ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

9-4-2020

Η μεθοδος του Fourier (συνεχεια)

Προβλημα Να λυθει το Προβλημα Αρχικων-Συνοριακων Τιμων

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0<x<2\pi, \quad t>0$$

Περιοδικες Σ.Σ.
$$\begin{cases} u(0,t) = u(2\pi,t), & t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t), & t>0 \end{cases}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

οπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ειναι ομαλη 2π-περιοδικη συναρτηση.

Απ. Θα εφαρμοσουμε τη μεθοδο Fourier (Μεθοδος χωρισμου μεταβλητων)

και θα βρουμε λυσεις u στη μορφη

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

για το ακολουθο προβλημα (ομογενες) Συνοριακων Τιμων:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0<x<2\pi, \quad t>0$$

Περιοδικες ΣΣ
$$\begin{cases} u(0,t) = u(2\pi,t), & t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t), & t>0 \end{cases}$$

Απο τις Σ.Σ παιρνουμε

$$u(0,t) = u(2\pi,t) \Leftrightarrow A(0)B(t) = A(2\pi)B(t)$$

$$\Leftrightarrow \ (A(0)-A(2\pi))\,B(t)=0, \quad \forall\, t \geq 0$$

και επειδη θελουμε να προκυψει μη τετριμμενη λυση, θα πρεπει

$$A(0)-A(2\pi) = 0.$$

Επισης επειδη θελουμε

$$u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) \Leftrightarrow A'(0)B(t) = A'(2\pi)B(t)$$

$$\Rightarrow \quad A'(0) = A'(2\pi).$$

Απο δε τη Διαφορικη Εξισωση παιρνουμε:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \Leftrightarrow A(x)B'(t) = A''(x)B(t)$$

και οπως ειδαμε γυρω απο μη μηδενικα σημεια προκυπτει οτι πρεπει

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}, \quad \begin{array}{l}\forall\, 0 < x < 2\pi \\ \forall\, t > 0\end{array}$$

και επομενως $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ ωστε:

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$$

και η ευρεση λυσεων αναγεται στην ευρεση των ιδιοτιμων λ, ωστε:

τα προβλήματα:

$$(I) \quad \begin{cases} A''(x) + \lambda A(x) = 0 \ , & 0 < x < 2\pi \\ A(0) = A(2\pi) \ , & A'(0) = A'(2\pi) \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} B'(t) + \lambda B(t) = 0 \ , & t > 0 \end{cases}$$

(Το πρόβλημα (II) έχει πάντοτε μη τετριμμένη λύση)

Εστιάζουμε τη προσοχή μας στην εύρεση ιδιοτιμών του (I) προβλήματος.

Όπως έχουμε ήδη δει, η Δ.Ε. είναι με σταθερούς συντελεστές και επομένως αν ψάξουμε για λύσεις στη μορφή e^{kx}, προκύπτει

η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$k^2 + \lambda = 0.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\lambda = 0 \Rightarrow k^2 = 0$, $k = 0$ διπλή ρίζα, οπότε προκύπτουν οι $1, x$ λύσεις και

$$A(x) = c_1 + c_2 x \ , \quad 0 < x < 2\pi.$$

Από ΣΣ

$$\left.\begin{array}{l} A(0) = A(2\pi) \\ A'(0) = A'(2\pi) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = c_1 + c_2 \cdot 2\pi \\ c_2 = c_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{ c_2 = 0 \right.$$

οπότε $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή με ιδιοσυνάρτηση $A_0(x) = 1$.

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$ και λύσεις $e^{\sqrt{-\lambda}x}$, $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

και $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\Rightarrow A'(x) = \sqrt{-\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Οι Σ.Σ δίνουν

$$\left.\begin{aligned} A(0) &= A(2\pi) \\ A'(0) &= A'(2\pi) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,2\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi} \\ \sqrt{-\lambda}\cdot(c_1 - c_2) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{+\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right) c_1 + \left(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right) c_2 = 0 \\ \left(1 - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right) c_1 + \left(-1 + e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi} & 1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi} \\ 1 - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi} & -\left(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Όμως

$$\det A = -2\left(1 - e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right)\cdot\left(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\,2\pi}\right) \neq 0$$

οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και έτσι

$c_1 = c_2 = 0$ (δεν υπάρχει αρνητική ιδιοτιμή)

iii) $\lambda > 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}\, i \rightarrow$ λύσεις $\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\sin(\sqrt{\lambda}x)$

οπότε $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $A(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

και $A'(x) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)c_1 + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)c_2$.

Οι Σ.Σ. δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} A(0) &= A(2\pi) \\ A'(0) &= A(2\pi) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) \\ \sqrt{\lambda}\, c_2 = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)c_1 + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,2\pi)c_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1\left(\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)-1\right) + \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)\, c_2 = 0 \\ -c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + \left(\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)-1\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\,2\pi)-1 & \sin(\sqrt{\lambda}\,2\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) & (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)-1) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

και επειδη

$$\det A = (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)-1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)$$

για να εχει μη τετριμμενη λυση, θα πρεπει

$$\det A = 0 \Leftrightarrow (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)-1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 1 \end{cases}$$

και επομενως πρεπει

$$\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = 2n\pi, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n = n^2, \quad n\in\mathbb{N}$$

και τοτε το συστημα ειναι το αοριστο $0c_1+0c_2=0$

και επομενως στην ιδιοτιμη $\lambda_n = n^2$ αντιστοιχουν δυο γραμμικα ανεξαρτητες ιδιοσυναρτησεις $\sin(nx)$, $\cos(nx)$

και απο το (II) προβλημα προκυπτει οτι:

$$B_n(t) = e^{-n^2 t}$$

και επομενως εχουμε τις λυσεις:

$$\cos(nx)\, e^{-n^2 t}, \quad \sin(nx)\, e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

και η γενικη λυση ειναι:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx) \right) e^{-n^2 t}$$

για καταλληλες επιλογες των σταθερων

$$a_0, \quad a_n, n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n, n \in \mathbb{N}.$$

Θα δουμε γιατι τη γραφουμε σαν $\frac{a_0}{2}$

Παμε τωρα να προσδιορισουμε τις σταθερες (συντελεστες Fourier).

Θελουμε

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx) \right) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

απ' οπου προκυπτει

$$\frac{a_0}{2\pi} \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \iff a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

και

$m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx) \right) \right) \cos(mx)\,dx$$

$$= \dots$$

$$= a_m \int_0^{2\pi} \cos^2(mx)\,dx = \dots$$

$$= a_m \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx)\,dx \ , \quad m = 1, 2, \dots$$

Παρόμοια προκύπτει:

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx)\,dx \ , \quad m = 1, 2, \dots$$

$\boxed{\cdot}$

Θα δούμε αργότερα γιατί

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx)\,dx = 0 \ , \quad n \neq m, \ n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx)\,dx = 0 \ , \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx)\,dx = 0, \quad n \neq m, \ n, m \in \mathbb{N}$$

Εξισωση Κυματος

Προβλημα: Να λυθει το προβλημα Αρχικων - Συνοριακων τιμων

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in [0,\pi]$$
$$u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in [0,\pi]$$

οπου $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ δοθεισες ομαλες συναρτησεις ($f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$).

Απαντηση Θα εφαρμοσουμε αυτη μια φορα τη μεθοδο του Fourier:

ψαχνουμε αρχικα για λυσεις του:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t > 0,$$

στη μορφη $u(x,t) = A(x)B(t)$

οποτε λογω των Συνοριακων Συνθηκων επιλεγουμε

$$A(0) = A(\pi) = 0$$

και απο τη Δ.Ε. προκυπτει:

$$A(x)B''(t) = A''(x)B(t) \qquad \text{και}$$

$$\frac{B''(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}$$

και επομένως $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{B''(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$$

και άρα προκύπτουν:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} A''(x) + \lambda A(x) = 0 , & 0 < x < \pi \\ A(0) = A(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ B''(t) + \lambda B(t) = 0 , \quad t > 0 \right.$$

Για την επίλυση του (I), η Δ.Ε.

$$A''(x) + \lambda A(x) = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\left(A(x) = e^{kx} \right)$

$$k^2 + \lambda = 0$$

Όπως προηγουμένως είναι εύκολο να δειχθεί πως λόγω των Σ.Σ $A(0) = A(\pi) = 0$,

<u>δεν</u> υπάρχει $\lambda \leq 0$ ώστε το (I) να έχει μη τετριμμένη λύση.

Οπότε εστιάζουμε στην περίπτωση $\lambda > 0$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{\lambda}\, i \quad \text{\& λύσεις} \quad \cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

και άρα $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

Οι Σ.Σ δίνουν: $\left.\begin{matrix} A(0) = 0 \\ A(\pi) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases}$

και επομενως

$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = \sin 0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \quad , n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda_n = n^2 \quad , n \in \mathbb{N}$ και ιδιοσυναρτησεις

$A_n(x) = \sin(nx)$

Οπως επισης

$B''(t) + n^2 B(t) = 0$

$\Rightarrow$ Δυο λυσεις $\sin(nt)$

$\cos(nt)$

και συνολικα εχουμε 2 λυσεις

$\sin(nx)\cos(nt)$ & $\sin(nx)\sin(nt)$

και η γενικη λυση (του ομογενους προβληματος) ειναι επομενως

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sin(nx)\cos(nt) + \beta_n \sin(nx)\sin(nt) \right)$$

Παμε τωρα στις αρχικες συνθηκες, αλλα αρχικα υποθετουμε οτι μπορουμε να παραγωγισουμε κατα μελη

δηλ.

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-na_n \sin(nx)\sin(nt) + n\beta_n \sin(nx)\cos(nt) \right)$$

Οποτε:

προκυπτει :

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=f(x) \\ u_t(x,0)&=g(x) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) &= f(x) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\beta_n \sin(nx) &= g(x) \end{aligned}\right.$$

Αρχικα $m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \int_0^{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\sin(mx)\Big)dx$$

$$\overset{;}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

$$= a_m \int_0^{\pi} \sin^2(mx)\,dx$$

$$= a_m \cdot \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \ , \quad m \in \mathbb{N}$$

και παρομοια

$$\int_0^{\pi} g(x)\sin(mx)\,dx = \int_0^{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \overset{\sin(nx)}{\sin(mx)}\Big)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} n\beta_n \sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

$$= m\beta_m \int_0^{\pi}\sin^2(mx)\,dx$$

$$= m\beta_m\, \pi/2$$

και επομενως

$$\beta_m = \frac{2}{m\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(mx)\, dx \quad , \; m \in \mathbb{N}$$

που ειναι και οι αντιζεστες στη λυση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(nx) \cos(nt) + \beta_n \sin(nx) \sin(nt) \right)$$

$\boxdot$

Ποτε μπορουμε να κανουμε χρηση αντιστοιχης μεθοδου ;

<u>Παραδειγμα</u> Να βρεθει η γενικη λυση του προβληματος Συνοριακων τιμων

$$u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) - u_t(x,t) = 0 \; , \; 0<x<1 , \; t>0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 .$$

<u>Απαντηση</u>

Ψαχνουμε για λυσεις στη μορφη

$$u(x,t) = A(x) B(t)$$

Λογω των συνοριακων συνθηκων επιλεγουμε

$$A(0) = A(1) = 0 \qquad (\text{γιατι};)$$

και γυριζοντας στην Δ.Ε εχουμε :

13

$$A''(x)B(t) + A'(x)B'(t) - \overset{A(x)}{B'}(t) = 0 \quad , \; 0<x<1$$
$$t>0$$

Ο στοχος ειναι να χωρισουμε μεταβλητες

οποτε αρχικα παιρνουμε:

$$\frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B'(t)}{B(t)} \cdot \left(\frac{A'(x)}{A(x)} - 1 \right) = 0 \quad (*)$$

Εδω θα θελαμε να διαιρεσουμε με τον ορο $\frac{A'(x)}{A(x)} - 1$, αλλα δεν γνωριζουμε αν μπορουμε. Οποτε διακρινουμε τις περιπτωσεις:

•) $A'(x) - A(x) = 0$, τοτε $A'(x) = A(x) \Rightarrow$
$$A''(x) = A'(x) = A(x)$$

οποτε η $(*)$ γινεται:

$$1 + 0 \cdot \frac{B'(t)}{B(t)} = 0$$

που ειναι αδυνατη.

Επομενως δεν μπορει $A'(x) = A(x)$ σε καποιο διαστημα, και αν x_0, t_0 τετοια ωστε $A'(x_0) - A(x_0) \neq 0$, λογω συνεχειας σε διαστημα

και τοτε

εχουμε

$$\frac{\dfrac{A''(x)}{A(x)}}{\dfrac{A'(x)}{A(x)}-1}+\frac{B'(t)}{B(t)}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{B'(t)}{B(t)}=-\frac{A''(x)}{A'(x)-A(x)}=-\lambda$$

και προκυπτουν τα συστηματα

$$(\mathrm{I})\begin{cases} A''(x)-\lambda\,(A'(x)-A(x))=0 & 0<x<1. \\ A(0)=A(1)=0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad B'(t)+\lambda B(t)=0 \quad , \quad t>0$$

<u>Προβλημα (I)</u> Δ.Ε. $A''(x)-\lambda A'(x)+\lambda A(x)=0$

Ειναι με σταθερους συντελεστες, οποτε $(A(x)=e^{kx})$

εχει χαρακτηριστικη εξισωση:

$$k^2-\lambda k+\lambda=0$$

$$\Delta=\lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda-4)$$

Διακρινουμε τις περιπτωσεις $(\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda\in\{0,4\})$

i) $\lambda=0$, ii) $\lambda=4$, iii) $0<\lambda<4$, iv) $\lambda\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

i) $\lambda=0 \Rightarrow k=0$ διπλή ρίζα $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=c_1+c_2x \\ A(0)=A(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow A(x)\equiv 0$$

απορρίπτεται.

ii) $\lambda=4 \Rightarrow k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow (k-2)^2=0$, $k=2$ διπλή
οπότε λύσεις e^{2x}, xe^{2x}

και επομένως $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$A(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0 \\ A(1)=0 \Leftrightarrow c_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)\equiv 0,$$ απορρίπτεται.

iii) $0<\lambda<4 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$

$$k=\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda(4-\lambda)}\, i}{2}$$

λύσεις $e^{\frac{\lambda}{2}x}\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}x\right)$

$e^{\frac{\lambda}{2}x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}x\right).$

οπότε

$$A(x)=c_1e^{\frac{\lambda}{2}x}\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}x\right)+ c_2e^{\frac{\lambda}{2}x}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}x\right).$$

$$A(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0$$

$$A(1)=0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_2\neq 0 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}\right)=0 \end{array}$$

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}\right)=\sin 0$$

$$\sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}}=n\pi \quad , \; n\in\mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\lambda(4-\lambda)}{4}=n^2\pi^2 \Leftrightarrow 4\lambda-\lambda^2=4n^2\pi^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-4\lambda+4n^2\pi^2=0$$

$$\Delta=4^2-4^2n^2\pi^2<0$$

και επομένως απορρίπτεται.

iv) $\lambda\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$, τότε η εξίσωση

$$k^2-\lambda k+\lambda=0$$

έχει 2 πραγματικές λύσεις, τις:

$$k_{1,2}=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2} \; \Big\langle \; \begin{matrix} k_1=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2} \\ k_2=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2}\end{matrix}$$

και τότε προκύπτει

$$A(x)=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

$$\left.\begin{matrix} A(0)=0\Leftrightarrow c_1+c_2=0 \\ A(1)=0\Leftrightarrow c_1e^{k_1}+c_2e^{k_2}=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} c_2=-c_1 \\ c_1e^{k_1}-c_1e^{k_2}=0\end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} c_2=-c_1 \\ c_1\left(e^{k_1}-e^{k_2}\right)=0\end{matrix}\right\} \quad \text{όμως } k_1\neq k_2, \text{ οπότε}$$

$$e^{k_1} - e^{k_2} \neq 0$$

και ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ στην μορφη που υποθεσαμε στο προβλημα μας !

Βεβαια υπαρχουν και αλλα πιο προφανη παραδειγματα που η μεθοδος αποτυγχανει.

Παραδειγμα Υπαρχουν μη τετριμμενες λυσεις της ΔΕ.

$$u_{xx}(x,y) + (x+y)u_{yy}(x,y) = 0 , \quad x>0, \; y>0$$

της μορφης $u(x,y) = A(x)B(y)$?