ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7-5-2020

Ας ξεκινήσουμε αρχικά με την

Άσκηση Δίνονται οι συναρτήσεις $A, B: [0,1] \to \mathbb{R}$, $\Gamma, \Delta: [0,2] \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$A(x) + B(x)\Gamma(y) + \Delta(y) = 0 \quad , \quad \forall x \in [0,1], \ \forall y \in [0,2].$$

Αποδείξτε ότι:

είτε η B είναι σταθερή συνάρτηση, έστω $B(x) = \lambda$ $\forall x \in [0,1]$ και τότε και η A είναι σταθερή συνάρτηση, έστω $A(x) = \mu$, $\forall x \in [0,1]$ και επιπρόσθετα

$$\mu + \lambda \Gamma(y) + \Delta(y) = 0 \quad , \quad \forall y \in [0,2]$$

είτε η Γ είναι σταθερή συνάρτηση, έστω $\Gamma(y) = \alpha$ $\forall y \in [0,2]$ και τότε και η Δ είναι σταθερή συνάρτηση, έστω $\Delta(y) = \beta$ $\forall y \in [0,2]$ και επιπρόσθετα

$$A(x) + \alpha B(x) + \beta = 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

Αποδ. έστω πως η B δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι $\exists\, x_1 \neq x_2$ ώστε $B(x_1) \neq B(x_2)$, $(x_1, x_2 \in [0,1])$ οπότε έχουμε

$$A(x_1) + B(x_1)\Gamma(y) + \Delta(y) = 0 \quad , \quad \forall y \in [0,2]$$

$$A(x_2) + B(x_2)\Gamma(y) + \Delta(y) = 0 \quad , \quad \forall y \in [0,2]$$

με αφαίρεση προκύπτει

$$A(x_1)-A(x_2) \quad + \quad (B(x_1)-B(x_2))\,\Gamma(y) = 0$$

$$\overset{B(x_1)-B(x_2)\neq 0}{\Longrightarrow} \qquad \Gamma(y) = -\,\frac{A(x_1)-A(x_2)}{B(x_1)-B(x_2)} \quad , \quad \forall\, y\in[0,2]$$

αρα $\quad \Gamma(y) = a \quad \left(= \dfrac{A(x_1)-A(x_2)}{B(x_1)-B(x_2)}\right)$ σταθερη $\forall y\in[0,2]$.

Αν $\Gamma(y)=a$, απο τη αρχικη σχεση παιρναμε

$$A(x) + aB(x) + \Delta(y) = 0 \iff$$

$$A(x) + a\,B(x) = -\Delta(y) \quad , \quad \forall x\in[0,1],\ \forall y\in[0,2]$$

και επομενως η συναρτηση Δ ειναι σταθερη επισης, εστω

$$\Delta(y) = \beta \ , \quad \forall y\in[0,2]$$

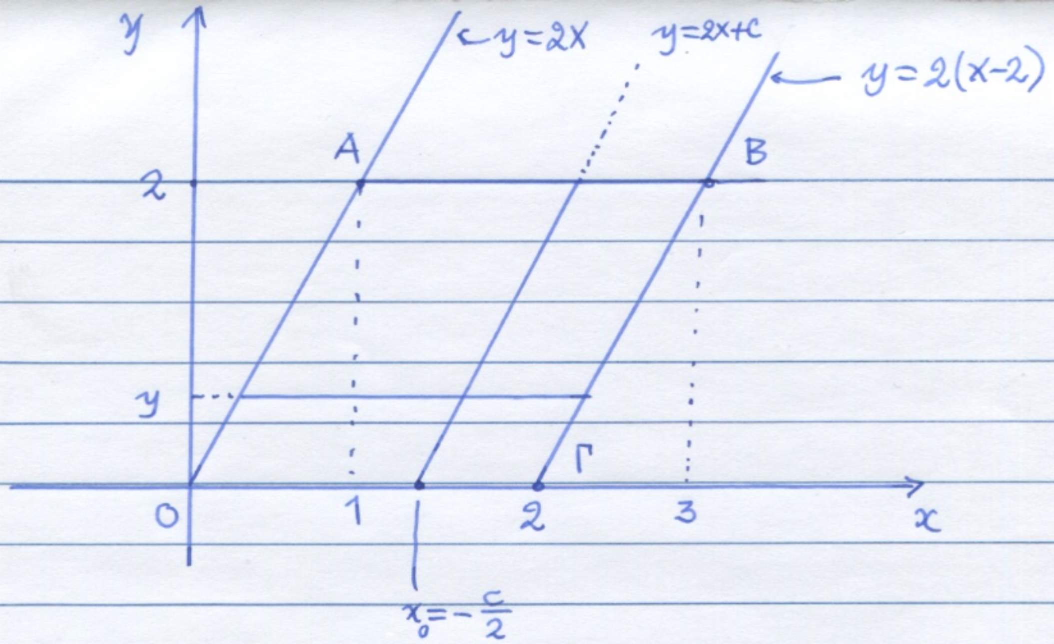
και τοτε επιπροσθετα παιρναμε οτι θα εχουμε επισης

$$A(x) + a\,B(x) + \beta = 0 \ , \qquad \forall\, x\in[0,1].$$

Ακριβως αναλογο ειναι το επιχειρημα αν υποθεσουμε οτι η Γ <u>δεν</u> ειναι σταθερη συναρτηση.

$\boxdot$

<u>Αλλες Συμμετριες</u>



<u>Προβλημα</u> Δινεται το παραλληλογραμμο ΟΑΒΓ οπως στο σχημα ($A(1,2)$, $B(3,2)$, $\Gamma(2,0)$). Με Π συμβολιζουμε τα εσωτερικα σημεια αυτου.

Να λυθει το προβλημα

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 , \quad (x,y) \in \Pi$$

$$u(x,2x) = 0 , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, 2(x-2)) = 0 , \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$u(x,0) = e^{\frac{\pi}{4}x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2e^{\frac{\pi}{2}x} \sin(\pi x) , \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$u(x,2) = e^{\frac{\pi}{4}(x+4)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - 2e^{\frac{\pi}{2}(x+4)} \sin(\pi(x-1))$$

$$1 \leq x \leq 3.$$

<u>Απαντηση:</u> Το προβλημα που εχουμε ειναι οτι δεν μπορουμε να εφαρμοσουμε τη μεθοδο Fourier

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα, θέτουμε

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2x-y \\ \eta &= y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\xi+\eta}{2} \\ y &= \eta \end{aligned}\right.$$

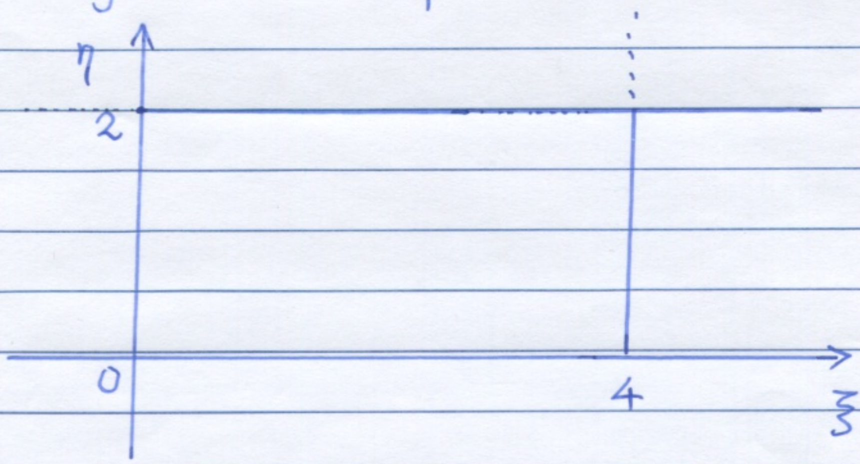
Τότε στις μεταβλητές ξ, η το χωρίο γίνεται:

$$y-2x=0 \Leftrightarrow \xi=0$$

$$y=2(x-2) \Leftrightarrow 2x-y=4 \Leftrightarrow \xi=4$$

$$y=0 \Leftrightarrow \eta=0$$

$$y=2 \Leftrightarrow \eta=2$$



ορθογώνιο! Θέτουμε $u(x,y)=v(\xi,\eta)$.

Στο νέο σύστημα το πρόβλημα γίνεται:

Συνοριακές συνθήκες:

$$u(x,2x)=0 \Leftrightarrow v(0,\eta)=0 \ , \ 0\leq\eta\leq 2$$

$$u(x,2(x-2))=0 \Leftrightarrow v(4,\eta)=0, \quad 0\leq\eta\leq 2$$

$$u(x,0)=e^{\frac{\pi}{4}x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2\,e^{\frac{\pi}{2}x}\sin(\pi x) \Leftrightarrow$$

(τότε $\xi=2x \Leftrightarrow x=\frac{\xi}{2}$)

$$v(\xi,0)=e^{\frac{\pi}{8}\xi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\xi\right)-2\,e^{\frac{\pi}{4}\xi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \ , \ 0\leq\xi\leq 4$$

$$u(x,2) = e^{\frac{\pi}{4}(x+4)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - 2\, e^{\frac{\pi}{2}(x+4)} \sin\left(\pi(x-1)\right)$$

$1 \le x \le 3$

$y=2 \Rightarrow \xi = 2x-2 \Leftrightarrow x-1 = \frac{\xi}{2}$, $x = \frac{\xi+2}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad v(\xi,2) = e^{\frac{\pi}{8}(\xi+10)} \sin\left(\frac{\pi}{4}\xi\right) - 2\, e^{\frac{\pi}{4}(\xi+10)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

$0 \le \xi \le 4.$

Παμε τωρα στην Δ.Ε.

Ο κανονας της αλυσιδας δινει:

$$u_x(x,y) = v_\xi(\xi,\eta)\,\xi_x + v_\eta(\xi,\eta)\,\eta_x$$

ομως $\quad \xi = 2x-y \quad , \quad \eta = y \quad \Rightarrow$

$$\xi_x = 2,\ \xi_y = -1$$
$$\eta_x = 0,\ \eta_y = 1$$

οποτε

$$u_x(x,y) = 2v_\xi(\xi,\eta)$$

$$\Rightarrow \quad u_{xx}(x,y) = (2v_\xi)_\xi\,\xi_x + (2v_\xi)_\eta\,\eta_x$$
$$= 4\,v_{\xi\xi}(\xi,\eta).$$

επισης

$$u_y(x,y) = v_\xi\,\xi_y + v_\eta\,\eta_y$$
$$= -v_\xi(\xi,\eta) + v_\eta(\xi,\eta)$$

$$\Rightarrow \quad u_{yy}(x,y) = (-v_\xi + v_\eta)_\xi\,\xi_y + (-v_\xi + v_\eta)_\eta\,\eta_y$$
$$= v_{\xi\xi} - v_{\eta\xi} - v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{yy}(x,y) = v_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2v_{\xi\eta}(\xi,\eta) + v_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

$$\Longrightarrow \quad u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$5\,v_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2\,v_{\xi\eta}(\xi,\eta) + v_{\eta\eta}(\xi,\eta) = 0 \qquad \begin{matrix} 0 \le \xi \le 4 \\ 0 \le \eta \le 2. \end{matrix}$$

Οποτε λυναμε αρχικα το προβλημα

$$5\,v_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2v_{\xi\eta}(\xi,\eta) + v_{\eta\eta}(\xi,\eta) = 0 \qquad \begin{matrix} 0 \le \xi \le 4 \\ 0 \le \eta \le 2 \end{matrix}$$

$$v(0,\eta) = v(4,\eta) = 0, \quad 0 \le \eta \le 2.$$

εφαρμοζοντας τη μεθοδο Fourier

$$v(\xi,\eta) = A(\xi)\,B(\eta)$$

προκυπταν συνοριακες συνθηκες:

$$A(0) = A(4) = 0$$

και η Δ.Ε γινεται: (σε περιοχες μη μηδενισμου)

$$5A''(\xi)B(\eta) - 2A'(\xi)B'(\eta) + A(\xi)B''(\eta) = 0$$

$$5\frac{A''(\xi)}{A(\xi)} - 2\frac{A'(\xi)}{A(\xi)}\frac{B'(\eta)}{B(\eta)} + \frac{B''(\eta)}{B(\eta)} = 0$$

Οποτε αν εφαρμοσουμε την <u>αυτηση</u> προκυπτει αρχικα

οτι ειτε η $\dfrac{A'(\xi)}{A(\xi)}$ ειναι σταθερη, ειτε η

$\dfrac{B'(\eta)}{B(\eta)}$ ειναι σταθερη.

Επειδη θελουμε $A(0)=A(4)=0$
επιλεγουμε

$$\frac{B'(\eta)}{B(\eta)} = \lambda \Rightarrow B'(\eta)=\lambda B(\eta)$$

$$\Rightarrow B''(\eta)=\lambda B'(\eta)=\lambda^2 B(\eta)$$

$$\Rightarrow \frac{B''(\eta)}{B(\eta)}=\lambda^2$$

και τοτε προκυπτει:

$$5\frac{A''(\xi)}{A(\xi)} - 2\lambda\frac{A'(\xi)}{A(\xi)} + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5A''(\xi) - 2\lambda A'(\xi) + \lambda^2 A(\xi) = 0.$$

Η ΔΕ ειναι με σταθερους συντελεστες, η
χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $(A(\xi)=e^{k\xi})$

$$5k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 = 0$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 20\lambda^2 = -(4\lambda)^2. \quad \text{Αν } \lambda\neq 0$$

λυσεις

$$k_{1,2} = \frac{2\lambda \pm 4\lambda i}{10} < \begin{matrix} \frac{\lambda+2\lambda i}{5} \\ \frac{\lambda-2\lambda i}{5} \end{matrix}$$

Λυσεις Δ.Ε. $e^{\frac{\lambda+2\lambda i}{5}\xi} = e^{\frac{\lambda}{5}\xi}\left(\cos\left(\frac{2\lambda}{5}\xi\right) + i\sin\left(\frac{2\lambda}{5}\xi\right)\right)$

$$\Rightarrow e^{\frac{\lambda}{5}\xi}\cos\left(\frac{2\lambda}{5}\xi\right),\quad e^{\frac{\lambda}{5}\xi}\sin\left(\frac{2\lambda}{5}\xi\right)$$

Γενικη λυση της Δ.Ε.

$$A(\xi) = c_1 e^{\frac{\lambda}{5}\xi} \cos\left(\frac{2\lambda}{5}\xi\right) + c_2 e^{\frac{\lambda}{5}\xi} \sin\left(\frac{2\lambda}{5}\xi\right).$$

$$A(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$A(4) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\lambda}{5}\cdot 4\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{8\lambda}{5}\right) = 0 = \sin 0$$

$$\Rightarrow \frac{8\lambda}{5} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^* \;!$$

$$\Leftrightarrow \lambda_k = \frac{5k\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Ιδιοσυναρτησεις $A_k(\xi) = e^{\frac{k\pi}{8}\xi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\xi\right), \; k \in \mathbb{Z}^*$.

Παμε στο δευτερο προβλημα

$$\frac{B'(\eta)}{B(\eta)} = \lambda = \frac{5k\pi}{8}$$

$$\Rightarrow B_k(\eta) = e^{\frac{5k\pi}{8}\eta}, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

$$u_k(\xi,\eta) = e^{\frac{k\pi}{8}\xi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\xi\right) \cdot e^{\frac{5k\pi}{8}\eta}, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Γενικη λυση:

$$u(\xi,\eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \beta_k \, e^{\frac{k\pi}{8}(\xi + 5\eta)} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\xi\right).$$

Παμε τωρα στις ~~αρχικες~~ μη ομογενεις συνθηκες:

$$u(\xi,0) = e^{\frac{\pi}{8}\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4}\xi\right) - 2 e^{\frac{\pi}{4}\xi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

οποτε πρεπει

$$\|$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \beta_k \, e^{\frac{k\pi}{8}\xi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\xi\right)$$

Παρατηρουμε οτι η επιλογη

$$\beta_1 = 1 , \quad \beta_2 = -2$$

ικανοποιει τις συνθηκες και τοτε

$$(*) \quad v(\xi,\eta) = e^{\frac{\pi}{8}(\xi+5\eta)} \sin\left(\frac{\pi}{4}\xi\right) - 2\, e^{\frac{\pi}{4}(\xi+5\eta)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

ειναι λυση. Επιπροσθετα εχουμε

$$v(\xi,2) = e^{\frac{\pi}{8}(\xi+10)} \sin\left(\frac{\pi}{4}\xi\right) - 2\, e^{\frac{\pi}{4}(\xi+10)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

οποτε ικανοποιειται και η δευτερη συνοριακη συνθηκη και επομενως η v της (*) ειναι η λυση του προβληματος.

Στις αρχικες συντεταγμενες (καρτεσιανες συντεταγμενες) η λυση ειναι

$$u(x,y) = e^{\frac{\pi}{4}(x+2y)} \sin\left(\frac{\pi}{4}(2x-y)\right) - 2\, e^{\frac{\pi}{2}(x+2y)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-y)\right)$$

$$(x,y) \in \Pi .$$

⊡

Σημειωσεις: 1. Η $\lambda_0 = 0$, δεν ειναι ιδιοτιμη, παρ' ολο που στο αθροισμα εμφανιζεται.

2. Το συστημα ιδιοσυναρτησεων $A_k(\xi) = e^{\frac{k\pi}{8}\xi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\xi\right)$, $k \in \mathbb{Z}^*$, δεν ειναι εν γενει ορθογωνιο συστημα συναρτησεων!

Επιλυση του προβληματος Poisson στον δισκο.

Προβλημα Να λυθει το προβλημα

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = f(r,\theta)$$

$$0<r<1$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$v(r,0) = v(r,2\pi)$$
$$v_\theta(r,0) = v_\theta(r,2\pi)$$

$$v(1,\theta) = \bar{f}(\theta) \quad , \; 0 \leq \theta < 2\pi$$

οπου $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π περιοδικη ομαλη συναρτηση

και $f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομαλη 2π περιοδικη στη δευτερη μεταβλητη.

Λυση: **Βημα 1ο** Επιλυουμε αρχικα το ομογενες προβλημα

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v(r,\theta) = 0 \; , \quad 0<r<1$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$v(r,0) = v(r,2\pi) \; , \quad 0 \leq r < 1$$
$$v_\theta(r,0) = v_\theta(r,2\pi) \; , \quad 0 \leq r < 1 .$$

Το προβλημα αυτο το επιλυσαμε, βρισκοντας λυσεις στη μορφη

$$v(r,\theta) = A(r)\,B(\theta)$$

οποτε προκυπτουν τα προβληματα

$$r^2 A''(r) + rA'(r) - \lambda A(r) = 0$$

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$B(0) = B(2\pi)$$
$$B'(0) = B'(2\pi) .$$

Για το δευτερο προβλημα βρηκαμε ιδιοτιμες

$\lambda_0 = 0$, ιδιοσυναρτηση $B_0(\theta) = 1$

$\lambda_n = n^2$, ιδιοσυναρτησεις $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$

Για το πρωτο λυσεις

$$A_n(r) = r^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

και επισης για $\lambda_0 = 0$

$$A_0(r) = 1$$

Γενικη λυση ομογενους

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) \right) r^n ,$$
$$0 \leq r < 1$$
$$0 \leq \theta < 2\pi .$$

<u>Βημα 2°</u> Αναλυουμε τις συναρτησεις $f(r,\theta)$ και $\tilde{f}(\theta)$ σε σειρες Fourier

$$f(r,\theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(r) \cos(n\theta) + \beta_n(r) \sin(n\theta) \right),$$

οποτε $a_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\theta$, $a_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \cos(n\theta) d\theta$

$\beta_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \sin(n\theta) d\theta$, $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{f}(\theta) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\bar{a}_n \cos(n\theta) + \bar{\beta}_n \sin(n\theta) \right)$$

όπου $$\bar{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

$, n \in \mathbb{N}$

Βήμα 3° Βρίσκουμε λύση στα προβλήματα

(α) $$q_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} q_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} q_{\theta\theta}(r,\theta) = \frac{a_0(r)}{2}$$

$$q(r,\theta) = q(r, 2\pi)$$
$$q_\theta(r,\theta) = q_\theta(r, 2\pi)$$

$$q(1,\theta) = \frac{\bar{a}_0}{2}$$

(β) $$q_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} q_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} q_{\theta\theta}(r,\theta) = a_n(r) \cos(n\theta)$$

$$q(r,0) = q(r, 2\pi)$$
$$q_\theta(r,0) = q_\theta(r, 2\pi)$$

$$q(1,\theta) = \bar{a}_n \cos(n\theta)$$

(γ) $$q_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} q_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} q(r,\theta) = \beta_n(r) \sin(n\theta)$$

$$q(r,0) = q(r, 2\pi)$$
$$q_\theta(r,0) = q_\theta(r, 2\pi)$$

$$q(1,\theta) = \bar{\beta}_n \sin(n\theta).$$

Επιλυση του (α) προβληματος

Ψαχνουμε τη λυση στη μορφη

$$q^0(r,\theta) = Q^0(r)$$

οποτε προκυπτει:

$$Q_0''(r) + \frac{1}{r} Q_0'(r) = \frac{a_0(r)}{2}$$

$$Q_0(1) = \frac{\overline{a_0}}{2}.$$

Αυτο λυνεται ευκολα:

$$r Q_0''(r) + Q_0'(r) = \frac{r a_0(r)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (r Q_0'(r))' = \frac{r a_0(r)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad r Q_0'(r) = k_1 + \frac{1}{2}\int_0^r s a_0(s) ds$$

$$\Rightarrow \quad Q_0'(r) = \frac{k_1}{r} + \frac{1}{2r}\int_0^r s a_0(s) ds$$

$$\Rightarrow \quad \int_r^1 Q_0'(t) dt = \int_r^1 \frac{k_1}{t} dt + \frac{1}{2}\int_r^1 \frac{1}{t}\int_0^t s a_0(s) ds\, dt$$

$$\Rightarrow \quad Q_0(1) - Q_0(r) = -k_1 \ln r + \frac{1}{2}\int_r^1 \frac{1}{t}\int_0^t s a_0(s) ds\, dt$$

$0<r$

ομως $\displaystyle\int_r^1 \frac{1}{t}\int_0^t s a_0(s) ds\, dt = \int_r^1 (\ln t)' \int_0^t s a_0(s) ds\, dt$

$$= \left(\ln t \int_0^t s a_0(s) ds\right)\Big|_{t=r}^{t=1} - \int_r^1 \ln t\; t\, a_0(t) dt$$

$$= -\ln r \int_0^r s a_0(s) ds - \int_r^1 \ln t\; t\, a_0(t) dt$$

και επομενως

$$Q_0(r) = Q_0(1) + k_1 \ln r + \frac{\ln r}{2}\int_0^r s a_0(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_r^1 t \ln t\, a_0(t)\,dt.$$

Θελουμε να ειναι φραγμενη στο 0, οποτε παιρνουμε $k_1 = 0$ (γιατι;)

και επειδη θελουμε $Q_0(1) = \frac{\bar{a}_0}{2}$, προκυπτει

$$Q_0(r) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \frac{\ln r}{2}\int_0^r s a_0(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_r^1 s \ln s\, a_0(s)\,ds, \quad 0 < r < 1.$$

(γιατι ειναι φραγμενη στο 0?)

<u>Επιλυση του (β) προβληματος</u>

Ψαχνουμε τη λυση στη μορφη

$$q(r,\vartheta) = Q_n(r)\cos(n\vartheta)$$

οποτε προκυπτει:

$$Q_n''(r) + \frac{1}{r}Q_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}Q_n(r) = a_n(r), \quad 0 < r < 1.$$

$$Q_n(1) = \bar{a}_n$$

Αυτη τη φορα εφαρμοζουμε τη μεθοδο Lagrange και βρισκουμε λυση στη μορφη

$$Q_n(r) = \mu_1(r)\, r^n + \mu_2(r)\, r^{-n}, \quad 0 < r < 1$$

Τοτε $Q_n'(r) = \mu_1'(r) r^n + \mu_2'(r) r^{-n} +$

$$n\mu_1(r) r^{n-1} - n\mu_2(r) r^{-n-1}$$

Η επιλογη ειναι $\mu_1'(r) r^n + \mu_2'(r) r^{-n} = 0 \Rightarrow \mu_2'(r) = -\mu_1'(r) r^{2n}$

οποτε $\quad Q_n'(r) = n\,\mu_1(r)\, r^{n-1} - n\,\mu_2(r)\, r^{-n-1}$

$$\Rightarrow \quad Q_n''(r) = n\,\mu_1'(r)\, r^{n-1} - n\,\mu_2'(r)\, r^{-n-1} + n(n-1)\,\mu_1(r)\, r^{n-2} + n(n+1)\,\mu_2'(r)\, r^{-n-2}$$

και με αντικατασταση στη Δ.Ε. προκυπτει

$$n\,\mu_1'(r)\, r^{n-1} - n\,\mu_2'(r)\, r^{-n-1} = a_n(r)$$

$$\Rightarrow \quad 2n\,\mu_1'(r)\, r^{n-1} = a_n(r)$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1'(r) = \frac{1}{2n}\,\frac{a_n(r)}{r^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1(r) = \mu_1 - \frac{1}{2n}\int_r^1 \frac{a_n(s)}{s^{n-1}}\,ds$$

ομοια

$$\mu_2'(r) = -\frac{1}{2n}\, r^{n+1}\, a_n(r)$$

$$\Rightarrow \quad \mu_2(r) = \mu_2 - \frac{1}{2n}\int_0^r s^{n+1} a_n(s)\,ds$$

και τελικα η λυση $Q_n(r)$ εχει τη μορφη

$$Q_n(r) = \mu_1 r^n - \frac{r^n}{2n}\int_r^1 \frac{a_n(s)}{s^{n-1}}\,ds + \mu_2 r^{-n} - \frac{r^{-n}}{2n}\int_0^r s^{n+1} a_n(s)\,ds$$

και για να ειναι φραγμενη στο 0, επιλεγουμε $\mu_2 = 0$ (γιατι;)

Επισης θελουμε $Q_n(1) = \bar{a}_n$, οποτε

$$\bar{a}_n = \mu_1 - \frac{1}{2n}\int_0^1 s^{n+1} a_n(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\mu_1 = \bar{a}_n + \frac{1}{2n}\int_0^1 s^{n+1} a_n(s)\,ds,$$

και επομενως

$$Q_n(r) = \bar{a}_n r^n + \frac{r^n}{2n}\int_0^1 s^{n+1} a_n(s)\,ds - \frac{r^n}{2n}\int_r^1 \frac{a_n(s)}{s^{n-1}}\,ds - \frac{r^{-n}}{2n}\int_0^r s^{n+1} a_n(s)\,ds$$

και η λυση του (β) προβληματος ειναι

$$q(r,\theta) = Q_n(r)\cos(n\theta)$$

Επιλυση του (γ) προβληματος

Με ακριβως αντιστοιχο τροπο με το (β), ψαχνουμε τη λυση στη μορφη

$$q(r,\theta) = \bar{Q}_n(r)\sin(n\theta)$$

οποτε προκυπτει

$$\bar{Q}_n''(r) + \frac{1}{r}\bar{Q}_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}\bar{Q}_n(r) = \beta_n(r), \quad 0<r<1$$

$$\bar{Q}_n(1) = \bar{\beta}_n$$

και η λυση (ΑΚΡΙΒΩΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ του (β)) ειναι

$$\bar{Q}_n(r) = \bar{\beta}_n r^n + \frac{r^n}{2n}\int_0^1 s^{n+1}\beta_n(s)\,ds - \frac{r^n}{2n}\int_r^1 \frac{\beta_n(s)}{s^{n-1}}\,ds - \frac{r^{-n}}{2n}\int_0^r s^{n+1}\beta_n(s)\,ds$$

$$0<r<1$$
$$n\in\mathbb{N}$$

Βημα 4ο (Τελικο) Ευρεση λυσης στο αρχικο προβλημα

$$U_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}U_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=f(r,\theta)=\frac{a_0(r)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(r)\cos n\theta+\beta_n(r)\sin n\theta\right)$$

$$U(r,0)=U(r,2\pi)$$

$$U_\theta(r,0)=U_\theta(r,2\pi)$$

$$U(1,\theta)=\bar{f}(\theta)=\frac{\bar{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\bar{a}_n\cos(n\theta)+\bar{\beta}_n\sin(n\theta)\right)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή της υπέρθεσης και η λύση είναι

$$U(r,\theta)=Q_0(r)+\sum_{n=1}^{+\infty}Q_n(r)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty}\bar{Q}_n(r)\sin(n\theta)$$

όπου

$$Q_0(r)=\frac{\bar{a}_0}{2}+\frac{\ln r}{2}\int_0^r s\,a_0(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_r^1 s\ln s\,a_0(s)\,ds$$

$0<r<1$

$$Q_n(r)=\bar{a}_n r^n+\frac{r^n}{2n}\int_0^1 s^{n+1}a_n(s)\,ds-\frac{r^n}{2n}\int_r^1\frac{a_n(s)}{s^{n-1}}\,ds-\frac{r^{-n}}{2n}\int_0^r s^{n+1}a_n(s)\,ds$$

$$\bar{Q}_n(r)=\bar{\beta}_n r^n+\frac{r^n}{2n}\int_0^1 s^{n+1}\beta_n(s)\,ds-\frac{r^n}{2n}\int_r^1\frac{\beta_n(s)}{s^{n-1}}\,ds-\frac{r^{-n}}{2n}\int_0^r s^{n+1}\beta_n(s)\,ds$$

$0<r<1$

$n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\cdot}$