26/09/2017

Μιγαδικός Αριθμός

i με την ιδιότητα $i^2=-1$ και $(-i)^2=-1$

(καρτεσιανή αναπαράσταση)

$z\in\mathbb{C} \iff \exists\, x,y\in\mathbb{R}\,,\ z=x+yi$

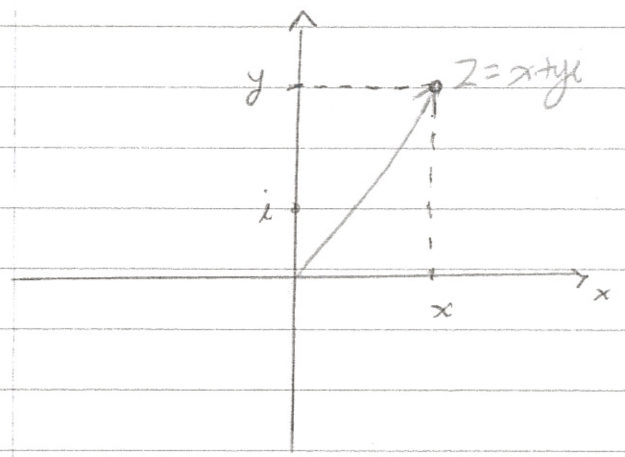
Πότε $z_1=z_2$;

Αν $z_1=a_1+b_1 i \quad a_1,b_1\in\mathbb{R}$

$\quad z_2=a_2+b_2 i \quad a_2,b_2\in\mathbb{R}$. $\iff$

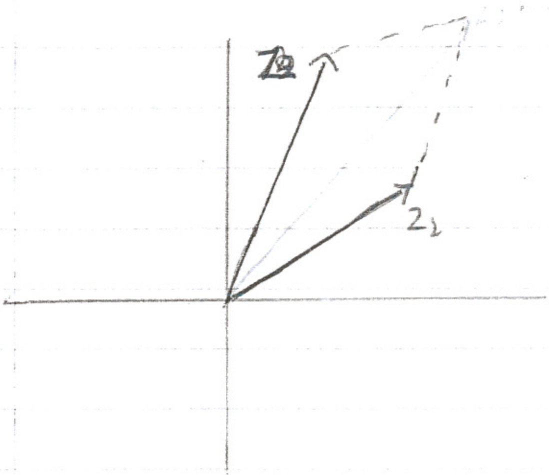
$$\iff \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

$$z=(x,y) = (x,0)+(0,y) = x(1,0)+y(0,1)$$



$z_1=(a_1,b_1) \quad , \quad z_2=(a_2,b_2)$

$z_1+z_2=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$



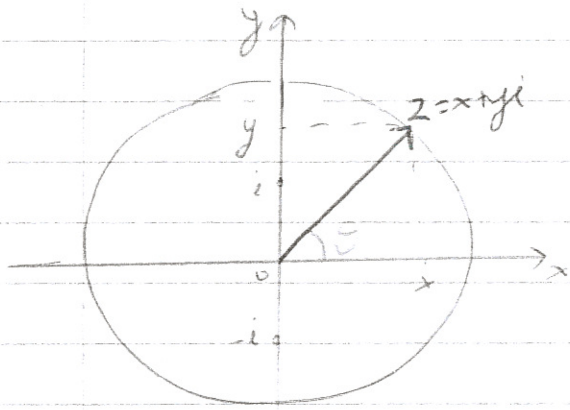
$z_1 \cdot z_2 = (a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i) = a_1(a_2+b_2 i) + b_1 i(a_2+b_2 i) =$

$= (a_1 a_2 + a_1 b_2 i) + (b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Πολική Μορφή (Τριγωνομετρική Μορφή)

$z = |z| e^{i\theta}$ $\quad \rho \geq 0$

$= |z|(\cos\theta + \sin\theta\, i)$



θ = arg z (Πρωτεύον όρισμα)

$-\pi \leq \theta \leq \pi$

$\theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

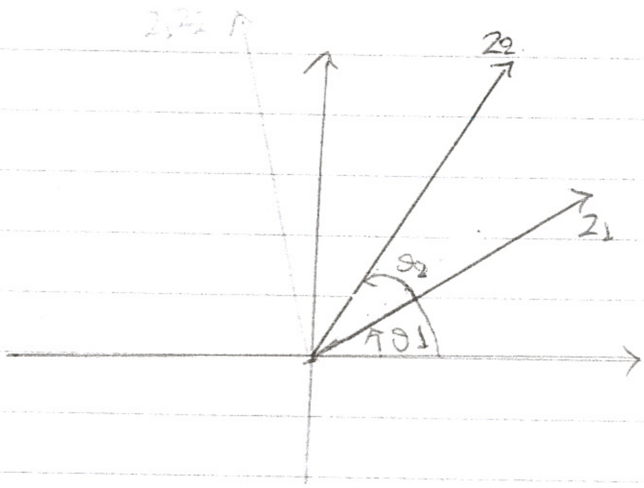
$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$

$z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = |z_1 z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$

$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1$

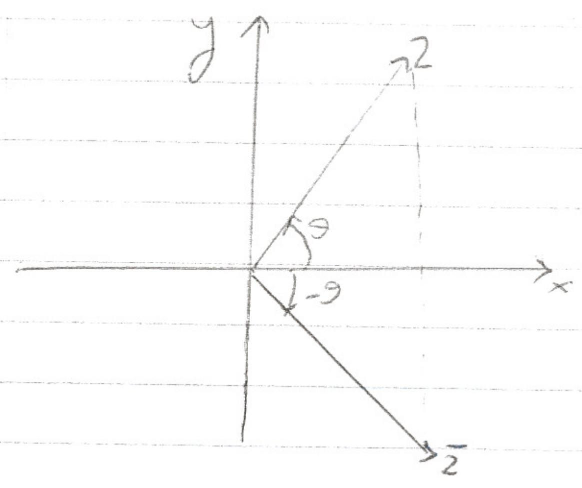


$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \theta \in \mathbb{R}$

$e^{x+yi} = e^{x} \cdot e^{yi} = e^{x}(\cos y + \sin y\, i)$

$z \longrightarrow \bar{z}$

$\overset{\shortparallel}{x+yi} \qquad \overset{\shortparallel}{x-yi} \qquad x, y \in \mathbb{R}$



$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty \implies \overline{\sum_{n=1} z_n} = \sum_{n=1} \overline{z_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n} \sum_{n=1}^{m} z_n = S_m$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n} \prod_{n=1}^{m} z_n = 6_m = z_1 \cdots z_m$$

$$z = x+yi \quad , x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{z \neq 0}$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta$$
$$y = \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta$$

$$z = \rho e^{i\theta}, \ \rho > 0$$
$$= \rho\cos\theta + \rho\sin\theta i$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$z = x+yi \quad x, y \in \mathbb{R} \quad , z \in \mathbb{C}^*$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{\overline{x+yi}}{(x+yi)(\overline{x+yi})} = \frac{x-yi}{|z|^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Τριγωνική Ανισότητα

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Απόδειξη:

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| \iff |z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2 \iff$$
$$\iff |z_1+z_2||\overline{z_1+z_2}| \leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2$$
$$\iff (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) \leq z_1\bar{z}_1 + 2|z_1||z_2| + z_2\bar{z}_2$$
$$\iff \cancel{z_1\bar{z}_1} + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \cancel{z_2\bar{z}_2} \leq \cancel{z_1\bar{z}_1} + 2|z_1||z_2| + \cancel{z_2\bar{z}_2}$$
$$\iff z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1||z_2| \quad (1)$$

$$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|.$$
$$|z_2\bar{z}_1| \leq |z_1||z_2|.$$

$$(1) \iff 2Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$$

Ισχύει αφού αν $\omega = a+bi$ $a,b \in \mathbb{R}$.
$$\omega + \bar{\omega} = 2a \leq 2|\omega| = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Άσκηση: Αν $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ τότε $|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|$

Πότε ισχύει η ισότητα

Λύση

Αν $z_1 \ldots z_n \neq 0$, τότε $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ τ.ω $z_1 = \lambda_1 z_n$

$z_2 = \lambda_2 z_n$

$\vdots$

$z_{n-1} = \lambda_{n-1} z_n$

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$

Ανοικτό όταν $\forall z \in A$, $\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω $B(z,\varepsilon) \subseteq A$

$B(z,\varepsilon) = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < \varepsilon \}$

$z = a + bi$
$w = x + yi$
$w - z = x - a + (y-b)i$
$|w-z| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

$|w-z| < \varepsilon \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$

$\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{C}$

Κλειστό όταν $\mathbb{C} \setminus B = B^c$ ανοικτό

28/09/2017

K συμπαγές $\subseteq \mathbb{C}$

Ορισμός: $\forall A_i$ ανοικτό κάλυμμα: $K \subseteq \bigcup A_i \Rightarrow \exists$ πεπερασμένη υποκάλυψη

K συμπαγές $\Rightarrow$ K κλειστό φραγμένο.

$K \subseteq \mathbb{C} \Leftrightarrow$ K κλειστό και φραγμένο

$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n) = \mathbb{C}$

↳ συμπαγές $\exists\ n_1, n_2, \ldots, n_m$

$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(0, n_k) = B(0, n_m)$

- Πότε το A είναι φραγμένο;

<u>Απ</u>: Αν $\exists\ M > 0$ $\forall\, a \in A$, $|a| \leq M$

Αν $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία $\subseteq \mathbb{C}$. Η z_n είναι φραγμένη αν $|z_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$z_n = a_n + b_n i$, $a, b \in \mathbb{R}$

$|z_n| \leq M \iff \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq M \Rightarrow \sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq M$

$|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|b_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$|z_n| \leq \sqrt{2} M$

Πότε $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει;

$\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$ $n \in \mathbb{N}$: $|z_n - z_0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$z_n = a_n + b_n i$ $\quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$z_0 = a_0 + b_0 i$ $\quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}$

Τότε $\lim_n z_n = z_0$ $(z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0) \iff \overset{a_n}{\overset{\shortparallel}{Re z_n}} \to \overset{a_0}{Re z_0}$

$b_n = Im z_n \to Im z_0 = b_0$

<u>Απόδειξη:</u>

"$\Rightarrow$" (Υποθέτουμε ότι $\lim z_n = z_0$)

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - z_0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \iff$

$\begin{pmatrix} \text{Αν } z_n = a_n + b_n i & a_n, b_n \in \mathbb{R} \\ z_0 = a_0 + b_0 i & a_0, b_0 \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

$\iff \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

<u>Οπότε:</u> $|a_n - a_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$

$|b_n - b_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon \quad , -//-$

"$\Leftarrow$" (Υποθέτουμε $Re z_n \to Re z_0$, $Im z_n \to Im z_0$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a_0| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_1$. $\forall n \geq n_0 \quad \exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |b_n - b_0| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_2, \ \forall n \geq n_0$

<u>Τότε!</u> $|a_n - a_0| < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$

$|b_n - b_0| < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$

<u>Όμως</u> : $|z_n - z_0| = \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon$

$\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \exists \lim_n z_n = z_0$

Αν z_n συγκλίνει $\Leftrightarrow$ z_n ακολουθία Cauchy $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re z_n \text{ είναι ακολουθία Cauchy} \\ Im z_n \quad -//- \quad -//- \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon>0 \ \exists N_1 : |Re z_n - Re z_m| < \varepsilon, \quad n,m \geq N_1 \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists N_2 : |Im z_n - Im z_m| < \varepsilon, \quad n,m \geq N_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_n - z_m| = \sqrt{(Re z_n - Re z_m)^2 + (Im z_n - Im z_m)^2} < \sqrt{2}\varepsilon$$

$n, m \geq N \qquad N = \max(N_1, N_2)$

Αν $z_n \to z_0$, $w_n \to w_0$ $\Rightarrow$ $z_n + w_n$ συγκλίνει

- $\lim(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n$
- $z_n w_n$ συγκλίνει : $\lim z_n w_n = \lim z_n \cdot \lim w_n$
- $\frac{z_n}{w_n}$ συγκλίνει : $\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim z_n}{\lim w_n}$

$z_n = a_n + b_n i$ φραγμ.

$a_{n_k} \to a$

$b_{n_{k_l}} \to b$

$a_{3^n} \to a$

b_{3^n} $\Rightarrow$ $a_{3^{n_k}} \to a$ $\qquad z_{3^{n_k}} \to a + bi$

$b_{3^{n_k}} \to b \qquad b_{3^{n_k}} \to b$

Γιατί δεν υπάρχει ολική διάταξη στο $\mathbb{C}$;

1) Αν $z \text{ "}\geq\text{" } \omega \Rightarrow z+\alpha \text{ "}\geq\text{" } \omega+\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

2) $z \text{ "}\geq\text{" } \omega$, $\alpha \text{ "}\geq\text{" } 0 \Rightarrow z\alpha \text{ "}\geq\text{" } \omega\alpha$

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$:

→ $z \text{ "}\geq\text{" } 0$

→ $-z \text{ "}\geq\text{" } 0 \quad (z \text{ "}\leq\text{" } 0 \Leftrightarrow -z+z \text{ "}\leq\text{" } -z \Leftrightarrow -z \text{ "}\geq\text{" } 0)$

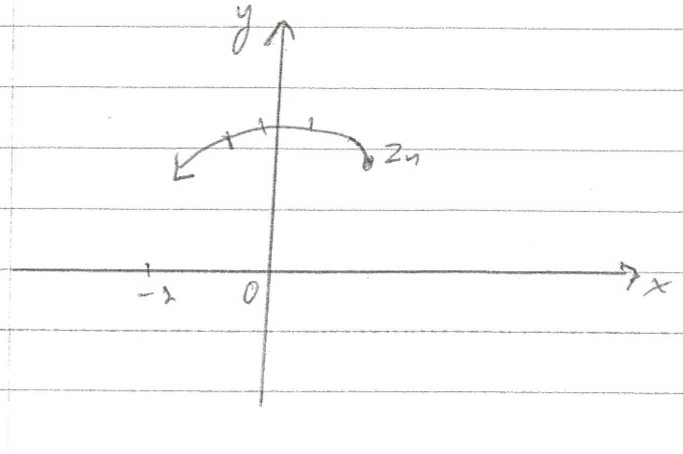
i) Αν $\left.\begin{array}{l} z \text{ "}\geq\text{" } 0 \\ z \text{ "}\geq\text{" } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot z \text{ "}\geq\text{" } 0 \Leftrightarrow z^2 \text{ "}\geq\text{" } 0$

ii) Αν $\left.\begin{array}{l} -z \text{ "}\geq\text{" } 0 \\ -z \text{ "}\geq\text{" } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-z)^2 \text{ "}\geq\text{" } 0$

Αν $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχουμε $z^2 \text{ "}\geq\text{" } 0 \Leftrightarrow z^2+1 \text{ "}\geq\text{" } 1$

Επιλέγω $z = i$: $\underbrace{i^2+1}_{0} \text{ "}\geq\text{" } 1 > 0$ //

$\arg z \in (-\pi, \pi]$



$0 < \arg z_n$

Αν $\lim z_n = -1$, $\operatorname{Im} z_n > 0$ τοτε $\arg z_n \to \pi$

Εστω $z_n = -1 + \frac{i}{n} \Rightarrow \arg z_n \to \pi$

$w_n = -1 - \frac{i}{n} \Rightarrow \arg w_n \to -\pi$

Εστω $z_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n} i$

$\arg z_{2n} \to \pi$

$\arg z_{2n-1} \to -\pi$

Αν $z = x + yi$ τοτε:

$e^z = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

$z = |z| e^{i \arg z}$

πρωτεύων λογαριθμός

$\log z = \log|z| + i \arg z$

$e^{\log z} = e^{\log|z|} e^{i\arg z} = |z|(\cos\arg z + i \sin\arg z) = z$

$\log_k z = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

$e^{\log_k z} = z$

3/10/2017

$$\mathrm{Arg}z = \{\arg z + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

$$z = |z|\, e^{i\arg z}$$

$z^2 = w$ 2 διακεκριμένες λύσεις.

$$w = |w|\, e^{i\arg w} \qquad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

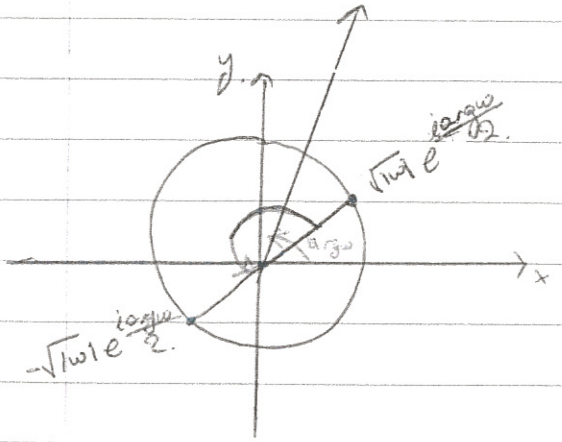
Έστω $z = |z| e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση: $z^2 = w \iff |z|^2 e^{2i\theta} = |w|\, e^{i\arg w}$

$$\iff \begin{cases} e^{2i\theta} = e^{i\arg w} \\ |z|^2 = |w| \end{cases} \iff \begin{cases} 2\theta = \arg w + 2k\pi \\ |z| = \sqrt{|w|} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \theta = \dfrac{\arg w}{2} & k=0 \\ \theta = \pi + \dfrac{\arg w}{2} & k=1 \end{cases}$$

Άρα: $\begin{cases} z = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{2}} \\ z = \sqrt{|w|}\, e^{\pi + \frac{i\arg w}{2}} \end{cases}$



$\sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot i = i$

Αντίστοιχα:

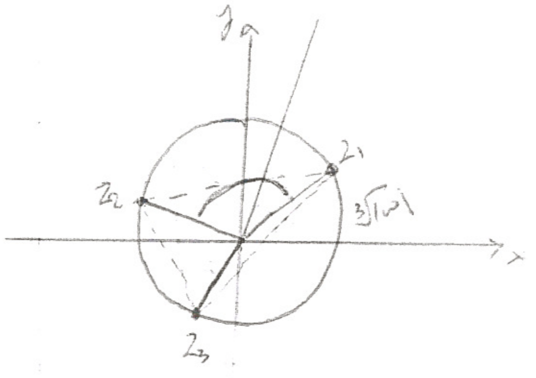
$$\left.\begin{array}{l} z^3 = w = |w| e^{i\arg w} \\ \text{Αν} \quad z = |z| e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow |z|^3 e^{3i\vartheta} = |w| e^{i\arg w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = |w| \\ e^{3i\vartheta} = e^{i\arg w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{|w|} \\ 3\vartheta = \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

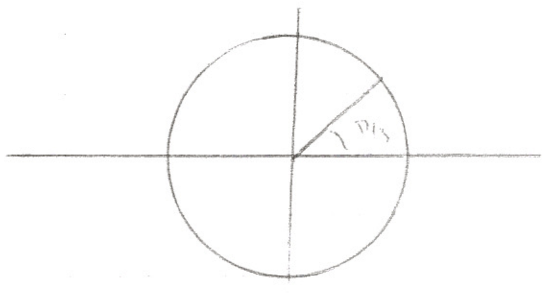
$$z_1 = \sqrt[3]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{3}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{3} + i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{3} + i\frac{4\pi}{3}}$$



$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$



Η εξίσωση $z^n = \omega$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \neq 0$ έχει n διακεκριμένες λύσεις.

$\omega = |\omega| e^{i \arg\omega}$

$z_1 = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i \frac{\arg\omega}{n}}$

$z_2 = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i \frac{\arg\omega}{n} + \frac{2\pi}{n} i}$

⋮

$z_k = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i \frac{\arg\omega}{n} + \frac{2(k-1)\pi}{n} i}$

$\sqrt[n]{\omega} = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i \frac{\arg\omega}{n}}$ (πρωτεύουσα ή κύρια τιμή της n-οστής ρίζας του ω).

Αντίστοιχα:

$\log z = \log|z| + i\arg z$ κύριος κλάδος λογαρίθμου.

$z = |z| e^{i\arg z}$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$

$\log_k z = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i$ $k \in \mathbb{Z}$

Ομοιόμορφη συνέχεια

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$

$f: A \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$|f(z) - f(\omega)|$

· Επίσης: $\forall \{z_n\}, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $|z_n - w_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z_n) - f(w_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

$z^w = e^{w\log z}$, όπου $\log z$ κύριος κλάδος λογαρίθμου

Να υπολογιστεί το i^i

$i^i = e^{i\log i} = e^{i[0 + i\frac{\pi}{2}]} = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\pi/2}$.

$i = e^{i\pi/2}$.

$\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2}$

$e^{i(\log_k i)} = e^{i(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$= e^{-\pi/2} e^{-2k\pi}$

$f_n \to f$ ομοιόμορφα αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\varepsilon)$:
$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$
$\forall z \in A$.

Οικογένεια Συναρτήσεων με ιδιότητα

$I \Longrightarrow$ άρα να έχει την ίδια ιδιοτ. στο I.

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, φραγμένη , Riemann ολοκλ.

&

$f_n \to f$ ομοιομ.

f φραγμένη $\Rightarrow$ f Riemann ολοκλ.

και $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b \lim\limits_n f_n(x)\, dx$

Παράγωγοι

f_n παραγωγίσιμες $f_n : (a,b)$

1) $f_n' \to g$ ομοιομ.

2) Έστω $f_n(x_0)$ συγκλίνει $x_0 \in (a,b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in (a,b)$ $\exists \lim f_n(x) = f(x)$

μάλιστα $\forall [c,d] \subseteq (a,b)$

$\lim f_n(x)$ ομοιομ. στο $[c,d]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) (μάλιστα

$f'(x) = g(x)$ $\forall x \in (a,b)$

$= \lim\limits_n f_n'(x)$).

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Κριτήριο Weisersrass:

Αν $M_n \geq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει
& $|f_n(x)| \leq M_n \ \forall x \in D$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιομ.

Αν $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής & $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συνεχής.

Αν f_n παραγωγίσιμες, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$ συγκλίνει ομοιομ.

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

και μάλιστα $\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

5/10/2017

Η σειρά
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$ συγκλίνει αν $|z|<1$

$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} z^n = m+1$, $z=1$

$\frac{1-z^{m+1}}{1-z}$, $1-z \neq 0$.

Η a_n είναι μηδενική $\Leftrightarrow$ $|a_n|$ είναι μηδενική ακολουθία

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - 0| < \varepsilon$, $n \geq n_0$
$\Rightarrow |z^{m+1}| = |z|^{m+1}$

Αν $|z|>1$ τότε $\lim_m |z|^{m+1} = +\infty$ (είναι γνήσια αύξουσα ώστε να είναι φραγμένη).

$|z|^{m+1} = |z|^m \cdot |z| \Rightarrow \exists \lim_m z^m = A$
$\not\downarrow$

Θα έπρεπε $A = A|z| \Rightarrow A(1-|z|) = 0$

Αν $\arg z = \frac{m}{n}\pi \Rightarrow z^m$ είναι περιοδική

ενώ αν $\arg z =$ άρρητος π τότε δεν είναι περιοδική

Αν $|z|<1$:
$$\lim_m S_m(z) = \lim_m \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \lim_m \left(\frac{1}{1-z} - \frac{z^{m+1}}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}$$

Αν A συμπαγές $\subseteq B(0,1)$ έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} \quad , \ |z|<1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dz} z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad , \ |z|<1$$

Δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (a_n)_{n=0}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C} \ , \ z_0$$

Ακτίνα Σύγκλισης: R

- Αν $|z-z_0|<R$ η σειρά συγκλίνει
- αν $|z-z_0|>R$ η σειρά δε συγκλίνει

n

$$\overline{\lim_n} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

Αν $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R}+\varepsilon \ , n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R}+\varepsilon \qquad n \geq n_0$$

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n$$

$$|a_n||z-z_0|^n \le \left(\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-z_0| \right)^n \quad , n \geq n_0$$

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει αν $a<1$

Είναι $\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-z_0|<1$;

$$\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-z_0|<1 \iff |z-z_0| < \frac{1}{\frac{1}{R}+\varepsilon} = \frac{R}{1+\varepsilon R}$$

Αν η σειρά συγκλίνει $\Rightarrow \lim_n a_n(z-z_0)^n = 0.$

και επειδή $\lim_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} \longrightarrow \frac{1}{R} \iff \left(R^{n_k}|a_{n_k}|\right)^{1/n_k} \longrightarrow 1$$

Ο/ως $\lim_n |a_n||z-z_0|^{n_k} \to 0$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $(a_n)_{n=0}^{+\infty} \subseteq \mathbb{C}$ και θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{τότε:}$$

$\forall\ |z-z_0| < R := \dfrac{1}{\overline{\lim_n} |a_n|^{1/n}}$ συγκλίνει απολύτως //.

Η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ παραγωγίζεται στο $w \in \mathbb{C}$ όπου
$\lim_{z \to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = f'(w) \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \ (\delta=\delta(\varepsilon,w))$

ώστε $\left| \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w) \right| < \varepsilon \quad , \quad 0<|z-w|<\delta.$

Η σειρά $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης R.

$a_n, b_n > 0$

$\lim_n b_n = b > 0$ τότε $\overline{\lim}(a_n b_n) = \overline{\lim_n} a_n \lim_n b_n$ (που υπάρχει αν συγκλίνει)

Μάλιστα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση $\forall\, |z-z_0| < R$ με $\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

συγκλίνει ομοιόμορφα αν $|z-z_0| < r < R$

<u>Απόδειξη</u>

Θα αποδείξουμε ότι αν $|z-z_0| < R$ η σειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(z) = g(z)$

$$s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$$

Θέτουμε $s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$

$$s_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Επιλέγω $|z-z_0| < R$, $|w-z_0| < R$

$B(w, \delta_1) \subset B(z_0, R) \Rightarrow B(z_0, |w-z_0| + \delta_1) \subseteq B(z_0, R)$

και

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \frac{s_N(z) - s_N(w)}{z-w} - s_N'(w) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^n - (w-z_0)^n}{z-w}$$

$$- \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n (w-z_0)^{n-1}$$

Εστω ε>0, επιλογές αρχικα N_1 ωστε $\sum_{n=N+1}^{+\infty} n|a_n||w-z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}$ $N \geq N_1$

$$\frac{(z-z_0)^n-(w-z_0)^n}{z-w} = (z-w)\frac{\left((z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(w-z_0)+\dots+(z-z_0)(w-z_0)^{n-2}+(w\dots\right.}{z-w}$$

$$\left|\frac{(z-z_0)^n-(w-z_0)^n}{z-w}\right| \leq |z-z_0|^{n-1}+|z-z_0|^{n-2}|w-z_0|+\dots+|w-z_0|^{n-1} \leq nr^n$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n\frac{\left[(z-z_0)^n-(w-z_0)^n\right]}{z-w}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq \varepsilon/3 \quad , N \geq N_2$$

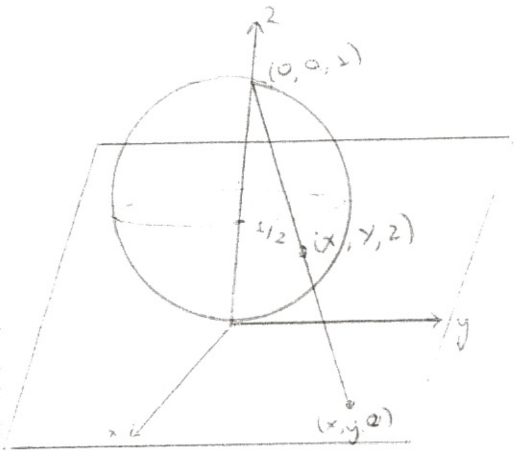
Επιλεγω $\tilde{N}=\max(N_1, N_2)$ οπότε κανω τη διασπαση και επειδη η $S_{\tilde{N}}(z)$ ειναι παραγωγίσιμη στο w, υπαρχει $\delta(\leq \delta_1)$ ωστε:

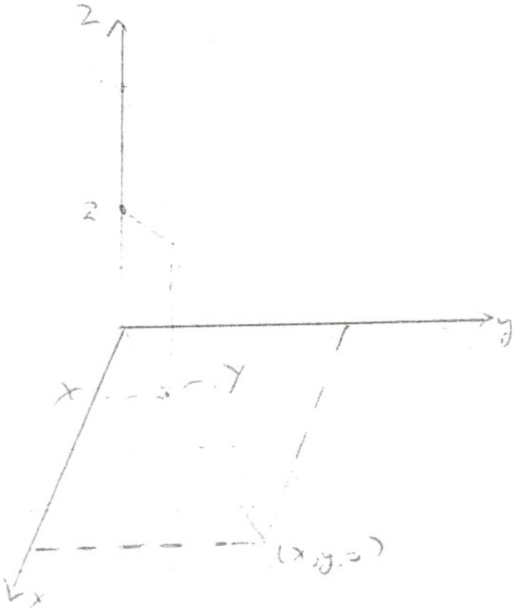
$$\left|\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S'_{\tilde{N}}(w)\right| < \varepsilon/3 \quad , \quad 0<|z-w|<\delta$$

Τοτε για $0<|z-w|<\delta$ έχουμε:

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right| = \left|\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S'_{\tilde{N}}(w)+\mathrm{I}-\mathrm{II}\right|$$

$$\leq \left|\frac{S_{\tilde{N}}(z)-S_{\tilde{N}}(w)}{z-w}-S'_{\tilde{N}}(w)\right|+|\mathrm{I}|+|\mathrm{II}|$$





$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{1}{1-Z}$$

$$(X-0)^2 + (Y-0)^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff$$

$$\iff x^2(1-Z)^2 + y^2(1-Z)^2 + \left(Z-1+1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff x^2(x^2+y^2)(1-Z)^2 + (1-Z)^2 + (Z-1) = 0 \iff$$

$$\iff (x^2+y^2)(1-Z) + (1-Z) - 1 = 0 \iff (1-Z)(1+x^2+y^2) = 1$$

Άρα $X = \frac{x}{x^2+y^2+1}$

$Y = \frac{y}{x^2+y^2+1}$

$Z = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$

10/10/2017

Ορισμός $f: A \to \mathbb{C}$ τότε είναι συνεχής; (στο $z_0 \in A$)

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \ \forall |z - z_0| < \delta$

Πρόταση: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) f συνεχής στο A

β) $\forall$ ανοιχτό $B \subseteq \mathbb{C}$, $f^{-1}(B)$ ανοιχτό σύνολο (στο A)

γ) $\forall$ κλειστό $K \subseteq \mathbb{C}$, $f^{-1}(K)$ κλειστό στο A

Απόδειξη:

(α) $\Rightarrow$ (β)

Έστω B ανοικτό, $z_0 \in f^{-1}(B)$ $(\neq \emptyset) \iff f(z_0) \in B$ και επειδή B ανοιχτό $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ $B(f(z_0), \varepsilon) \subset B$

Η f είναι συνεχής στο z_0, άρα $\exists \delta > 0$:

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, $|z - z_0| < \delta$

$\Updownarrow$ $f(z) \in B(f(z), \varepsilon)$

$\Rightarrow B(z_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(z_0), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(B)$

19/10/2017

f ολόμορφη & $|f| = 1 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C}$ $f(z) = c$

είναι απαραίτητη προϋπόθεση

Παράδειγμα:

$f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z) = \bar{z}$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
η $h(z) = z$ — // — — // —

$\Rightarrow fh$ να είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
$(f \cdot h)(z) = \dfrac{\bar{z}}{z} \cdot z = \bar{z}$ άτοπο

$|f(z)| = \dfrac{|\bar{z}|}{|z|} = 1$.

Έστω $\left.\begin{array}{l} z = |z| e^{i \arg z} \\ \bar{z} = |z| e^{-i \arg z} \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z} = e^{-2i \arg z}$ $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Cauchy-Riemann:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$u, v : \Omega \to \mathbb{R}$.
$\exists\, u_x, u_y, v_x, v_y \in C(\Omega) \Rightarrow f$ ολ. $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$
$+ u_y(x,y) - iv_y(x,y)$.

Παράδειγμα:

$z = x+yi \quad , x,y \in \mathbb{R}$

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) =$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

$= \underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$

$u_x(x,y) = e^x\cos y \qquad\qquad u_y = -e^x\sin y$

$\shortparallel$

$v_y(x,y) = e^x\cos y \qquad\qquad v_x(x,y) = e^x\sin y$

Από το αντίστροφο του θεωρήματος η e^z είναι ολόμορφη $\forall z \in \mathbb{C}$

$(e^z)' = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = e^x\cos y + i e^x \sin y = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Ξέρουμε ότι για $x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

και $(e^x)' = e^x$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad , x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{aligned}}$$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$\Rightarrow \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Η $\log z \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$\log|z| + i\arg z$

<u>Άσκηση:</u> Έστω $f(z) = \log z \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$g(z) = e^{z}$, $z \in \mathbb{C}$ $\quad g(f(z)) = z \quad , z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

ολόμορφη

Δείξτε ότι f ολόμορφη

<u>Λύση:</u>

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}} = \frac{1}{\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}} = \frac{1}{\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}} =$$

$w = f(z)$

$w_0 \to f(z_0)$

g ολόμορφη άρα: $\lim_{w \to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = g'(w_0).$

24/10/2017

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$, πάντοτε συνεχής

Αν $\gamma(a) = \gamma(b)$ τότε έχουμε <u>κλειστή</u> καμπύλη

Αν $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ $\forall\, t, s \in (a, b)$, $t \neq s$ τότε έχουμε <u>απλή</u> καμπύλη

Η γ είναι C^1 αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $\gamma'(t)$ να είναι συνεχής στο $[a, b]$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\gamma'(t)|\,dt$$

γ κατά τμήματα C^1
$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$
$\Rightarrow \gamma\big|_{[a_{i-1}, a_i]}$ είναι C^1 $\forall\, i = 1, 2, \dots, k$

<u>**Θεώρημα Jordan**</u>: Απλή κλειστή καμπύλη $\Rightarrow$
- φραγμένο ανοικτό χωρίο
- μη φραγμένο ανοικτό χωρίο

$\gamma: [a, b] \to \gamma[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

αν $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx \quad$ f φραγμένη

αν $f: [a, b] \to \mathbb{C}$
f Riemann ολοκληρώσιμη αν $f(t) = u(t) + i v(t)$ τα u, v είναι Riemann ολοκληρώσιμα.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann ολοκλ. , $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.
$\Rightarrow \lambda f+\mu g$ είναι R-ολοκληρώσιμη

$$\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt$$

Έστω $f:[a,b]\to[m,M]$ και $g:[m,M]\to\mathbb{R}$
$g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη αν
f R-ολοκλ. και g συνεχής

Θεμελιώδες Θεώρημα Α.Π: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και f
R-ολοκλ.. $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $|f|\leq M$ η F είναι

Lipshitz : $|F(x)-F(y)|\leq M|x-y|$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow F$ παραγ. στο x_0,
$F'(x_0)=f(x_0)$

Θεώρημα: Έστω $\int_a^b f'(s)ds$. Αν f παραγ. και
f' R-ολοκλ. τότε $\int_a^b f'(s)ds = f(b)-f(a)$

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη
Τότε $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$ Πότε ισχύει η ισότητα;

$f(t) = u(t) + iv(t)$, $t\in[a,b]$ $u = Re f$
$v = Im f$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \sqrt{\left(\int_a^b u(t)dt\right)^2 + \left(\int_a^b v(t)dt\right)^2}$$

$$\int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b \sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,dt$$

Απόδειξη

Έστω $\int_a^b f(t)dt = w = |w|e^{i\theta} \Rightarrow |w| = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta}f(t)dt$

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta}f(t)dt = \int_a^b A(t)dt + i\underbrace{\int_a^b B(t)dt}_{0} \le \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)| = \int_a^b |f(t)|dt$$

$$e^{-i\theta}f(t) = A(t) + iB(t) = \begin{cases} A = Re(e^{-i\theta}f) \\ B = Im(e^{-i\theta}f) \end{cases}$$

Αν f συνεχής στο $[a,b]$

$$\int_a^b A(t)dt = \int_a^b \sqrt{A^2(t)+B^2(t)}\,dt \Rightarrow A(t) = \sqrt{A^2(t)+B^2(t)}$$

Άρα $B(t)\equiv 0$

$A(t) = e^{-i\theta} f(t) \iff f(t) = e^{i\theta} A(t)$

Έστω $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ και $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

και η γ κατά τμήματα C^1 $(f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C})$

Ιδιότητες:

1) Αν $f, g : \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς τότε $\lambda f + \mu g$ $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ υπάρχει το επικαμπύλιο στη γ και μάλιστα

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \mu \int_\gamma g(z)\,dz$$

2) Αν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$

$\gamma^-(a) = \gamma(b)$

$\gamma^-(b) = \gamma(a)$

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

$$\int_a^b f(\gamma^-(t))\gamma^{-\prime}(t)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\cdot\gamma'(a+b-t)\,dt =$$

$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1
$f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ συνεχής

τότε $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|\, \ell(\gamma)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \le M \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt}_{\ell(\gamma)}$$

$$M = \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|$$

Έστω Ω τόπος και $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχείς και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\gamma([a,b])$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

<u>Απ</u> έχουμε

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b (f_n(z) - f(z))\,dz \right| \le$$

$$\le \max_{t \in [a,b]} |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \searrow 0$$

Έστω $f: \underline{\Omega}$ τόπος $\to \mathbb{C}$ συνεχής. Η f έχει παράγουσα αν $\exists$ ολόμορφη συνάρτηση $F: \underline{\Omega} \to \mathbb{C}$ ώστε $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \underline{\Omega}$.

<u>Πρόταση:</u> Έστω $\underline{\Omega}$ τόπος $\subseteq \mathbb{C}$, $f: \underline{\Omega} \to \mathbb{C}$, $\gamma: [a,b] \to \underline{\Omega}$ κατά τμήματα C^1.
Αν η f έχει παράγουσα F τότε $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

26/10/2017

<u>Πρόταση:</u> Έστω $\underline{\Omega}$ τόπος, $f: \underline{\Omega} \to \mathbb{C}$ συνεχής που έχει παράγουσα F και $\gamma: [a,b] \to \underline{\Omega}$ κατά τμήματα C^1. Τότε:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Τη $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 θα τη λέμε καμπύλη (μονοπάτι)

<u>Απόδειξη:</u>

$F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \underline{\Omega}$. Επίσης $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

Όμως $\frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, $[a_{i-1}, a_i]$

$\gamma: [a_{i-1}, a_i]$ είναι C^1

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} F(\gamma(t))' dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(F(\gamma(a_i)) - F(\gamma(a_{i-1}))\right) = F(\gamma(a_n)) - F(\gamma(a_0)) =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Άσκηση Αποδείξτε ότι $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = 0$

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Η προηγούμενη πρόταση οπότε η συνάρτηση $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγουσα την $-\frac{1}{z}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Οπότε

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{\gamma(2\pi)} - \left(-\frac{1}{\gamma(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma(2\pi)} + \frac{1}{\gamma(0)} = -1 + 1 = 0$$

Θεώρημα Cauchy: Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $\gamma: [a, b] \to \Omega$ κλειστή καμπύλη με την επιπρόσθετη ιδιότητα, το εσωτερικό της καμπύλης ν' ανήκει στο Ω. Τότε $\int_\gamma f(z) dz = 0$

Απόδειξη

Αν επιπρόσθετα $f'(z)$ να είναι συνεχής τότε:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \quad (1)$$

Έστω $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ $\quad \gamma(t) = x(t) + y(t)\cdot i$

$x, y \in [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$(1) = \int_a^b [u((x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))] \cdot (x'(t) + i y'(t)) dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t))] y'(t) +$$

$$+ i \int_a^b [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t))] y'(t)] dt$$

$$= \int_a^b (u(x(t), y(t)) - v(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))$$

$$+ i \int_a^b (v(x'(t), y(t), u x(t)), y(t)) (x'(t), y'(t)) dt$$

Θ. Green

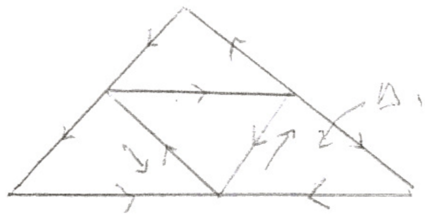
$$\iint_A \left[-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

31/10/2017

Λήμμα: Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και Δ τρίγωνο ώστε $\Delta \subseteq \Omega$ τότε $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$

Απόδειξη:

Απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως υπάρχει τρίγωνο Δ και ολόμορφη $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $\int_{\partial \Delta} f(z) dz \neq 0$



$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{T_1} f(z)\,dz + \int_{T_2} f(z)\,dz + \int_{T_3} f(z)\,dz + \int_{T_4} f(z)\,dz$$

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{T_i} f(z)\,dz\right| \le 4\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz$$

Επιλέγουμε εκείνο το τρίγωνο που το επικαμπύλιο κατ' απόλυτη τιμή είναι το μεγαλύτερο. Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε τα τρίγωνα

$$\Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots \supseteq \Delta_n \supseteq \dots$$

Περίμετρος του $\Delta_1 = \dfrac{\text{Περίμετρος } \Delta_0}{2} \Rightarrow$ Περίμετρος $\Delta_n = \dfrac{\text{Περίμετρος } \Delta}{2^n}$

$|\partial\Delta_n|$

Διάμετρος $\Delta_n = \dfrac{\text{Διάμετρος } \Delta_0}{2^n}$

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|$$

Αν $z_i \in \Delta_i \Rightarrow \{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists\, z_{n_k}$ συγκλίνει

$z_{n_k} \to z_0$

$z_n \in \Delta_n$ &

$z_m \in \Delta_n$, $m \ge n$.

Δ_N , $z_n \in \Delta_N$, $n \geq N$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \Delta_N$

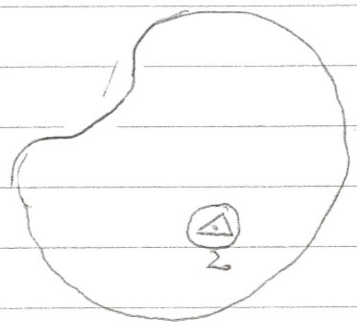
$\bigcap_{i=1}^{+\infty} \Delta_i = \{z_0\}$

Οπότε $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \Delta_n$

Επειδή f ολόμορφη στο z_0, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad 0 < |z - z_0| < \delta, \ z \in \Omega$$

$\Leftrightarrow | f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) | \leq \varepsilon |z - z_0|$, $|z - z_0| < \delta$.



Επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $\Delta_n \subset B(z_0, \delta)$, $n \geq n_0$

τότε $\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_0} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz$

$+ \underbrace{\int_{\partial\Delta_0} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz}_{=0}$ (*)

(*) Αφού $\exists$ παράγουσα και η καμπύλη είναι κλειστή τότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. (από θεώρημα)

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0))dz \right|$$

$$\leq \max |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \text{ περίμετρος } \Delta_n$$
$$= \varepsilon \text{ Διάμετρος του } \Delta_n \cdot \text{Περίμετρος } \Delta_n$$
$$= \varepsilon \frac{\text{Διάμετρος } \Delta}{2^n} \frac{|\partial \Delta|}{2^n}$$

επιλέγω $\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)dz \right| \leq 4^n \frac{\varepsilon \ldots}{2^n 2^n}$

$$\Longrightarrow \int_{\partial \Delta_n} f(z)dz = 0$$

$$\left| \int_{\gamma_n} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz \right| = \left| \int_a^b (f(\gamma_n(t))\gamma_n'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \right| =$$
$$= \left| \int_a^b (f(\gamma_n(t)) - f(\gamma(t)))\gamma'(t)\,dt \right.$$
$$\left. + \int_a^b f(\gamma_n(t))(\gamma_n'(t) - \gamma'(t))\,dt \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_a^b (f(\gamma_n(t)) - f(\gamma(t)))\gamma'(t)\,dt \right| + \left| \int_a^b f(\gamma_n(t))(\gamma_n'(t) - \gamma'(t))dt \right|$$

$\gamma_n' \to \gamma'$ ομ.

$\gamma_n(t) \to \gamma(a) \Longrightarrow \gamma_n \to \gamma$ ομ/ιο.

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$

$\gamma|[a_{i-1}, a_i]$ είναι C'

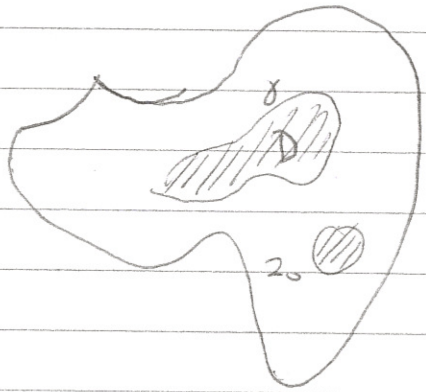
$\gamma'[a_{i-1}, a_i]$ είναι συνεχής και ομ. συνεχής

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

Πρόταση: Έστω $z_0 \in \underline{\Omega}$ τότε, $f : \underline{\Omega} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, f συνεχής στο z_0 και γ κλειστή καμπύλη με το εσωτερικό αυτής να είναι στο $\underline{\Omega}$. τότε: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Απόδειξη:

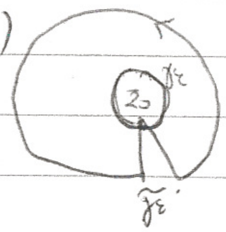
1) $z_0 \in \underline{\Omega} \setminus D$ => προηγούμενη απόδειξη



2) $z_0 \in \gamma[a,b]$

3) $z_0 \in D^\circ$

2)



$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\left|\int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le \max|f(z)| \cdot \overbrace{\left(2\pi\varepsilon + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\gamma'(t)|\,dt\right)}^{\text{μήκος της } \gamma_\varepsilon}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Έστω $z_0 \in A$
$z_0 \longrightarrow f(z_0) \in R(f)$ (Range: Image)

Έστω $\varepsilon > 0$, ώστε $f^{-1}(B(f(z_0), \varepsilon))$ ανοιχτό με
$z_0 \in f^{-1}(B(f(z_0), \varepsilon))$ άρα $\exists \ \delta > 0$, ώστε $B(z_0, \delta) \cap A \subseteq f^{-1}(B(f(z_0), \varepsilon))$

$$\left.\begin{array}{l} |z - z_0| < \delta \\ z \in A \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) \in B(f(z_0), \varepsilon)$$

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f \in C(\mathbb{C})$ τότε
$f^{-1}\{z \in \mathbb{C} \mid f^2(z) = 1\}$ το σύνολο είναι

κλειστό

$f^{-1} = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = \pm 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \{-1, 1\}\} \subseteq \mathbb{C}$

$\Rightarrow f^{-1}(\{-1, 1\})$ κλειστό

$\underline{\Pi.\chi.}$ $f(z) \equiv 1 \Rightarrow f^{-1}\{-1, 1\} = \mathbb{C}$

Συνεκτικότητα

Το S συνεκτικό, αν δεν υπάρχουν δύο ανοιχτά σύνολα A, B με τις ιδιότητες:

1. $S \cap A \neq \emptyset$
2. $S \cap B \neq \emptyset$
3. $S \cap A \cap B \neq \emptyset$
4. $S \subseteq A \cup B$

Πρόταση: Έστω $f: S \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν S είναι συνεκτικό τότε $f(S)$ είναι συνεκτικό επίσης.

Απόδειξη:

Έστω πως το $f(S)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε $\exists A, B$ ανοιχτά με τις ιδιότητες:

$f(S) \subseteq A \cup B$

$f(S) \cap A \neq \emptyset$

$f(S) \cap B \neq \emptyset$

$f(S) \cap A \cap B \neq \emptyset$

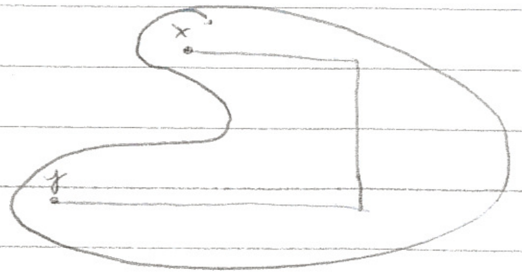
$\emptyset \neq f^{-1}(A)$ ανοιχτό

$\emptyset \neq f^{-1}(B)$ ανοιχτό

$f(S) \subseteq A \cup B \Leftrightarrow f^{-1}(A \cup B) = S$

$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = S$.

Θεώρημα: Έστω ... Ω ανοιχτό στο $\mathbb{C}$. Εάν το Ω είναι συνεκτικό τότε για κάθε 2 σημεία του Ω υπάρχει πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα δυο σημεία και βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο Ω. Μάλιστα μπορούμε να πάρουμε την πολυγωνική γραμμή να έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες.



· ανοιχτό - συνεκτικό $\subseteq \mathbb{C}$

Απόδειξη:

Έστω πως υπάρχουν δύο σημεία $z, w \in \Omega$ ώστε να μην συναντώνται με πολυγωνική γραμμή μέσα στο το Ω, τότε ορίζουμε:

$A = \{ z_1 \in \Omega \mid$ το z_1 ενώνεται με πολυγ. γραμμή (παρ/λη στους άξονες) με το $z \}$

$\Gamma = \{ w_1 \in \Omega \mid$ το w_1 που δεν ενώνεται με πολυγ. γραμμή με το $w \}$

Τότε $A \neq \emptyset$ (προφανώς $z \in A$), το A είναι ανοιχτό διότι αν $a \in A$ τότε υπάρχει πολυγωνική γραμμή (με πλευρές παρ/λες στους άξονες) που τα ενώνει. Επειδή τα $a \in \Omega$ ανοιχτό $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : B(a, \delta) \subset \Omega$ θα αποδείξουμε ότι $B(a, \delta) \subset A$. Αν $z_1 \in B(a, \delta)$ τότε υπάρχει πολυγ. γραμμή που ενώνει το z_1 με το a

Η ένωση δύο πολυγ. γραμμών ενώνει το z με το $z_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow B(a, \delta) \subset A$

$A \cup \Gamma = \Omega$

Το $w \in \Gamma \neq \emptyset$. Το Γ είναι ανοιχτό, διότι αν $z_2 \in \Gamma$, $z_2 \in \Omega$, άρα $\exists\, \delta_1 > 0 : B(z_2, \delta_1) \subseteq \Omega$

Θα αποδείξουμε ότι όλη η μπάλα περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο A. Αν δεν ισχύει θα υπήρχε $b \notin \Gamma$, $|z_2 - b| < \delta$, άρα το b ενώνεται με το z.
Όμως το b ενώνεται με το z_2 και άρα και το z_2 θα έπρεπε να ενώνεται με το z

ΑΤΟΠΟ

Επομένως Γ ανοιχτό. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Omega = A \cup \Gamma \\ A \cap \Gamma = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΑΔΥΝΑΤΟ αφού το Ω είναι συνεκτικό

Η έννοια της παραγώγου

Ορισμός: Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 αν $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0 : \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$

$0 < |z - z_0| < \delta$.

Παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ Συνέχεια

→ Είναι η $f(z) = \bar{z}$ παραγωγίσιμη;

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z_0}}{z - z_0} = \frac{(\bar{z} - \bar{z_0})^2}{|z - z_0|^2}$$

Έστω $z = x + yi \quad x, y \in \mathbb{R}$
$z_0 = x_0 + y_0 i \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Άρα $\dfrac{(x-yi-(x_0-y_0 i))^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \dfrac{(x-x_0-(y-y_0)i)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} =$

$= \dfrac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 i^2 - 2(x-x_0)(y-y_0)i}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} =$

$= \dfrac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \dfrac{2(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\, i$

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

- $y=y_0$:

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 1.$

- Όμοια αν $x=x_0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0} = -1$

Άρα f όχι παραγωγίσιμη

Έστω $\underline{O}$ ανοιχτό, $f: \underline{O} \to \mathbb{C}$ παραγωγίσιμη $\forall z \in \underline{O} \Rightarrow f$ ολόμορφη συνάρτηση

12/10/2017

Άλγεβρα των Παραγωγίσιμων Συναρτήσεων

Πρόταση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν $\exists$ συνεχής στο z_0 συνάρτηση ϕ ώστε να έχουμε ότι $f(z)-f(z_0)=\phi(z)(z-z_0)$ (μάλιστα $\phi(z_0)=f'(z_0)$)

Απόδειξη:

($\Rightarrow$)

Ορίζω $\phi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z\neq z_0\\ f'(z_0), & z=z_0\end{cases}$ $\quad z\in\underline{O}$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}\phi(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)=\phi(z_0)$$

($\Leftarrow$)

Αν υπάρχει ϕ συνεχής ώστε $f(z)-f(z_0)=\phi(z)(z-z_0)$ για $z\neq z_0 \Rightarrow \phi(z)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{\phi \text{ συνεχής}} \lim\limits_{z\to z_0}\phi(z)=\phi(z_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\phi(z_0)=f'(z_0)$$

Ιδιότητες:

$\underline{O}$ ανοιχτό, Έστω $f,g:\underline{O}\to\mathbb{C}$, $z_0\in\underline{O}$ τότε

1. Αν f,g παραγωγίσιμες στο z_0, τότε $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και μάλιστα $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$

2. f,g παραγωγίσιμη στο $z_0 \Rightarrow f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. $(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$

③ Εστω $g(z_0) \neq 0$ και g παραγωγίσιμη στο z_0

α) $\frac{1}{g(z)}$, $\Omega \setminus \{z \mid g(z)=0\}$

$\{z \in \Omega \mid g(z)=0\} = g^{-1}\{0\}$ κλειστό

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ παραγωγίζεται στο z_0 και ισχύει

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \frac{-g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

β) Αν επίσης f παραγ. στο $z_0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ παραγ. στο z_0

και $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$

④ Εστω $g : \Omega \to V$

$f : V \to \mathbb{C}$, Ω, V ανοιχτά

τότε ορίζεται $f \circ g$ $\Omega \to \mathbb{C}$:

Αν $z_0 \in \Omega$ και η g παραγωγίζεται στο z_0, η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(z_0)$ τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και ισχύει $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\, g'(z_0)$

Απόδειξη.

Αφού η f παραγωγίζεται στο $g(z_0)$, $\exists\ \phi$ συνεχής στο $g(z_0)$: $^{*} f(w) - f(g(z_0)) = \phi(w)(w - g(z_0))$, $w \in V$

Η g παραγωγίζεται στο z_0, άρα $\exists\ \psi$ συνεχής στο z_0 $g(z) - g(z_0) = \psi(z)(z - z_0)$ $z \in \Omega$

Επιλέγω $w = g(z) \in V \overset{(*)}{\Rightarrow} f(g(z)) - f(g(z_0)) = \phi(g(z))(g(z) - g(z_0))$
$= \phi(g(z))\, y(z)(z - z_0)$

$\Rightarrow f \circ g$ παραγ.

$(f \circ g)'(z_0) = \phi(g(z_0))\, y(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$

17/10/2017

Πρόταση: Εστω $h : [a, b] \to \mathbb{C}$, παραγωγίσιμη και έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ τ.ω $h[a, b] \subset \Omega$ ανοιχτό $\subseteq \mathbb{C}$ παραγωγίσιμη τότε $f \circ h : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $(f \circ h)'(t) = f'(h(t))h'(t)$

Ορισμός: Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και Ω τόπος (ανοιχτό - συνεκτικό) τότε η f λέγεται ολόμορφη ή Αναλυτική αν $\forall z \in \Omega$, η f είναι παραγωγίσιμη

Συνθήκες Cauchy-Riemann

$u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$u, v : \Omega \to \mathbb{R}$

$z = x + yi \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z = (x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$

$f(z) = u(z) + i v(z)$

$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$

$v(z) = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$

Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε ισχύει:

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = $$
$$= v_y(x,y) - i u_y(x,y)$$

Ισχύει δηλαδή: $u_x(x,y) = v_y(x,y)$
$u_y(x,y) = v_x(x,y)$

<u>Αντίστροφως</u> Αν $\exists$ $u_x(x,y)$, $v_y(x,y)$, $u_y(x,y)$, $v_x(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις (*) τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

(*) και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann

<u>Απόδειξη:</u>

"$\Rightarrow$"

Έστω η f παραγωγίζεται στο $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + y_0 i$ τότε

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$. Οπότε αν επιλέξουμε

$h \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε: $\dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \dfrac{u(z_0+h) + i v(z_0+h) - u(z_0) - i v(z_0)}{h}$

$$= \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}.$$

Οπότε επειδή $\exists \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ και

επειδή $\exists \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \dfrac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} = u_x(x_0, y_0)$

$\exists \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \dfrac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} = v_x(x_0, y_0)$

Άρα $\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u_x(x_0,y_0)+i v_x(x_0,y_0)}$

Αν επιλέξουμε τώρα $h = ti$ τότε έχουμε:

$$\frac{f(z_0+ti)-f(z_0)}{ti} = \frac{u(z_0+ti)+iv(z_0+ti)-u(z_0)-iv(z_0)}{ti} =$$

$$= \frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{ti} + i\,\frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{ti}$$

Οπότε: επειδή $\exists \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

επειδή $\exists \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t} = u_y(x_0,y_0)$

$\exists \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t} = v_y(x_0,y_0)$

Άρα $\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = v_y(x_0,y_0) - i u_y(x_0,y_0)}$

"$\Leftarrow$"

$\exists\, u_x, u_y, v_x, v_y : \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $u_x = v_y$, $u_y = -v_x \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

Όμως $h = t+si \quad t,s\in\mathbb{R}$

$h\to 0 \Leftrightarrow t^2+s^2\to 0$

$$\text{Apa} \quad \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u(z_0+h)+iv(z_0+h)-u(z_0)-iv(z_0)}{h} =$$

$$= \frac{u(x_0+t,y_0+s)-u(x_0,y_0)+i[V(x_0+t,y_0+s)-V(x_0,y_0)]}{t+si}$$

$u(x_0+t,y_0+S)-u(x_0,y_0) = u(x_0+t,y_0+s)-u(x_0+t,y_0)+u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0) =$

$(\exists\ s_1 : |s_1|<|s|)$, $(\exists\ t_1 : |t_1|<|t|)$

$= u_y(x_0+t,y_0+s_1)s + u_x(x_0+t_1,y_0)t - u_y(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)s - u_x(x_0,y_0)t + u_x(x_0,y_0)t$

$= [u_y(x_0+t,y_0+s_1)-u_y(x_0,y_0)]S + [u_x(x_0+t_1,y_0)-u_x(x_0,y_0)t]$

$V(x_0+t,y_0+s)-V(x_0,y_0) = V(x_0+t,y_0+S)-V(x_0+t,y_0)+V(x_0+t,y_0)-V(x_0,y_0)$

$\exists\ s_2 : |s_2|<|S|$ $\qquad \exists\ t_2 : |t_2|<|t|$

$= V_y(x_0+t,y_0+s_2)s + V_x(x_0+t_2,y_0)t - V_y(x_0,y_0)s + V_y(x_0,y_0)s - V_x(x_0,y_0)t + V_x(x_0,y_0)t$

$= [V_y(x_0+t,y_0+s_2)\ S - V_y(x_0,y_0)]S + [V_x(x_0+t_2,y_0)-V_x(x_0,y_0)]t$
$\quad + V_y(x_0,y_0)s + V_x(x_0,y_0)t$

$$\text{Apa} \quad \underbrace{[u_y(x_0+t,y_0+s_1)-u_y(x_0,y_0)]}_{\delta_1}\frac{S}{t+Si} + \overbrace{[u_x(x_0+t_1,y_0)-u_x(x_0,y_0)]\frac{t}{t+si}}^{\delta_2}$$

$$+[V_y(x_0+t,y_0+s_2)-V_y(x_0,y_0)]\frac{si}{t+si} + [V_x(x_0+t_2,y_0)-V_x(x_0,y_0)]\frac{ti}{t+si}$$

$$+\frac{u_y(x_0,y_0)S+u_x(x_0,y_0)t+i[V_y(x_0,y_0)S+V_x(x_0,y_0)t]}{t+si} =$$

$$= u_x(x_0,y_0)+V_x(x_0,y_0)i$$

$|B_1| \leq |u_y(x_0+t, y_0+s_1) - u_y(x_0,y_0)| \xrightarrow{t+s_1\to 0} 0$

Πρόταση 1: Αν $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (Ω τόπος) και $f'(z)=0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C}$ τ.ω $f(z)=c$, $\forall z \in \Omega$.

Απόδειξη:

Έστω $f(z) = u(z) + i v(z)$ $\quad (u, v: \Omega \to \mathbb{R})$

Από συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 0$$
$$= v_y(z) - i u_y(z) = 0.$$

$$\boxed{\begin{matrix} u_x(z)=0 \\ u_y(z)=0 \end{matrix}} \;\; \text{(I)} \qquad \boxed{\begin{matrix} v_x(z)=0 \\ v_y(z)=0 \end{matrix}} \;\; \text{(II)}$$

$\exists\, c_1 \in \mathbb{R}$: $\overset{\text{(I)}}{\Longrightarrow} u(x,y) = c_1$.

$\exists\, c_2 \in \mathbb{R}$ $\overset{\text{(II)}}{\Longrightarrow} v(x,y) = c_2$.

Άσκηση: Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (Ω τόπος) τέτοια ώστε $|f(z)| = c$, $\forall z \in \Omega$ τότε $\exists\, w \in \mathbb{C}$: $f(z) = w$ $\forall z \in \Omega$

Λύση

Έστω $c \neq 0$

$\Longrightarrow |f(z)| = c \Rightarrow |f(z)|^2 = c^2$

όμως $f(z) = u(z) + i v(z)$

Άρα: $u^2(x,y) + v^2(x,y) = c^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2(x,y) + v^2(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x} c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2uu_x + 2uu_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(u^2(x,y) + v^2(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y} c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2uu_y + 2vv_y = 0$$

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases} \underset{u_y = -v_x}{\overset{u_x = v_y}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ vu_x + uu_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\quad) = u^2 + v^2 = c^2 \neq 0. \Rightarrow u_x = u_y = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = c_1$$

$$v(x,y) = c_2$$

Ομοίως για $\begin{cases} uv_y + vv_x = 0 \\ -uv_x + vv_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y = 0.$

Άρα $f(z) = c_1 + c_2 i$

19/10/2017

f ολόμορφη & $|f| = 1 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C}$ $f(z) = 0$

είναι απαραίτητη προϋπόθεση

<u>Παράδειγμα:</u>

$f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z) = \bar{z}$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

η $h(z) = z$ — // — — // —

$\Rightarrow fh$ να είναι παραγωγίσιμη στο z_0

$(f \cdot h)(z) = \dfrac{\bar{z}}{z} \cdot z = \bar{z}$ άτοπο

$|f(z)| = \dfrac{|\bar{z}|}{|z|} = 1$

έστω $z = |z| e^{i \arg z}$, $\bar{z} = |\bar{z}| e^{-i \arg z}$ $\Rightarrow f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z} = e^{-2i \arg z}$ $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

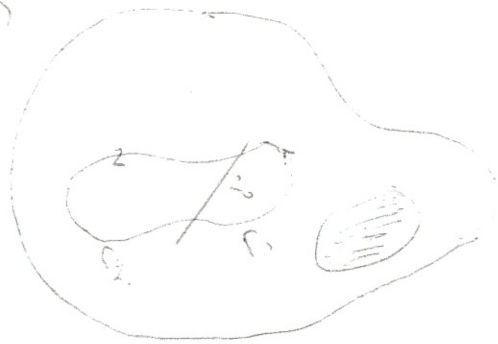
<u>Cauchy-Riemann:</u>

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$u, v : \Omega \to \mathbb{R}$

$\exists\, u_x, u_y, v_x, v_y \in C(\Omega) \Rightarrow f$ ολ. $f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$
$+ u_y(x,y) - i u_y(x,y)$

3)



$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Έστω Ω τόπος και $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ (κατά τμήματα C^1) ώστε $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

και το εσωτερικό των γ_1, γ_2 να βρίσκεται στο Ω. Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\gamma_1(a) = z_0$

$\gamma_1(b) = z$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

2/11/2017

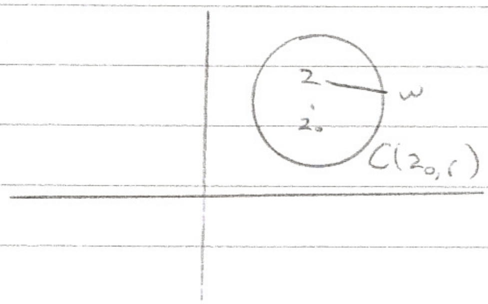
Λήμμα: Έστω $r>0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$t \in [0, 2\pi]$. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 0 & , |z-z_0|>r \\ 2\pi i & , |z-z_0|<r \end{cases}$

Απόδειξη:

i) $|z-z_0|>r \Rightarrow$ Από Θ. Cauchy $\displaystyle\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 0$

ii) $|z-z_0|<r$



$$|z-z_0| < r = |w-z_0| \Rightarrow \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$$

Οπότε: $$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1+\frac{z_0-z}{w-z_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{w-z_0} - \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n,$$

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_\gamma \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} \quad (1)$$

$$\int_\gamma \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)^{n+1}}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt = \begin{cases} i\,2\pi, & n=0 \\ 0, & n=1,2,\dots \end{cases}$$

Η παράγουσα στην περίπτωση που $n \geq 1$ είναι $\frac{-e^{int}}{in}$

$$① = (z-z_0)^0 \int_\gamma \frac{dw}{w-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (z-z_0)^n \int_\gamma \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = 2\pi i$$

Έστω τώρα ότι $\gamma(t) = z_0 + re^{imt}$, $t \in [0, 2\pi]$, $m \in \mathbb{N}$.

Όμοια με το προηγούμενο με τη διαφορά:

$$\int_\gamma \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)^{n+1}}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{imre^{imt}}{(re^{imt})^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{im}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{imt-im(n+1)t}\,dt =$$

$$= \frac{im}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-imnt}\,dt = \begin{cases} m2\pi i, & n=0 \\ 0, & n=1,2,\dots \end{cases}$$

Θεώρημα (ολοκληρωτικός τύπος Cauchy): Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$, τότε αν $|z - z_0| < r$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

7/11/2017

Θεώρημα (ολοκληρωτικός τύπος Cauchy): Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη & $z \in \overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$, τότε αν $|z-z_0|<r$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση $g: \Omega \to \mathbb{C}$, με τύπο

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Η g είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z\}$ και είναι συνεχής στο z, διότι $\lim_{w \to z} g(w) = g(z) \iff$

$\iff \lim_{w \to z} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z)$ το οποίο ισχύει επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο z.

Τότε επειδή $B(z_0,r) \subset \Omega$, πληρούνται οι προϋποθέσεις για το Θ. Cauchy, δηλαδή $\int_{C(z_0,r)} g(w)\,dw = 0 \iff$

$$\iff \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = 0 \iff \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \underbrace{\int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w-z}}_{= 2\pi i} = 0$$

$$\iff f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Θεώρημα (ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους):
Έστω Ω τόπος και $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε η f είναι παραγωγίσιμη $(n \in \mathbb{N})$ και μάλιστα:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=1$, δηλ. η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}$$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-(z+h)} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \right]$$

$|h| < r - |z - z_0| \Rightarrow z + h \in D(z_0, r)$, διότι:

$$|z+h-z_0| = |z - z_0 + h| \leq |z - z_0| + |h| < |z - z_0| + r - |z - z_0| = r$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \quad \text{και έχουμε}$$

$$\frac{1}{h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-(z+h)} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \right] - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}$$

$$\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(w)\left[\frac{1}{w-(z+h)}-\frac{1}{w-z}-\frac{h}{(w-z)^2}\right]dw =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{h}\,\frac{(w-z)^2-(w-z)(w-(z+h))-h(w-(z+h))}{(w-z)^2(w-(z+h))}\,dw =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{h}\,\frac{h^2}{(w-z)^2(w-(z+h))}\,dw =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(w)\frac{h}{(w-z)^2(w-(z+h))}\,dw$$

$|w-z| \geq r-|z-z_0|$

$|w-(z+h)|$, επιλέγω $|h| < \dfrac{r-|z-z_0|}{2}$

$$|w-(z+h)| = |w-z-h| \geq |w-z|-|h| =$$
$$= r-|z-z_0|-\frac{r-|z-z_0|}{2} = \frac{r-|z-z_0|}{2}$$

Επομένως:

$$\left|\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(w)\left[\frac{1}{w-(z+h)}-\frac{1}{w-z}-\frac{h}{(w-z)^2}\right]dw\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi|h|}\,2\pi r \max_{|w-z_0|=r}\frac{|f(w)|\cdot|h|^2}{|w-z|^2|w-(z+h)|} \leq$$

$$\leq r|h|\frac{2\max|f(w)|}{r-|z-z_0|}$$

. Άρα $\lim \Big(\qquad \Big) = 0$

Υποθέτω ότι ισχύει για $n=k$ δηλ

$$f^{(k)} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw$$

Τότε θα αποδείξουμε ότι η f είναι $k+1$ φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα:

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}} dw$$

Όμως

$$f^{(k+1)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \Bigg[\frac{\frac{k!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-(z+h))^{k+1}} dw - \frac{k!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}}{h}$$

$$- \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}} dw + \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}} dw \Bigg]$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{1}{|h|} \left| \int_{C(z_0,r)} f(w) \left(\frac{1}{(w-(z+h))^{k+1}} - \frac{1}{(w-z)^{k+1}} - \frac{(k+1)h}{(w-z)^{k+2}} \right) dw \right| \leq$$

$$\leq C_2 \|h\| \max_{|w-z_0|=r} |f(w)| \frac{1}{\left(\frac{r-|z-z_0|}{2}\right)^{k+2}}$$

f ολόμορφη $D(z_0,r) \subseteq \Omega$

$\Longrightarrow f$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη, $z \in D(z_0,r)$

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega.$$

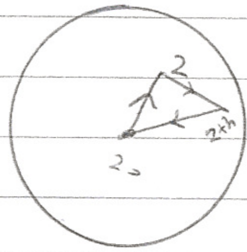
Θεώρημα (Morera): Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής με την ιδιότητα $\forall\, \Delta \subseteq \Omega$ $\int_{\partial \Delta} f(\omega) d\omega = 0$ τότε η f είναι ολόμορφη.

Απόδειξη:

Έστω $z_0 \in \Omega$ και επειδή το Ω είναι ανοιχτό, $\exists\, r > 0 : D(z_0,r) \subseteq \Omega$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι ολόμορφη στο $D(z_0,r)$

Για $z \in D(z_0,r)$ ορίζουμε:

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\omega) d\omega, \quad z \in D(z_0,r)$$



Θα αποδείξουμε ότι η F είναι ολόμορφη και μάλιστα $F'(z) = f(z)$, $z \in D(z_0,r)$

$h \neq 0$ $(|h| < r - |z - z_0|)$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left[\int_{[z_0,z+h]} f(\omega) d\omega - \int_{[z_0,z]} f(\omega) - h f(z)\right]$$

Εφαρμόζω την υπόθεση του Θεωρήματος:

$$\int_T f(\omega) d\omega = 0 \iff \int_{[z_0,z]} f(\omega) d\omega + \int_{[z,z+h]} f(\omega) d\omega - \int_{[z_0,z+h]} f(\omega) d\omega = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \int_{[z_0, z+h]} f(w)\,dw - \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw = \int_{[z, z+h]} f(w)\,dw$$

$\int_{[z, z+h]} f(z)\,dw$

Οπότε: $$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left[\int_{[z, z+h]} f(w)\,dw - h f(z)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{[z, z+h]} (f(w) - f(z))\,dw\right]$$

$\exists \delta>0$ $\forall |h|<\delta$: $$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z, z+h]} (f(w)-f(z))\,dw\right|$$

$$\leq \frac{|h|}{|h|} \max_{w\in[z, z+h]} |f(w) - f(z)| \leq \max_{|w-z|<h} |f(w) - f(z)|$$

Η f είναι συνεχής στο z, άρα $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$
$|w-z|<\delta \Rightarrow |f(w)-f(z)|<\varepsilon$
οπότε αν $|h|<\delta$

Έστω Ω τόπος και $z_0 \in \Omega$ και
$f: \Omega \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε η f
να είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z_0\}$ και είναι συνεχής
στο z_0. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω

Απόδειξη

Θ. Cauchy Ο.Κ., δηλ. $\int_{\partial\Delta} f(w)\,dw = 0$

Θ. Morera, τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω
και άρα και στο z_0

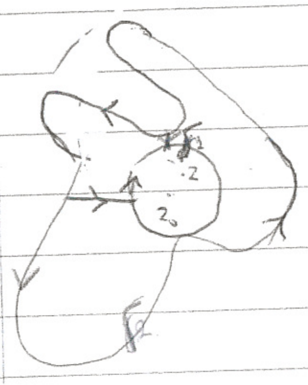
9/11/2017

Θεώρημα (Γενικευμένος ολοκληρωτικός τύπος Cauchy): Έστω $\underline{O}$ τόπος, $f: \underline{O} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, γ απλή κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη (μονοπάτι) με θετικό προσανατολισμό με το εσωτερικό της γ στο $\underline{O}$. Αν z στο εσωτερικό της γ, τότε:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

(Επίσης $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$)

Απόδειξη

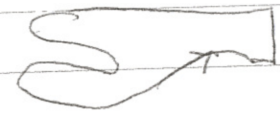


$z \in C(z_0, r) \subset$ εσωτ. της γ

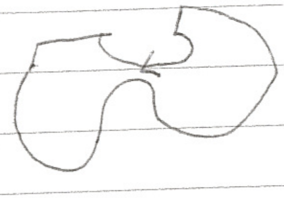
$\Downarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Γ_1:



Γ_2:



$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 0$$

$\Downarrow$

διότι είναι ολόμορφη στο εσωτερικό της γ_1.

Αντίστοιχα: $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 0$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0 \iff$$

$$\iff \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{I} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{II} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$+ \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{I'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{II'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0$$

<u>Θεώρημα (Taylor)</u>: Έστω Ω ανοιχτό, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $D(z_0,r) \subset \Omega$, $C(z_0,r) \subset \Omega$, τότε $\forall$ $z \in D(z_0,r)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

$\log(z) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με
$(\log(z))' = \frac{1}{z}$

R ακτίνα σύγκλισης

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0 \iff$$

$$\iff \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{I} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{II} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$+ \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{I'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{II'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0$$

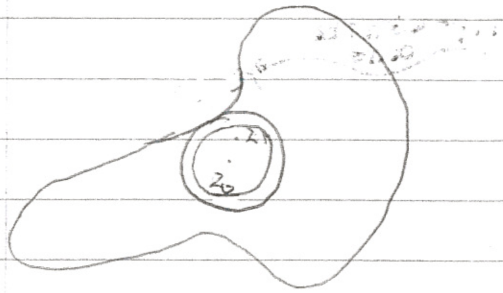
14/11/2017

Θεώρημα (Taylor): Έστω Ω ανοιχτό, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $D(z_0,r) \subset \Omega$, $C(z_0,r) \subset \Omega$, τότε $\forall$ $z \in D(z_0,r)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

$\log(z): \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με
$(\log(z))' = \frac{1}{z}$

R ακτίνα σύγκλισης

Απόδειξη:



Επιλέγω $r_0 < r$, ώστε $|z-z_0| < r_0$
Τότε το Θ. Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

με $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$.

$$\left.\begin{array}{l} |w-z_0| = r_0 \\ |z-z_0| < r_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$ συγκλίνει ομοιόμορφα, $|w-z_0| = r_0$, $|z-z_0| < r_0$

Επομένως $$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \, (z-z_0)^n$$

Όμως το Θ. Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n \xrightarrow{\text{προκύπτει από}} \boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

<u>Ξέρουμε</u>: $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ και $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

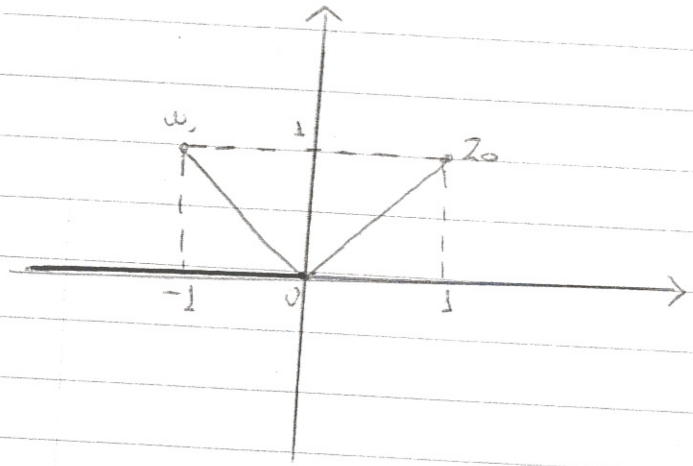
$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

<u>Ξέρουμε</u> $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$\log z \quad , z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$



$f(z) = \log(z)$

$f'(z) = \frac{1}{z}$

$f''(z) = -\frac{1}{z^2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n} \quad , n \in \mathbb{N}$

$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \log z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!\, z_0^n}(z-z_0)^n$

$= \log z_0 + \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n$

$z_0 = |z_0| e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \log z_0 = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4}$

Επομένως: $f(z) = \frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n$

$$f(z) = f(w_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!} (z-w_0)^n$$

$$w_0 = -1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \log w_0 = \frac{\log 2}{2} + i\frac{3\pi}{4}$$

<u>Άρα</u>: $f(z) = \frac{\log 2}{2} + i\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z-w_0}{w_0}\right)^n , \ |z-w_0|<1$

<u>Ρίζες ολόμορφων συναρτήσεων</u>

Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολό/μορφη

$\forall z_0 \in \Omega, \ \exists r>0: D(z_0, r) \subset \Omega$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Αν $p \in \Omega$, ρίζα της f: $f(p)=0$ θα μπορούσε $f^{(n)}(p)=0$, $\forall n \in \mathbb{N}$?

Θα ισχύει αν:

$\Rightarrow f(z)=0, \ |z-p|<r$

Θα αποδείξουμε ότι $f(z)=0, \ z\in\Omega$

Έστω Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, $\forall z_0 \in \Omega$, $\exists r>0: D(z_0, r) \subset \Omega$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Αν $p \in \Omega$, ρίζα της f, τότε $\exists m \in \mathbb{N}$, ώστε $f'(p) = \dots = f^{(m-1)}(p) = 0$, $f^{(m)}(p) \neq 0$

Γράφοντας με χρήση Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n = (z-p)^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^{n-m}$$

$f(z) = (z-p)^m \cdot \Pi(z)$, $\Pi(p) \neq 0$, όπου m πολλ/τα της p.

Κανόνας L'Hospital

Έστω Ω τόπος, $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες & g (όχι η ταυτοτικά μηδέν συνάρτηση) ώστε

$f(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$

$g(z_0) = \dots = g^{(m-1)}(z_0) = 0$, $g^{(m)}(z_0) \neq 0$

Τότε
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \dots = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(m-1)}(z)}{g^{(m-1)}(z)} =$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(m)}(z)}{g^{(m)}(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

Γύρω απ' το z_0: $g(z) = (z-z_0)^{m-1} \cdot \Pi(z)$ με $\Pi(z_0) \neq 0$

Από συνέχεια της $\Pi(z)$ στο z_0 έχουμε ότι $\exists r>0$ (r μικρό):

$\Pi(z) \neq 0$, $|z-z_0| < r$, $D(z_0, r) \subset \Omega$

Επομένως η $g(z)$ δεν έχει άλλη ρίζα στην $D(z_0, r)$ εκτός της z_0

$\boxed{k \geq m-1}$

$f(z) = (z-z_0)^k \cdot Q(z)$, με $Q(z_0) \neq 0$ τότε για $|z-z_0|<r$:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-z_0)^k Q(z)}{(z-z_0)^m \Pi(z)} = (z-z_0)^{k-m} \frac{Q(z)}{\Pi(z)}$$

$$\xRightarrow{z \neq z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

Έστω $f: \underline{U} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $D(z_0,R) \subset \underline{U}$: ισχύουν οι εκτιμήσεις:

$$(1) \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq n! \frac{\max_{t \in [0,2\pi]} |f(z_0+Re^{it})|}{R^n}$$

__Απόδειξη:__

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad , \quad |z-z_0|<R$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{C(z_0,R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it}) \cdot iRe^{it}}{(Re^{it})^{n+1}} dt \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})| dt \leq \frac{n!}{R^n} \max_{t \in [0,2\pi]} |f(z_0+Re^{it})|$$

Αν $f: \underline{U} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε η f λέγεται ακέραιη

Θεώρημα Liouville: Έστω f ακέραια, φραγμένη. Τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη:

Έστω M, $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Από τις εκτιμήσεις Cauchy έχουμε:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n} M \quad , n \in \mathbb{N} \quad , D(0,R) \subset \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq \lim_{R \to +\infty} \frac{n! M}{R^n} = 0 \quad , f^{(n)}(0) = 0 \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$f(z) = f(0) \quad , \forall z \in \mathbb{C}$$

Πρόταση: Κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει (μιγαδικές) ρίζες.

Απόδειξη

Έστω $Q(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $a_N \neq 0$ που δεν έχει μιγαδικές ρίζες, $Q(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \frac{1}{Q(z)}$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ τότε:

$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{Q(z)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q(z)}$ φραγμένη στο $\mathbb{C}$

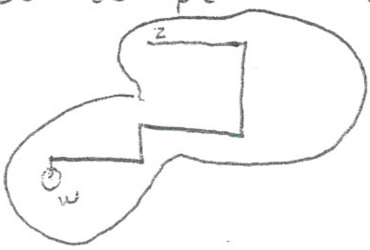
$\Rightarrow \frac{1}{Q(z)} = c \Rightarrow Q$ σταθερό

16/11/2017

Θεώρημα Ταυτοποίησης: Έστω Ω τόπος, $w \in \Omega$, $\exists\, \varepsilon > 0$ $B(w,\varepsilon) \subset \Omega$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $f(z) = 0$ $z \in B(w,\varepsilon)$ $\Rightarrow f(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$

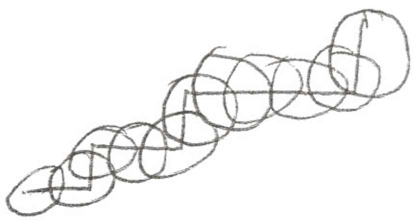
Απόδειξη

Έστω $z_1 \in \Omega_1 \Rightarrow \exists$ πολυγωνική γραμμή $\subseteq \Omega$ ενώνει το w με το z_1



$\forall\, z \in \Gamma \subset \Omega$, $\exists\, \varepsilon_z > 0 : D(z,\varepsilon_z) \subset \Omega$ $\Rightarrow \Gamma \subset \bigcup D(z,\varepsilon_z)$, όμως το Γ είναι συμπαγές, $\exists$ πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $w_1, w_2, \dots, w_n \in \Gamma$

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} D(w_k, \varepsilon_{w_k})$$



Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, Ω τόπος $\exists\, (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ ώστε $f(p_n) = 0$, $p_n \to p \in \Omega$, $p_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow f(z) \equiv 0,\ z \in \Omega$$

Απόδειξη

Αν $f^{(n)}(p) = 0$, $\forall\, n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow f(p) = 0$

$\Rightarrow f(z) = 0$ $|z - p| < \varepsilon \Rightarrow f(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$

αφού: $0 = \lim_{n\to+\infty} f(p_n) = f(\lim_{n\to+\infty} p_n) = f(p)$

Έστω ότι $\exists m \in \mathbb{N}$, ώστε $f^{(m)}(p) \neq 0$ τότε
$\exists m_1 \in \mathbb{N}$ ο μικρότερος δυνατός με $f^{(m_1)}(p) \neq 0$
$\Rightarrow f^{(m)}(p) = 0$, $\forall m < m_1$
Επειδή p σημείο ολομορφίας της $f \overset{\text{taylor}}{\Longrightarrow} \exists r > 0$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(z-p)^k = \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(z-p)^k$$

$$= (z-p)^{m_1} \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(z-p)^{k-m_1}$$

Όμως επειδή $\lim p_n = p \Rightarrow \exists N_1 : n \geq N_1$, $p_n \in D(p,\varepsilon)$
Οπότε $n \geq N_1$, $f(p_n) = (p_n-p)^{m_1} \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(p_n-p)^{k-m_1}$, $n \geq N_1$

$$\sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(p_n-p)^{k-m_1} = 0, \quad n \geq N_1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=m_1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(p_n-p)^{k-m_1} = \frac{f^{(m_1)}(p)}{m_1!} = 0$$

ΑΤΟΠΟ

Π.χ

$f: D(0,1) \to \mathbb{C}$ ολομ.
$f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow f(z) = 1 + z$.

$g(z) = f(z) - 1 - z$, $z \in D(0,1)$
$g(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

30/11/2017

Μεμονωμένη ανωμαλία: Ω ανοιχτό, $\Omega - \{z_0\}$
$z_0 \in \Omega$, $\exists D(z_0, r_0)$: $f: D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$
ολόμορφη. Αν Ω ανοιχτό και $f: \Omega \setminus \cup\{z_i\}$
και $z_i \in \Omega$

Αν η f ολόμορφη $\Rightarrow z_i$ είναι μεμονωμένα σημεία ανωμαλίας.

Είναι πιθανό $\exists z_0, z_n \in \Omega$
$z_n \to z_0$, z_n σημεία:

f ολόμορφη $\Omega \setminus \{z_0, \dots, z_n\}$ $n=1, \dots$
$\Rightarrow$ το z_0 όχι μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας

$\frac{\sin z}{z}$, $z \neq 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

$$\text{"}\frac{\sin z}{z}\text{"} = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

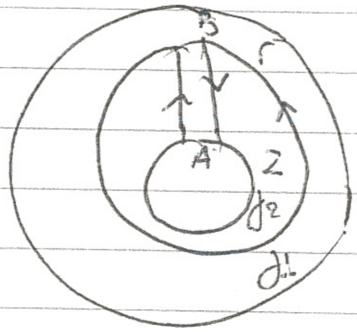
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} \dots$$

Θεώρημα: Έστω $f: D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και επιλέγουμε $z\in D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$ και $0<r_1<|z-z_0|<r_2<r_0$. Τότε ισχύει:

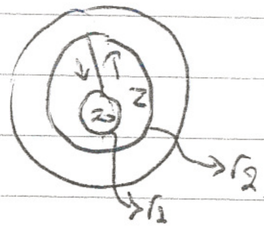
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Απόδειξη



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\underbrace{\int_{\overline{BA}}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw+\int_{AB}\frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{=0}\Bigg)=$$



$$=\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\Bigg)$$

Θεώρημα: Έστω $f: D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη. Επιλέγουμε $z\in D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$. Τότε:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{m=-\infty}^{-1}a_m(z-z_0)^m=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$0<|z-z_0|<r_0$, ομοιόμορφα στα συμπαγή του $D(z_0,r_0)\setminus\{z_0\}$

Απόδειξη

Αν $0 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < r_0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα: $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} =$

$$= \frac{1}{w-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-w_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$ αφού $|z-z_0| < r_2$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right)(z-z_0)^n$$

Για το 2º ολοκλήρωμα: $-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0+z_0-w} =$

$$= \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} f(w)(w-z_0)^n\,dw\right)}_{a_m}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{1+m}}\,dw \quad , m \in \mathbb{Z}$$

Παραδείγματα·

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1-z+z}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

$$= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \qquad 0<|z|<1$$

Πόλος στο 0 τάξης 1

Γύρω από το 0, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z)^n$$

- $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad , \quad 0<|z|<1$

- $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z)^n \quad , \quad 0<|z-1|<1$

Γύρω από ένα σημείο z_0:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0+z_0-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(1-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n$$

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \ z \in \mathbb{C}$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad , \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ ολόμορφη.
Τότε ένα απ' τα ακόλουθα αληθεύει:
i) Το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία, όταν
$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$ (και τότε η f επεκτείνεται

σε ολόμορφη στο $D(z_0, r_0)$)

ii) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ τότε και μόνο τότε αν

z_0 είναι πόλος της f.

iii) $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$, όταν το ανάπτυγμα Laurent

έχει άπειρους αρνητικούς όρους

<u>Απόδειξη</u>

i) Ορίζουμε $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\} \\ a & , z = z_0 \end{cases}$

τότε η $\tilde{f}$ είναι ολόμορφη στο $D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$
& συνεχής στο $D(z_0, r_0)$ οπότε απο "Θεώρημα"
έχουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ολόμορφη στο $D(z_0, r_0)$

ii) Αν το z_0 είναι πόλος, έστω τάξης m, δηλαδή

$$f(z) = \frac{a_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_1}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \left[a_{-m} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \right]$$

$$\Longrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Έστω $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : f(z) \neq 0$

$0 < |z-z_0| < \delta$ και επομένως η $\frac{1}{f(z)}$ ορίζεται

ολόμορφη $0 < |z-z_0| < \delta$ με $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

και επομένως η $\frac{1}{f(z)}$ είναι ολόμορφη στο $D(z_0, \delta)$

Αν m είναι η τάξη της ρίζας της $\frac{1}{f(z)}$, τότε

$\exists$ ολόμορφη h $D(z_0,\delta)$: $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m h(z)$

$h(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{h(z)}$$ → ολόμορφη

$$\Longrightarrow (z-z_0)^m f(z) \text{ ολόμορφη}$$

5/12/2017

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} (w-z_0)^n \qquad 0<r<r_2$$

$$= a_{-1} = Re(f, z_0)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} (w-z_0)^n\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (re^{it})^n \, i r e^{it} dt =$$

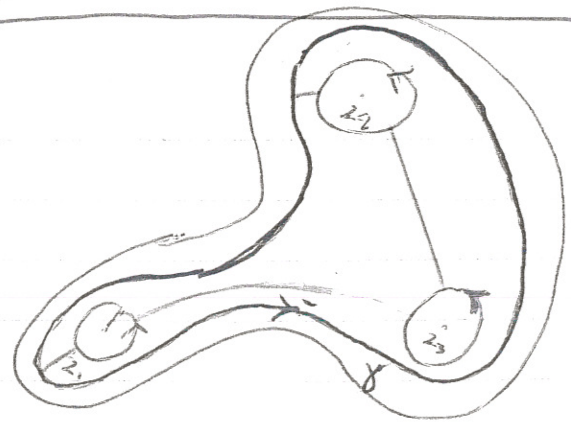
$w = z_0 + re^{it}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)t}\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & n+1 \neq 0 \\ 2\pi, & n=-1 \end{cases}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $z_1, z_2 \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $z_i \neq z_j$, $\forall\, i \neq j$. $\gamma \subset \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ θετικά προσανατολισμένο μονοπάτι, ώστε $z_1, \ldots, z_n$ να είναι στο εσωτερικό της γ. Τότε:

$$\boxed{\int_\gamma f(w)\,dw = 2\pi i\left(Re(f, z_1) + R(f, z_2) + \ldots + Re(f, z_n)\right)}$$

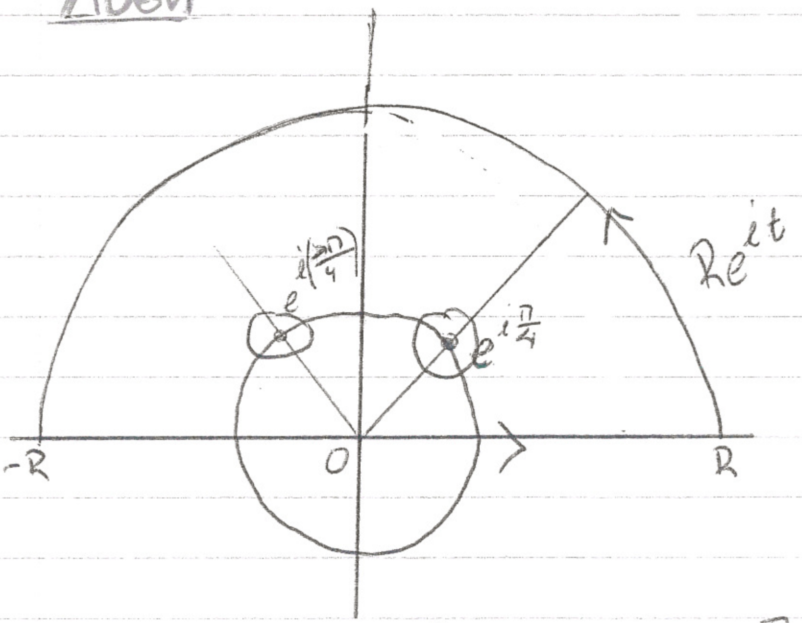


$$\int_\gamma f(w)\,dw = \sum_{k=1}^{n} \int_{C(z_k,r)} f(w)\,dw$$ για κατάλληλα μικρά

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

Άσκηση: Να υπολογιστεί $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

Λύση



$$\int_{\gamma_R} \frac{w^2}{1+w^4}\,dw = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{1+R^4 e^{4it}} \cdot iRe^{it}\,dt$$

$$w^4 = -1 \Rightarrow e^{4i\phi} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 4\phi = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{w^2}{1+w^4} = 2\pi i \left(Re(f, z_0) + Re(f, z_1) \right), \quad z_0 = \frac{\pi}{4}, \quad z_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$Re(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

...

$$f(z) = \frac{Q(z)}{z-z_0} = \frac{a_{-1} + b_1(z-z_0) + \cdots}{z-z_0} =$$

$$= \frac{a_{-1}}{z-z_0} + b_1 + b_2(z-z_0) + \cdots +$$

$$\Longrightarrow (z-z_0) f(z) = a_{-1} + b_1(z-z_0) + \cdots$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = a_{-1}$$

$$Re(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2}{1+z^4} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{z^2}{z^4 - z_0^4} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{(z-z_0)} z^2}{\cancel{(z-z_0)}(z^3 + z^2 z_0 + z z_0^2 + z_0^3)} = \frac{z_0^2}{4 z_0^3} =$$

$$= \frac{1}{4 z_0} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$Re(f, z_1) =$ όμοια με πριν $= \dfrac{1}{4 z_1} = \dfrac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$$Re(f,z_0) + Re(f,z_1) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{\pi}{4}i} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{w^2}{1+w^4} = 2\pi i\left(Re(f,z_0) + Re(f,z_1)\right) = 2\pi i\left(-i\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| i\int_0^{\pi} \frac{R^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}}\, dt \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|1+R^4 e^{4it}|}\, dt \overset{*}{\leq} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4-1}\, dt =$$

$$= \pi \frac{R^3}{R^4-1}$$

$*$ $|z|-|w| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$

$$R^4 - 1 \leq |1+R^4 e^{4it}| \Rightarrow \frac{1}{|1+R^4 e^{4it}|} \leq \frac{1}{R^4-1}$$

Επομένως: $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2} = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} + I_R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx + \cancel{\lim_{R\to+\infty} I_R} \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx + 0$$

$\to$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

$z = e^{it} = \cos t + i\sin t$

$\dfrac{1}{z} = \bar{z} = \cos t - i\sin t$

$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

$\sin t = \dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$

$z = e^{it}$

$dz = ie^{it} = izdt \Rightarrow dt = \dfrac{dz}{iz}$

$$\int_{C(0,1)} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $a>1$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\cos t}$

Λύση

Αν $|z|=1$, $z=e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}dt$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\cos t} = \int_{C(0,1)}\frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)}\frac{dz}{az+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{C(0,1)}\frac{2}{z^2+2az+1}\,dz \qquad 1$$

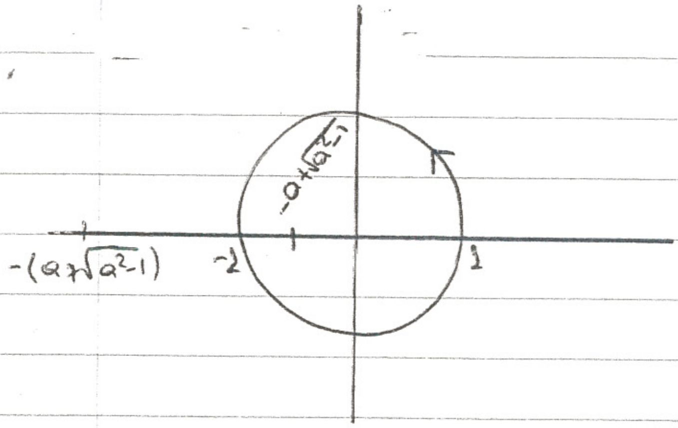
$z^2+2az+a^2-a^2+1 = (z+a)^2-(a^2-1) = (z+a)^2-\left(\sqrt{a^2-1}\right)^2 =$
$= \left(z+a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right)$

Άρα $z_1 = -\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$

$$z_2 = -a+\sqrt{a^2-1} = \frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)}{a+\sqrt{a^2-1}} =$$

$$= \frac{-a^2+\left(\sqrt{a^2-1}\right)^2}{a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{-a^2+a^2+1}{a+\sqrt{a^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}} > -1$$



<u>Συνεπώς</u> η: ① $= \frac{1}{i} 2\pi i (Re(f, z_2))$

$$f(z) = \frac{2}{z^2+2az+1} = \frac{2}{(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})}$$

$$Re(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z-z_2) \frac{2}{(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})} =$$

$$= \lim_{z \to -a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{2}{-a+\sqrt{a^2-1}+a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

<u>Άσκηση:</u> Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

<u>Λύση</u>

$$\int_{\gamma_{R,r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \iff \int_{-R}^{-r} \overset{①}{\frac{\cos x + i\sin x}{x}} dx - \int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt$$

$$+ \int_r^R \overset{②}{\frac{\cos x + i\sin x}{x}} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it} dt = 0$$

$$② = -\int_R^r \frac{\cos(-t)+i\sin(-t)}{-t}\,dt = \int_R^r \frac{\cos t - i\sin t}{t}\,dt =$$

$$= \int_r^R \frac{-\cos t + i\sin t}{t}\,dt$$

$$① + ② = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx - i\int_0^\pi e^{ire^{it}}\,dt + i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}\,dt = 0$$

$$\pi$$

$$\left|\int_0^\pi e^{iR(\cos t + i\sin t)}\,dt\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iR\cos t - R\sin t}\right|\,dt =$$

$$= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \quad ③.$$

$-\sin t \le -At \Rightarrow \sin t \ge At \qquad t \in [0, \pi/2]$

$\Rightarrow \frac{\sin t}{t} \ge A = \frac{2}{\pi}.$

$$③ \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2}{\pi}t}\,dt = 2\left(\frac{e^{-\frac{2}{\pi}Rt}}{-\frac{2}{\pi}R}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\,\frac{e^{-R}-1}{-\frac{2}{\pi}R} = \pi\,\frac{(1-e^{-R})}{R} \to 0$$

(1) + (2) $\Longrightarrow 2i \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi + 0 = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

7/12/2017

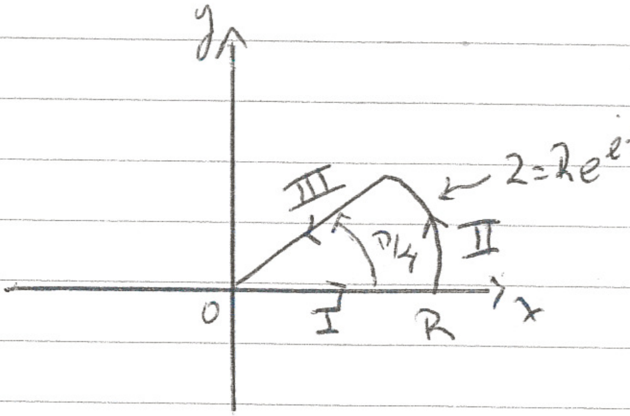
Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$$

Λύση

Θεωρούμε $f(z) = e^{iz^2}$

που ολοκληρώνουμε:



Σκέψη: $R\int_0^{\pi} e^{iR^2 e^{2it} + it}\,dt$

$$\left|R\int_0^{\pi} e^{i(R^2\cos 2t + t) - R^2\sin 2t}\,dt\right| \le R\int_0^{\pi} e^{-R^2\sin 2t}\,dt$$

$$2t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \le \pi/4$$

Η επιλογή αυτή γίνεται γιατί θέλουμε να διατηρήσουμε πρόσημο. Συνεπώς θα μπορούσαμε να κάνουμε οποιδήποτε επιλογή στο πρώτο τεταρτημόριο.

Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Θ. Cauchy

$$\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0 \iff \int_{I} + \int_{II} + \int_{III} = 0.$$

- $\underline{z=x}$: $\displaystyle\int_I e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx$

- $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi/4]$

$$\int_{II} e^{iz^2}\,dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2it}}\, iRe^{it}\,dt = iR\int_0^{\pi/4} e^{i(R^2\cos 2t + t) - R^2\sin 2t}\,dt$$

- $\gamma_R(t) = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t\in[0,R]$.

$$\int_{III} e^{iz^2}\,dz = -\int_0^R e^{it^2 e^{i\frac{\pi}{2}}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = -e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}\,dt$$

<u>Άρα</u>

$$\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx + iR\int_0^{\pi/4} e^{i(R^2\cos 2t + t) - R^2\sin 2t}\,dt - e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}\,dt = 0.$$

$$|II| = \left| iR\int_0^{\pi/4} e^{i(R^2\cos 2t + t) - R^2\sin 2t}\,dt\right| \leq$$

$$\leq R\int_0^{\pi/4} \left|e^{i(R^2\cos t + t)}\right| e^{-R^2\sin 2t}\,dt = R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t}\,dt$$

$$\leq R\int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2}{\pi}t}\,dt = R\left[\frac{e^{-\frac{4R^2}{\pi}t}}{-\frac{4R^2}{\pi}}\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= R\left(\frac{1-e^{-R^2}}{\frac{4R^2}{\pi}}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1-e^{-R^2}}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} |I_R| = 0$$

Στόχος: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = A$, $A^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \cdot \int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds =$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+s^2)}dt\,ds.$$

Μετατροπή σε πολικές:

$t = r\cos\theta$

$s = r\sin\theta$.

$$A^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr = -\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}(-2re^{-r^2})dr =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}(e^{-r^2})'\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{ix^2}dx = \lim_{R\to+\infty} e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-t^2}dt - \underbrace{\lim_{R\to+\infty}\left(iR\int_0^{\pi/4}\cdots\right)}_{=0} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx = \int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

<u>Άσκηση</u>: Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Παρατηρώ ότι $\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}$

$$\Rightarrow \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{5^n z^{n+1}} =$$

$$= \frac{5}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{(\ +z)^{2n}}{(5n)^{n+1}} \, dz$$

<u>Επομένως</u>: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+z)^{2n}}{(5z)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+z)^2}{5z} \right)^n$

$$w = \frac{(1+z)^2}{5z}$$

$$|w| < 1 \Rightarrow \left| \frac{(1+z)^2}{5z} \right| < 1 \xRightarrow{|z|<1} \frac{|(1+z)^2|}{5} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1+z|^2 < 5 \Rightarrow |1+z| < \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+z)^2}{5z} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{(1+z)^2}{5z}} = \frac{5z}{5z - z^2 - 2z - 1} =$$

$$= \frac{5z}{-z^2 + 3z - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+z)^2}{5z} \right)^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{z} \frac{5z}{-z^2+3z-1} dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{z} \frac{5z}{z^2-3z+1}$$

$$\rightarrow z^2-3z+1 = z^2 - 2\cdot\frac{3}{2} z + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 + 1 - \frac{9}{4} =$$

$$= \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$p_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1.$ $\quad p_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

<u>Άρα:</u> $-\operatorname{Res}(f, p_2) = -\lim (z-p_2) \frac{5}{(z-p_1)(z-p_2)} = -\frac{5}{p_2-p_1} =$

$$= -\frac{5}{-\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

<u>Άσκηση:</u> Έστω Ω τόπος $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ με f ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{a\}$ και f φραγμένη κοντά στο a. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω

ΠΡΟΟΔΟΣ

Θέμα 5

α) Ω τόπος, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $f(z) = u(z) + i v(z)$
$u, v : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u^3(z) + v^3(z) = 1 \quad , \forall z \in \Omega$$

Ποια είναι η μορφή της f;

β) Έστω $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $|g(z) - z| < |z|$
$\forall z \in D(0,1) \Rightarrow |g'(1/2)| \leq 8.$

Λύση

α) $u^3(x,y) + v^3(x,y) = 1.$

$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} 3u^2 u_x + 3v^2 v_x = 0 \Leftrightarrow u^2 u_x + v^2 v_x = 0 \quad (1)$$

Συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

$$(1) \Rightarrow u^2 u_x - v^2 u_y = 0$$

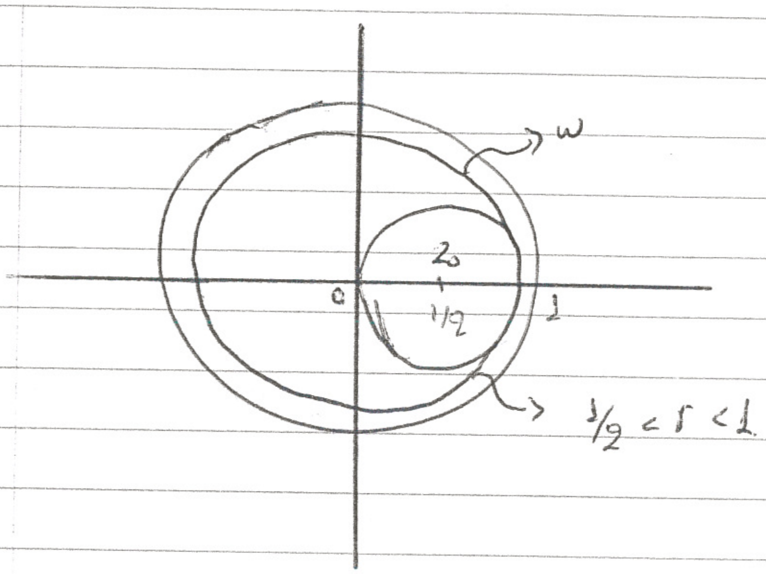
$$\overset{\frac{d}{dy}}{\Rightarrow} u^2 u_y + v^2 v_y = 0 \Leftrightarrow v^2 u_x + u^2 u_y = 0$$

$$\Rightarrow u_x = u_y = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = c$$

β) Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παράγωγο:

$$\boxed{g'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^2}\,dw}$$, z_0 εσωτερικό της γ.



$$g'(1/2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{g(w)-w}{(w-\frac{1}{2})^2}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{(0,2)} \frac{w}{(w-1/2)^2}\,dw$$

$$|g'(1/2)| \le 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{(r-1/2)^2}\,d\theta = 1 + \frac{r^2}{(r-1/2)^2} \to 1+4=5$$

$$|w-\tfrac{1}{2}| \ge r-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|w-\frac{1}{2}|^2} \le \frac{1}{(r-\frac{1}{2})^2}$$

12/12/2017

Πώς μετράμε ρίζες;

Πρόταση Έστω $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, Ω τόπος $\gamma: [0,1] \to \Omega$ ένα κλειστό μονοπάτι και $f(\gamma(t)) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$ και $z_1, \dots, z_n$ ρίζες της f στο εσωτερικό της γ (m_i = πολλ/τα της ρίζας z_i, $i=1,\dots,n$) τότε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = \#\text{ ριζών της } f \text{ στο εσωτερικό της } \gamma \text{ παίρνοντας υπόψην την πολλ/τα τους } m_1+m_2+\dots+m_n$$

Απόδειξη

Επιλέγουμε διακούς ακτίνες δ (μικρή) ώστε $\overline{D(z_i,\delta)}$ εσωτερικό της γ

$\overline{D(z_i,\delta)} \cap \overline{D(z_j,\delta)} = \emptyset$ $\forall i \neq j$

Τότε θα έχουμε ότι η συνάρτηση $\frac{f'(z)}{f(z)}$ είναι ολόμ/φη

B ανοιχτό $B \supseteq \gamma$ και τα εσωτερικά σημεία της και δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f

Οπότε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_1,\delta)} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_2,\delta)} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_n,\delta)} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

↑

Επειδή η f είναι ολόμορφη στο $D(z_j,\delta)$

$\Rightarrow f(z)=(z-z_j)^{m_j}Q_j(z)$, $|z-z_j|\le\delta$

$Q_j(z_j)\neq 0$

Q_j ολόμορφη στο $\overline{D(z_j,\delta)}$

$\Rightarrow f'(z)=m_j(z-z_j)^{m_j-1}Q_j(z)+(z-z_j)^{m_j}Q_j'(z)$

$(Q_j(z)\neq 0 \quad \forall z\in\overline{D(z_j,\delta)})$

$$0<|z-z_j|\le\delta \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m_j(z-z_j)^{m_j-1}Q_j(z)+(z-z_j)^{m_j}Q_j'(z)}{(z-z_j)^{m_j}Q_j(z)}=$$

$$=m_j\frac{1}{z-z_j}+\frac{Q_j'(z)}{Q_j(z)} \rightsquigarrow \text{ολόμορφη στο } \overline{D(z_j,\delta)}$$

Επομένως
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{f'(w)}{f(w)}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{m_j}{w-z_j}dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\cancel{\int_{C(z_j,\delta)}\frac{Q_j'(w)}{Q_j(w)}dw}^{\,0}=$$

$$=m_j\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)}\frac{1}{w-z_j}dw=m_j$$

γιατί $z=z_j+\delta e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$$\int_{C(z_j,\delta)}\frac{dw}{w-z_j}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta i e^{it}}{\delta e^{it}}dt=2\pi i$$

Μερόμορφη f σε μεμονωμένα σημεία έχει πόλους

Ω τόπος, $f:\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_n\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και z_j είναι πόλοι για την f, δηλαδή $m_j\in\mathbb{N}$ $\exists\,\delta>0$: $(z-z_j)^{m_j}f(z)$ είναι ολόμορφη στο $D(z_j,\delta)$

- $$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_j)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_j)^{m-1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_j}+a_0+a_1(z-z_j)+\dots+a_k(z-z_j)^k+\dots$$

$$(z-z_j)^m f(z)=a_{-m}+\frac{a_{-m+1}}{z-z_j}+\dots+$$

$$\lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{m_j}f(z)\neq 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_j,\delta)} f(w)\,dw=a_{-1}=\mathrm{Res}(f,z_j)$$

Πρόταση Έστω Ω τόπος, $z_1,\dots,z_k\in\Omega$ και $f:\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_k\}$ ολόμορφη τα z_j είναι πόλοι για την f τάξης m_j και $\gamma:[0,1]\to\Omega$ μονοπάτι (απλή κλειστή καμπύλη κατά τμήματα C^1 με θετικό προσανατολισμό) τα $z_1,z_2,\dots,z_k$ είναι εσωτερικά της γ, $f(\gamma(t))\neq 0$ $\forall t\in[0,1]$

Τότε $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = \#$$ πλήθος ριζών της f στο εσωτερικό της γ (υπολογίζοντας την πολλαπλότητά τους)

- $\#$ πλήθος των πόλων παίρνοντας υπόψην την πολλ/τα τους

Απόδειξη

Η f έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών. Γιατί όχι άπειρο?

→ Έστω w_k ρίζες της f στο εσωτερικό της γ

$w_k \to w_0$

$w_0 \in \gamma(t) \cup \{\text{εσωτερικό της } \gamma\}$, $\exists\, t_0 \in [0,1]$ $w_0 = \gamma(t_0)$

$$f(w_k) = 0 \xRightarrow{\text{από συνέχεια } f} f(w_0) = 0$$

Οπότε: αναγκαστικά w_0 εσωτερικό της γ

Αν το w_0 είναι σημείο ολομορφίας ⟹ αδύνατο

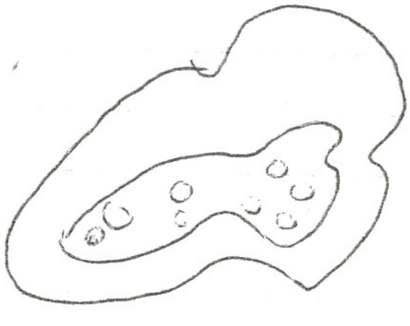
Μπορεί το w_0 να είναι πόλος? Δηλαδή

$$\lim_{z \to w_0} f(z) = \infty$$

Άτοπο γιατί $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(w_k)} \to f(w_0)$

Έστω $w_1, \dots, w_m$ είναι ρίζες της f στο εσωτερικό της γ, $a_1, \dots, a_m$ οι πολλ/τες των ριζών της f (αντίστοιχα) και $z_1, \dots, z_k$ είναι οι πόλοι της f πολλαπλοτήτων $m_1, \dots, m_k$ αντίστοιχα

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = a_1 + a_2 + \dots + a_m - (m_1 + m_2 + \dots + m_k)$



Γύρω από τα σημεία $w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_k$ επιλέγω κατάλληλη μικρή ακτίνα $\delta > 0$ ώστε:

$\overline{D(z_j, \delta)} \subset$ εσωτερικό της γ

$\overline{D(w_k, \delta)} \subset$ εσωτερικό της γ

$\overline{D(z_j, \delta)} \cap \overline{D(w_k, \delta)} = \emptyset$ όπως στο σχήμα

Τότε
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(w_j, \delta)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_\ell, \delta)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_\ell, \delta)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{\ell=1}^{k} m_\ell$$

Θα αποδείξουμε ότι αφού z_ℓ είναι πόλος της f τάξης m_ℓ τότε $(z-z_\ell)^{m_\ell} f(z)$ ολόμορφη στο $\overline{D(z_\ell, \delta)}$ και $\lim_{z \to z_\ell} (z-z_\ell)^{m_\ell} f(z) = a_\ell \neq 0$

$(z-z_\ell)^{m_\ell} f(z) = \phi_\ell(z)$ ολόμορφη στο $\overline{D(z_\ell, \delta)}$

Δεν έχει ρίζες στο $\overline{D(z_\ell, \delta)}$ ούτε πόλους

$$f(z) = \frac{\phi_\ell(z)}{(z-z_\ell)^{m_\ell}}, \quad z \in \overline{D(z_\ell, \delta)} \setminus \{z_\ell\}$$

$$f'(z) = \frac{\Phi_i'(z)(z-z_i)^{m_i} - \Phi_i(z) m_i (z-z_i)^{m_i-1}}{(z-z_i)^{2m_i}} =$$

$$= \frac{\Phi_i'(z)(z-z_i) - m_i \Phi_i(z)}{(z-z_i)^{m_i+1}}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\dfrac{\Phi_i'(z)(z-z_i) - m_i\Phi_i(z)}{(z-z_i)^{m_i+1}}}{\dfrac{\Phi_i(z)}{(z-z_i)^{m_i}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\Phi_i'(z)(z-z_i)}{\Phi_i(z)} - m_i}{z-z_i} = \frac{\Phi_i'(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{m_i}{z-z_i}$$

$0 < |z-z_i| \leq \delta.$

Η Φ_i είναι ολόμορφη και δεν μηδενίζεται

Η $\dfrac{\Phi_i'(z)}{\Phi_i(z)}$ ολόμορφη ως πηλίκο ολόμορφων

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_i,\delta)} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_i,\delta)} \frac{\Phi_i'(w)}{\Phi_i(w)}\, dw$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_i,\delta)} \frac{dw}{w-z_i} = -m_i$$

Θεώρημα Rouche: Έστω Ω τόπος, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες

$\gamma : [0,1] \to \Omega$ κυκλοποιείται και γνωρίζουμε
$|g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|$ $t \in [0,1]$ τότε:

$\#$ των ριζών της f στο εσωτερικό της γ $=$ $\#$ των ριζών $f+g$ στο εσωτερικό της γ

Άσκηση: Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $2z^{10}+4z^2+1$ και $2z^{10}-4z^2+1$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $D(0,1)$

Λύση

$f(z) = 4z^2$, $g(z) = 2z^{10}+1$ $C(0,1)$

$|f(z)| = 4|z|^2 = 4$
$|g(z)| = |2z^{10}+1| \le 2|z|^{10}+1 = 3$

$\Rightarrow |g(z)| < |f(z)|$, $|z| = 1$
$\Rightarrow$ Από θεώρημα Rouche
$\Rightarrow \#$ ριζών της f στο $D(0,1) = 2$
$= \#$ ριζών της $f+g = 2z^{10}+4z^2+1$
$= \#$ ριζών της $f-g = 2z^{10}-4z^2+1$
$= \#$ ριζών της $f+ig = 2iz^{10}+4z^2+i$

Εν γένει $\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \dfrac{dz}{z} = 0$

$\gamma(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$, το 0 εσωτερικό της γ

14/12/2017

Απόδειξη (Θ. Rouché)

Η f δεν έχει ρίζες στη γ.

$$Z(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $(f+g)(\gamma(t)) \neq 0,\ \forall t\in[0,1]$
διότι αν $\exists\, t_0$ $(f+g)(\gamma(t_0)) = 0 \Rightarrow f(\gamma(t_0)) = -g(\gamma(t_0))$
$\Rightarrow |f(\gamma(t_0))| = |g(\gamma(t_0))|$

ΑΔΥΝΑΤΟ

Τότε όμως: $\dfrac{f'(w)+g'(w)}{f(w)+g(w)} - \dfrac{f'(w)}{f(w)} =$

$$= \frac{f(w)(f'(w)+g'(w)) - f'(w)(f(w)+g(w))}{f(w)(f(w)+g(w))} =$$

$$\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)' = \frac{g'(z)f(z) - g(z)f'(z)}{f^2(z)}$$

$$= \frac{f(w)g'(w) - f'(w)g(w)}{f(w)(f(w)+g(w))} =$$

$$= \frac{f^2(w)\left(\frac{g(w)}{f(w)}\right)'}{f^2(w)\left(1+\frac{g(w)}{f(w)}\right)} = \frac{\left(1+\left(\frac{g(w)}{f(w)}\right)\right)'}{1+\frac{g(w)}{f(w)}}$$

Οπότε: $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(w)+g'(w)}{f(w)+g(w)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw =$

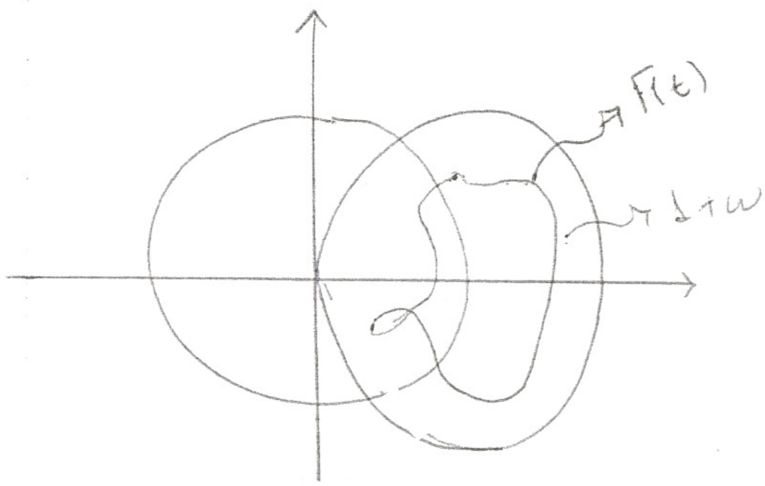
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(w)}{(1+g/f)(w)}\,dw$$

Όμως $|g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| \Longrightarrow \left| \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \right| < 1$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} = \Gamma(t) \quad , t \in [0,1]$$

$z = 1 + w$

$w = \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$



$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\right) > 0$$

Οπότε το μηδέν είναι το εξωτερικό της $\Gamma(t) = 1 + \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(\omega)}{\left(1+\frac{g}{f}\right)(\omega)}\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(\gamma(t))}{\left(1+\frac{g}{f}\right)(\gamma(t))}\,\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$$

$$\Gamma'(t) = \left(\frac{g(\omega)}{f(\omega)}\right)'\Bigg|_{\omega=\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)$$

<u>Θεώρημα Hurwitz</u>: Έστω Ω τόπος, $f_n, f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω. Αν f_n δεν έχουν ρίζες στο Ω, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε είτε η $f \equiv 0$ στο Ω είτε η f δεν έχει ρίζα επίσης

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και έχει τουλάχιστον μια ρίζα z_0, δηλ $f(z_0)=0$. Τότε $\exists$ $r_0>0$ κατάλληλα μικρό ώστε η f δεν έχει άλλη ρίζα εκτός της z_0, στο $D(z_0,r_0) \subset \Omega$. Τότε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)}\,d\omega = m.$$

Θυμήσου: Κοντά στο z_0 υπάρχει άλλη ρίζα. Αν συνέβαινε αυτό $0<|z_n-z_0|<1/n$
$\left.\begin{matrix} f(z_n)=0 \\ z_n \to z_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f\equiv 0$

Όμως $f_n \to f$ ομοιόμορφα $C(z_0,r_0)$

$f_n' \longrightarrow f'$ — // —

$$\frac{f_n'}{f_n} \longrightarrow \frac{f'}{f} \text{ ομοιόμορφα στο } C(z_0,r_0)$$

και επομένως: $\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)} \frac{f_n'(w)}{f_n(w)}\,dw \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_0)} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$ m

<u>Θεώρημα:</u> Έστω Ω τόπος f_n, f ολόμορφες $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω. Αν f_n είναι "1-1" τότε είτε η $f \equiv$ σταθερή στο Ω είτε είναι "1-1" επίσης

<u>ΠΡΟΟΔΟΣ</u>

<u>Θέμα 3:</u>

α) Ω τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f'(z)=0$ $z\in\Omega \Rightarrow f(z) = f(z_0)$, $z\in\Omega$, $z_0\in\Omega$

β) Βρείτε όλες τις ακέραιες g, h: $\exists\, c_1, c_2$.

$|g'(z)| \leq c_1 + c_2|z|^{3/2}$, $\forall z\in\mathbb{C}$

$|z| \leq |h'(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$

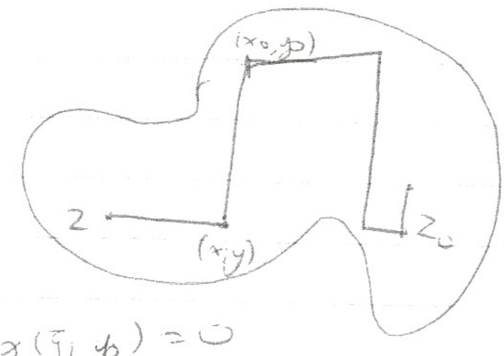
Λύση

α) Ω τόπος $\Longrightarrow \exists$ πολυγωνική γραμμή $C \subset \Omega$ και ενώνει το z, z_0. Επίσης $f'(z)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = u(z) + i\,v(z)$ $\quad u,v: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ u_x, v_x, u_y, v_y$

$u_x = v_y = u_y = v_x = 0$



$u(\underbrace{x,y}_{z}) = u(\underbrace{x_0,y_0}_{z_0})$

$u(x_1,y_0) - u(x_0,y_0) = (x_1-x_0)\,u_x(\xi_1,y_0) = 0$

$\Rightarrow$ πεπερ. πλήθος βημάτων $u(x,y) = u(x_0,y_0)$

Αντίστοιχα με χρήση $u_x = V_y = 0 \Rightarrow u(x,y) = V(x_0,y_0)$

β) $g''(z)$ ——— $g'(z) \sim Q(z)$

$Q''(z)$

$$Q''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{C(z,R)} \frac{Q(\omega)}{(\omega-z)^3}\,d\omega$$

$$g'''(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{C(z,R)} \frac{g'(\omega)}{(\omega-z)^3}\,d\omega = \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g'(z+Re^{it})}{R^3 e^{3it}}\, iRe^{it}\,dt$$

$$|g'''(z)| \leq \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} |g'(z+Re^{it})|\,dt \overset{(*)}{\leq} \frac{2\pi}{\pi R^2}\left(c_1+c_2(|z|+R)^{3/2}\right)$$

$$|g'(z+Re^{it})| \leq c_1 + c_2|z+Re^{it}|^{3/2} \leq c_1+c_2(|z|+R)^{3/2} \quad (*)$$

Άρα $g'''(z) = 0 \Rightarrow g''(z) = a \Leftrightarrow \left(g(z) - \frac{a}{2}z^2\right)'' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(g(z) - \frac{a}{2}z^2\right)' = b = (bz)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(g(z) - \frac{a}{2}z^2 - bz\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{a}{2}z^2 + bz + \gamma$$

$|z| \leq |h'(z)|$

Αν z_0 ρίζα της $h'(z)$, δηλ. $h'(z_0)=0$

Άρα: $|z| \leq |h'(z)| \xRightarrow{z=z_0} |z_0| \leq |h'(z_0)| = 0. \Rightarrow \boxed{z_0=0}$

$h'(z) = z^m Q(z)$ ολόμορφη.

$|z| \leq |z^m Q(z)|$, $|z| \neq 0$

$1 \leq |z|^{m-1} |Q(z)|$, $\forall z \neq 0$

Αναγκαστικά $m=1$, $m \geq 2$ καταλήγουμε σε άτοπο

$|z| \leq |z Q(z)| \xRightarrow{z \neq 0} 1 \leq |Q(z)| \Rightarrow \frac{1}{Q(z)}$ ολόμορφη

$\frac{1}{|Q(z)|} \leq 1 \xrightarrow{\text{Θ. Liouville}} \frac{1}{Q(z)} = c \Rightarrow Q(z) = \lambda, \lambda \in \mathbb{C}$

$h'(z) = \lambda z \Rightarrow h'(z) = \left(\frac{\lambda}{2} z^2\right)' \Rightarrow \left(h(z) - \frac{\lambda}{2} z^2\right)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(z) = \frac{\lambda}{2} z^2 + b \quad , |\lambda| \geq 1$

Αν η $h'(z)$ δεν έχει ρίζα τότε:

$\left|\frac{z}{h'(z)}\right| < 1$

$\frac{z}{h'(z)} = c \Rightarrow h'(z) = \lambda z$