις οτι $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ωστε

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$$

και επομενως η ευρεση λυσεων στη μορφη

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

σπαει σε 2 υποπροβληματα:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} A''(x) + \lambda A(x) = 0, & 0 < x < 1 \\ A(0) = A(1) = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \{\ B'(t) + \lambda B(t) = 0, \quad t > 0$$

<u>Προσοχη</u> και τα 2 υποπροβληματα ειναι ΟΜΟΓΕΝΗ, οποτε αν εχουμε μια λυση, τοτε καθε ~~προ~~ πολλαπλασιο αυτης ειναι λυση επισης.

<u>προβλημα</u>

(I) Ευρεση τιμων της παραμετρου λ, ωστε να υπαρχει μη τετριμμενη συναρτηση A

(Οι τιμες της παραμετρου λ για τις οποιες υπαρχει μη τετριμμενη λυση ονομαζονται <u>ιδιοτιμες</u> και οι αντιστοιχες συναρτησεις, <u>ιδιοσυναρτησεις</u>).

Η Δ.Ε $A''(x) + \lambda A(x) = 0$, $0 < x < 1$ ειναι με σταθερους συντελεστες, οποτε ψαχνουμε για λυσεις στη μορφη $A(x) = e^{kx}$ και ετσι προκυπτει η:

Χαρακτηριστικη Εξισωση:

$$k^2 + \lambda = 0$$

Διακρινουμε τις περιπτωσεις στην τιμη της παραμετρου λ:

i) $\lambda = 0 \Rightarrow k^2 = 0, \Rightarrow k = 0$ διπλη, οποτε τοτε η γενικη λυση ειναι
$(1, x)$

$$A(x) = c_1 + c_2 x$$

Λογω των συνοριακων συνθηκων

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \\ A(1)=0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$A(x) \equiv 0.$$

($\lambda = 0$, κακη επιλογη).

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda > 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$, λυσεις
$e^{\sqrt{-\lambda}x}$, $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

και η γενικη λυση της Δ.Ε. ειναι

$$A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Οι συνοριακες συνθηκες δινουν:

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \\ A(1)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και επειδη $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}} =$

$$= e^{\sqrt{-\lambda}}\left(e^{-2\sqrt{-\lambda}} - 1\right) \neq 0$$

(γιατι;)

εχουμε οτι το συστημα εχει <u>ακριβως</u> μια λυση την $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow A(x) \equiv 0$.

($\lambda < 0$ ειναι κακη επιλογη)

iii) $\lambda > 0 \Rightarrow k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}\, i$

$$\Rightarrow e^{\sqrt{\lambda} i x} = \cos(\sqrt{\lambda}x) + i \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)$ λυσεις

$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad x \in [0,1].$$

Οι συνοριακες συνθηκες δινουν:

$$\left.\begin{array}{l} A(0) = 0 \\ A(1) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{array}\right.$$

για να προκυψει μη τετριμμενη λυση, πρεπει $c_2 \neq 0$ και αρα το $\lambda > 0$, πρεπει να ικανοποιει:

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad (= \sin 0)$$

$$\sqrt{\lambda} = n\pi \quad , n \in \mathbb{N}$$

Συμβολίζουμε την τιμή λ με λ_n

δηλ.

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi \Rightarrow \lambda_n = (n\pi)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$

ιδιοτιμές

και τότε έχουμε ιδιοσυνάρτηση

$$A_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Γυρίζουμε στο

<u>πρόβλημα II</u> $\quad B'(t) + \lambda B(t) = 0, \quad t > 0.$

Εδώ είδαμε ότι πρέπει $\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2, \; n \in \mathbb{N}$

και τότε

$$B'(t) + (n\pi)^2 B(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{n^2\pi^2 t} B'(t) + (n\pi)^2 e^{n^2\pi^2 t} B(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{n^2\pi^2 t} B(t)\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{n^2\pi^2 t} B(t) = c$$

μια λύση

$$\Rightarrow B_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}$$

Έτσι λοιπόν βρήκαμε τις λύσεις

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t} \qquad x\in(0,1),\ t>0$$

και επομένως από την Αρχή της Υπέρθεσης

φτιάχνουμε την γενική λύση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

για κατάλληλες επιλογές των σταθερών c_n, $n\in\mathbb{N}$

Βέβαια εδώ τίθεται ένα ερώτημα

σύγκλισης της σειράς, παραγώγισης αυτής κλπ.

Επιπρόσθετα θα θέλαμε η σειρά να είναι

συνεχής μέχρι το $t=0$, δηλ. να

έχουμε

$$u(x,0) = \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{n=1}^{+\infty}} c_n \sin(n\pi x)$$

Οποτε θα θελαμε να εχουμε επιλεξει τις c_n, ωστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x) = f(x), \quad x \in [0,1].$$

Ερωτημα Δοθεισης της f, υπαρχουν σταθερες c_n ωστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x) = f(x) \quad ?$$

(Αναλυση της f, ~~σε~~ σε σειρα Fourier)

Ποιο θα ηταν το ~~[illegible]~~ ΙΔΑΝΙΚΟ σεναριο;

Η σειρα να συγκλινει ομοιομορφα στην f και τοτε οι ακολουθες πραξεις ειναι ΟΡΘΕΣ $m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f(x)\sin(m\pi x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\right)dx$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}} c_n \int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx$$

Ομως $\displaystyle\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(2n\pi x)}{2}dx = \frac{1}{2}$

$$\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y = 1 - 2\sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$m \neq n$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{\cos((n-m)\pi x) - \cos((n+m)\pi x)}{2}\,dx$$

$$= \left(\frac{\sin((n-m)\pi x)}{2(n-m)\pi}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{\sin((n+m)\pi x)}{2(n+m)\pi}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\sin((n-m)\pi)}{2(n-m)\pi} - \frac{\sin((n+m)\pi)}{2(n+m)\pi}$$

$n-m \in \mathbb{Z}$

$n+m \in \mathbb{N}$

$$= 0.$$

και τελικα προκυπτει: (τοτε)

$$\int_0^1 f(x)\sin(m\pi x)\,dx = \frac{1}{2}c_m \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow c_m = 2\int_0^1 f(x)\sin(m\pi x)\,dx \, , \quad m \in \mathbb{N}$$

συντελεστες Fourier

<u>Παρατηρηση</u> Για την ευρεση των συντελεστων Fourier, απαιτουνται πολυ λιγα ιδιογραφηματα.

<u>Ερωτημα</u> 1. Αν c_n ειναι οι συντελεστες Fourier της f, δηλ αν

$$c_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx, \quad n\in\mathbb{N}$$

Ποια ειναι η σχεση της σειρας Fourier της f

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$$

$$c_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx$$

με την αρχικη συναρτηση f ?

2. Ειδικοτερα ποτε εχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)$$

οπου $c_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx$?

Προς το παρον αφηναμε τα ερωτηματα και τις απαντησεις τους για αργοτερα.

Το αρχικο μας ενδιαφερον εστιαζεται στην ευρεση της γενικης λυσης και η ευρεση των συντελεστων με την υποθεση οτι οι πραξεις που κανουμε μπορουν σε καποιο σταδιο να ελεγχθουν.

Προβλημα Να λυθει το προβλημα Αρχικων-Συνοριακων Τιμων

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x>0,\ t>0$$

Dirichlet ΣΣ. $u(0,t) = 0, \quad t \geq 0$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \geq 0$$

u φραγμενη.

οπου $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ειναι δοθεισα (πολλες) ομαλη συναρτηση.

Απαντηση Παλι ψαχνουμε ειδικες λυσεις στη μορφη $u(x,t) = A(x)\,B(t)$

Απο τις συνοριακες συνθηκες προκυπτει:

$$A(0) = 0 \quad (\text{γιατι;})$$

και

$$A(x)B'(t) = A''(x)B(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}$$

(γιατί;)

$\Rightarrow \exists \ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$$

και έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα προβλήματα

$$(I) \begin{cases} A''(x) + \lambda A(x) = 0 \quad , \quad x \geq 0 \\ A(0) = 0 \end{cases}$$

$$(II) \ \{ \ B'(t) + \lambda B(t) = 0 , \quad t \geq 0$$

<u>Επίλυση του (I).</u>

Λύσεις στην μορφή e^{kx} $\Rightarrow$ Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$k^2 + \lambda = 0$$

i) $\lambda = 0 \Rightarrow A(x) = c_1 + c_2 x.$

$A(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Οπότε $A(x) = c_2 x$. Αν $c_2 \neq 0$, τότε η συνάρτηση είναι αφραγη και απορρίπτεται.

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ λύσεις

$$\Rightarrow A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$A(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$\Rightarrow A(x) = c_1 \underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)}_{\text{αφραγη στο } +\infty}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

Οποτε δεν μπορει $\lambda < 0$.

iii) $\lambda > 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)$ λυσεις

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ωστε

$$A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

$$A(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow A(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Οποτε καθε $\lambda > 0$ ειναι ιδιοτιμη ~~και~~ με ιδιοσυναρτηση

$$A_\lambda(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$B'(t) + \lambda B(t) = 0 \Rightarrow B(t) = c\, e^{-\lambda t}$

Ειδικες λυσεις

$$u_\lambda(x,t) = \sin(\sqrt{\lambda}x)\, e^{-\lambda t} \qquad x \geq 0,\ t \geq 0$$
$$\lambda > 0$$

Γενικη λυση μεσ Αρχη Υπερθεσης

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} c(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)\, e^{-\lambda t}\, d\lambda$$

για καταλληλη επιλογη συναρτησης $c(x)$, $x \geq 0$

επιπροσθετα θα θελαμε:

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^{+\infty} c(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)\, d\lambda$$

δοθεισης της f να υπαρχει συναρτηση c ωστε

$$f(x) = \int_0^{+\infty} c(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)\, d\lambda$$

Neumann ΣΣ

Προβλημα: Να λυθει το προβλημα Αρχικων - Συνοριακων Τιμων

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0<x<1, \; t>0$$

Neumann ΣΣ $\quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1],$$

οπου $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ειναι δοθεισα ομαλη συναρτηση.

Απαντηση: Αν ψαξουμε για λυσεις στη μορφη

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

τοτε οι συνοριακες συνθηκες

$$u_x(x,t) = A'(x)B(t)$$

και επομενως

$$A'(0) = A'(1) = 0$$

και $\quad A(x)B'(t) = A''(x)B(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}$$

$\Rightarrow \exists \; \lambda \in \mathbb{R}$ ωστε:

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \quad (I) \begin{cases} A''(x) + \lambda A(x) = 0, & 0<x<1 \\ A'(0) = A'(1) = 0 \end{cases}$$

$$(II) \left\{ B'(t) + \lambda B(t) = 0, \quad t>0 \right.$$

Πρόβλημα (I) Χαρακτηριστική εξίσωση (e^{kx})

$$k^2 + \lambda = 0$$

i) $\lambda = 0$, $\Rightarrow$ $A(x) = c_1 + c_2 x$

$$\Rightarrow A'(x) = c_2$$

$$A'(0) = A'(1) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_0(x) = 1, \quad \lambda = 0$$

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$

$$A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\Rightarrow A'(x) = \sqrt{-\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}\, c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$\left.\begin{matrix} A'(0) = 0 \\ A'(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{-\lambda}\,(c_1 - c_2) = 0 \\ \sqrt{-\lambda}\,(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_2 = c_1 \\ c_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ c_1 = c_2 = 0 \right.$$

(Η επιλογή $\lambda<0$ δεν δίνει λύση).

iii) $\lambda > 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow$ λύσεις $\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$$\Rightarrow \exists\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} : A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\Rightarrow A'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left.\begin{array}{l} A'(0) = 0 \\ A'(1) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_2 = 0 \\ -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_2 = 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{array}\right.$$

οπότε $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 = \sin 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\& \quad A_n(x) = \cos(n\pi x) \quad n \in \mathbb{N}$$

Από το δεύτερο πρόβλημα προκύπτει επίσης

$$B_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Οπότε:

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

$$A_n(x) = \cos(n\pi x)$$

$$B_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t} \qquad n\in\mathbb{N}$$

Προκύπτει η γενική λύση

$$u_n(x,t) = \cos(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$u_0(x,t) = 1$$

$$\Rightarrow u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

Πίσω στις αρχικές συνθήκες πρέπει:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\pi x) = f(x)$$

Συντελεστές Fourier

$$c_0 = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$c_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$$