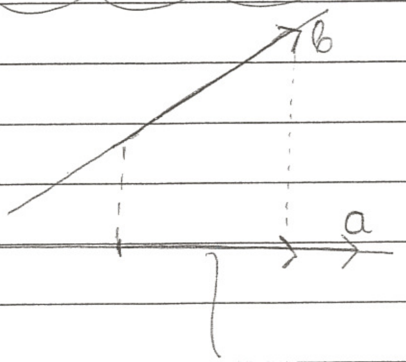
Μαρίνα Δημοσθούγου 8-02-18

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

κ. Τερτίκας (Γραμ Αλγ + Γεωμετρία + ΑΠ Ι)
↓
στην σελίδα του για φυλλάδια + extra (π.χ. βιβλιογραφία) ⟶ 1 Marsden and Tromba

Ψάχνω: library genesis



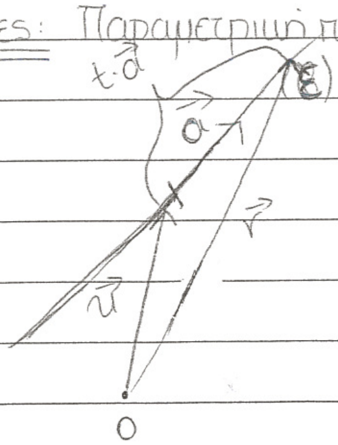
$pr_{\vec{a}} b$

$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ (η είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο μέτρο του α. Θυμάμαι: $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$
↓
Η ευκλείδια απόσταση

· $|\vec{a}|$ είναι το μήκος.

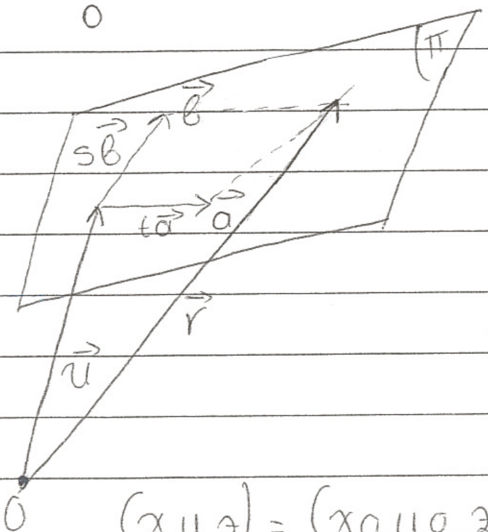
$$pr_{\vec{a}} b = (b \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

Ευθείες: Παραμετρική περιγραφή (η πιο βολική σε αρκετές περιπτώσεις)



$$\vec{r} = \vec{u} + t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}$$

Επίπεδο



Παραμετρική μορφή.

$$\vec{r} = \vec{u} + t\vec{a} + s\vec{b},\ t, s \in \mathbb{R}$$

$\vec{r} = (x, y, z)$
$\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{a} = (a_1, b_1, \gamma_1)$
$\vec{b} = (a_2, b_2, \gamma_2)$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, \gamma_1) + s(a_2, b_2, \gamma_2)$$

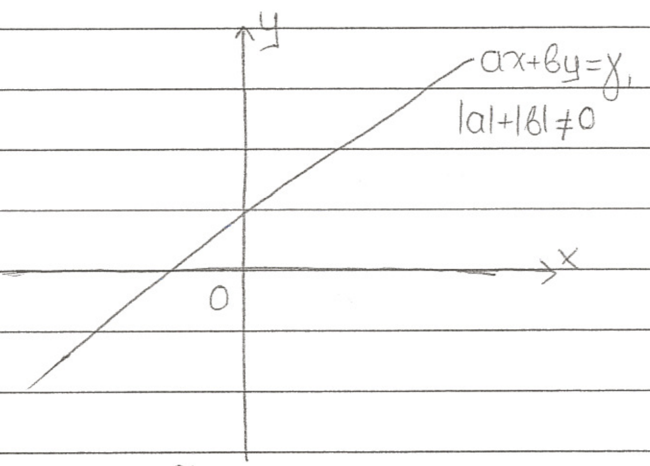
$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t a_1 + s a_2 \\ y = y_0 + t b_1 + s b_2 \\ z = z_0 + t\cdot\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}$$

$\vec{r} = (x, y, z)$
$\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{a} = (a_1, b_1, \gamma_1)$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a_1, b_1, \gamma_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t b_1 \\ z = z_0 + t \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Καρτεσιανή Αναπαράσταση



$n=2$

Απο παραμετρική μορφή: $x = x_0 + t a_1$ (1)
$y = y_0 + t b_1$ (2)

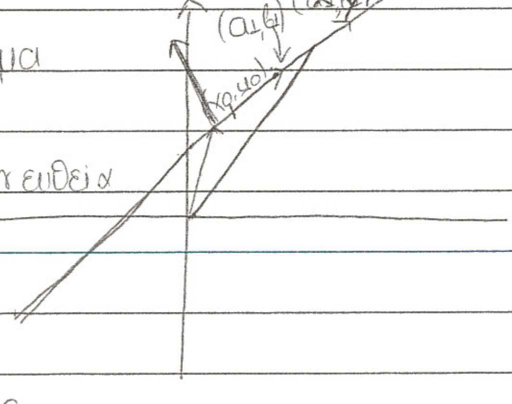
Πρέπει να απαλοίψουμε στη παράμετρο t.

Άρα:

$$\left.\begin{matrix} (1) \xrightarrow{b_1} b_1 x = b_1 x_0 + t a_1 \cdot b_1 \\ (2) \xrightarrow{a_1} a_1 y = a_1 y_0 + t a_1 \cdot b_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1 y - b_1 x = a_1 y - b_1 x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 y - b_1 x = a_1 y - b_1 x_0}$$

Το (x_0, y_0) είναι σημείο της ευθείας



Στη παραμετρική μορφή: (a_1, b_1) είναι διάνυσμα που ανήκει πάνω στη ευθεία (διάνυσμα θέσης)

Καρτεσιανή μορφή: (a_1, b_1) διάνυσμα κάθετο στη ευθεία

γε. $(-b_1, a_1) \cdot (x, y) = (-b_1, a_1) \cdot (x_0, y_0)$

$\Leftrightarrow (-b_1, a_1) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0$

$\Leftrightarrow (-b_1, a_1) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow (-b_1, a_1) \cdot (a_1, b_1) = -a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_1 = 0$

Θυμάμαι ότι:
πιο εύκολο η καρτεσιανή μορφή σε ευθεία, χώρο, επίπεδο

$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, \gamma_1)$

$\Longrightarrow \ldots$

Καρτεσιανή μορφή για επίπεδο

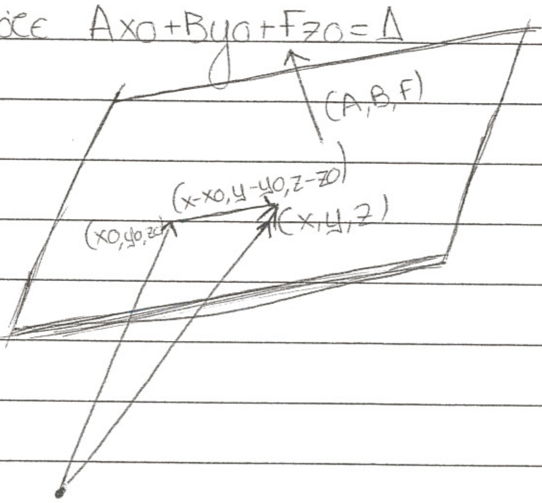
$$\boxed{Ax + By + \Gamma z = \Delta}$$

Έστω (x_0, y_0, z_0) σημείο του επιπέδου τότε $Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 = \Delta$

$Ax + By + \Gamma z = Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0$

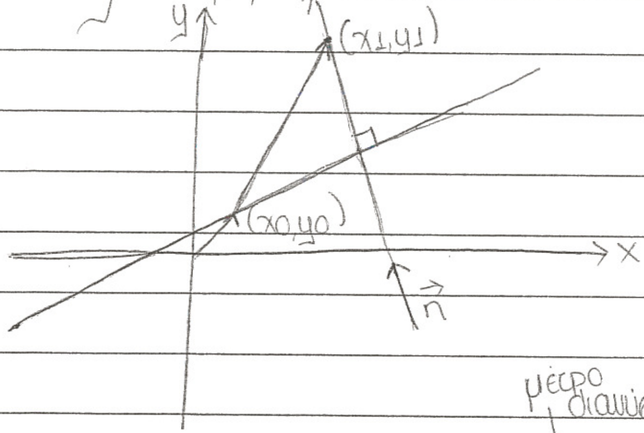
$\Longleftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0)$

$\Longleftrightarrow (A, B, \Gamma) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$



(A,B,Γ) είναι ένα παράλληλο διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου.

δηλ. $(A, B, \Gamma) \parallel \vec{a} \times \vec{b}$



d — η απόσταση είναι το κάθετο διάνυσμα από ένα σημείο της ευθεία στο κάθετο διάνυσμα.
ή αλλιώς προβολή

Άρα θα έχουμε ότι

$(x_1, y_1) - (x_0, y_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

$((x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \vec{n}) \vec{n}$

μέτρο διανύσματος — απόλυτη τιμή

$$d = \|((x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \vec{n}) \vec{n}\| = |(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \vec{n}| \, \|\vec{n}\|$$

$$= |(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \vec{n}|$$

$|A| + |B| \neq 0$

Αν $(\varepsilon): Ax + By = \Gamma$

$(A, B) \perp (\varepsilon)$:

$$\vec{n} = \frac{1}{\|(A,B)\|} (A, B) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$d(x_1 y_1, \varepsilon) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot (A, B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 - \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

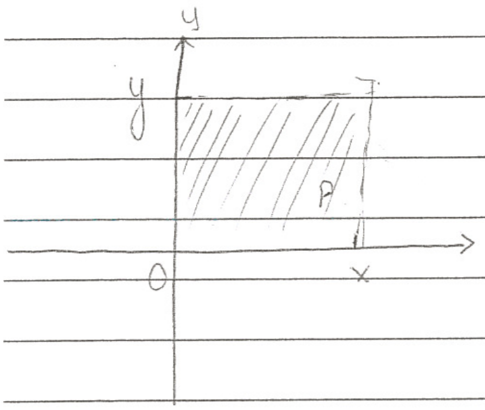
$\Gamma = Ax_0 + By_0$

(Π):

$Ax + By + \Gamma z = \Delta$

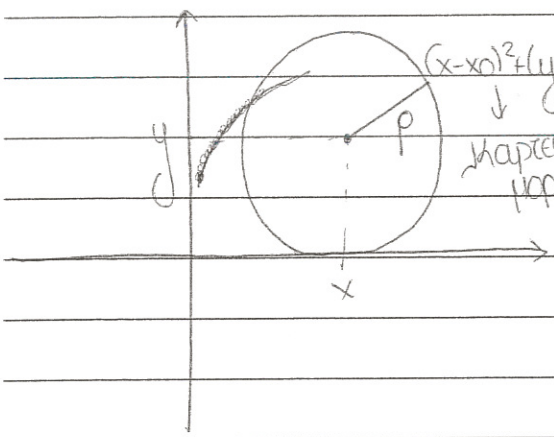
$$d\left((x_1, y_1, z_1), (\Pi)\right) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 - \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Ο κύκλος στο επίπεδο



$x^2 + y^2 = \rho^2$

$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

↓

καρτεσιανή μορφή

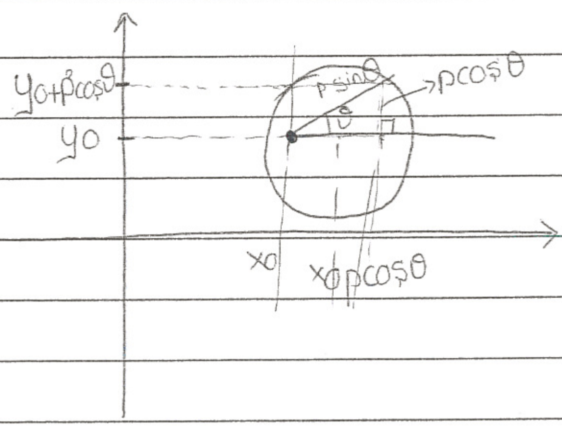
$\underline{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$x - x_0 = \rho\cos\theta$

$y - y_0 = \rho\sin\theta \quad , \theta \in [0, 2\pi)$

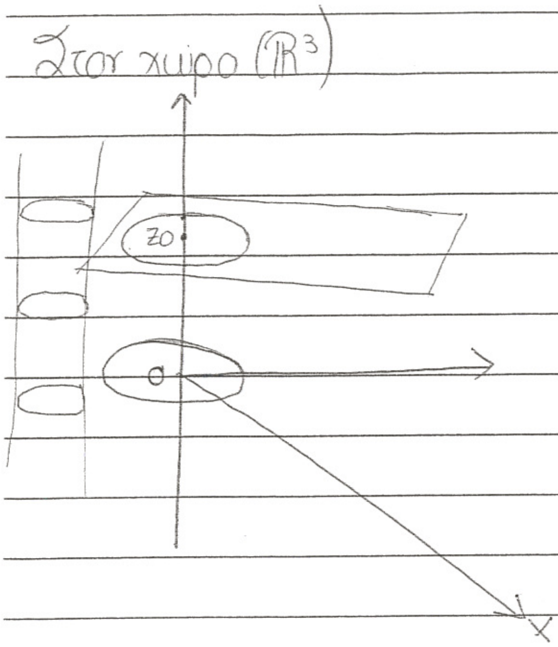
$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

Πλήρες συντεταγμένες του κύκλου.



$x = x_0 + \rho\cos\theta$.

Στον χώρο ($\mathbb{R}^3$)

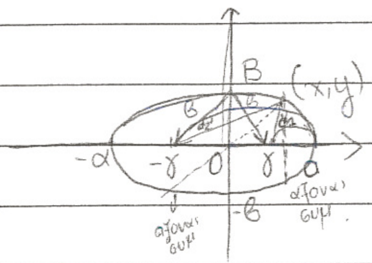


$$x^2+y^2=\rho^2 \qquad x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta$$

$$(x,y,z)=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z),$$

$$0\le\theta\le 2\pi,\quad z\in\mathbb{R}$$

Έλλειψη (Είμαστε στο επίπεδο)



$$\boxed{2\beta>2\gamma}$$

$4-\gamma+a+\gamma=2a$ (Έτσι βγαίνει το μήκος)
$=2\ell$

$\beta^2+\gamma^2=2\ell$, δηλ το $a=\ell$

$\Rightarrow \beta^2+\gamma^2=2a$

$d_1=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$

$d_2=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}$

άρα $d_1+d_2=2a=2\ell$

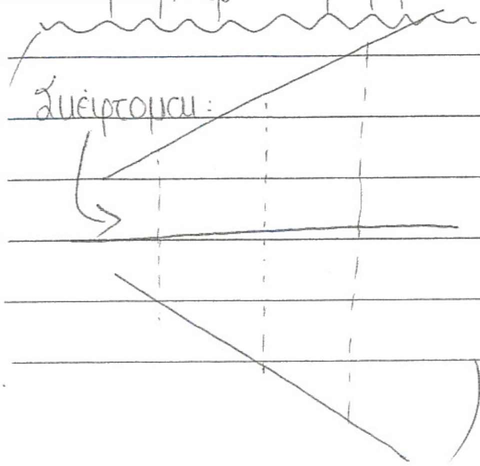
$\Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1}$ ← Καρτεσιανή μορφή

$x=a\cos\theta$

$y=\beta\sin\theta,\quad 0\le\theta<2\pi$

Παραμετρική μορφή

Σκέφτομαι:

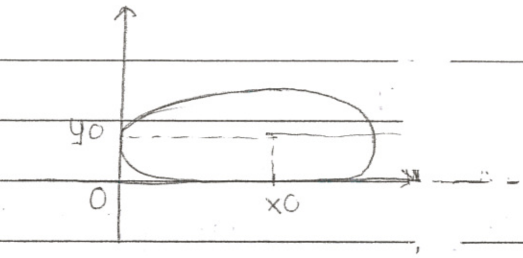


Ο $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας στην έλλειψη κτ.

1) αν $(x,y)\in E \Rightarrow (x,-y)\in(\varepsilon)$

yy' είναι άξονας συμμετρίας

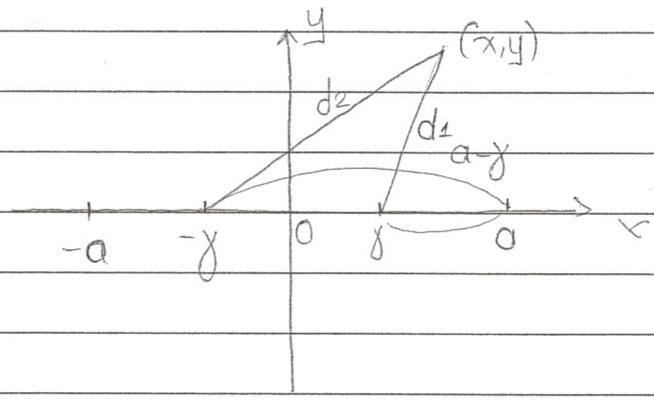
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}$$



$x = x_0 + a\cos\theta$

$y = y_0 + \beta\sin\theta, \ \theta \in [0, 2\pi)$

Υπερβολή



$2\ell = a+\gamma - (a-\gamma)$

$\Rightarrow \ell = \gamma$

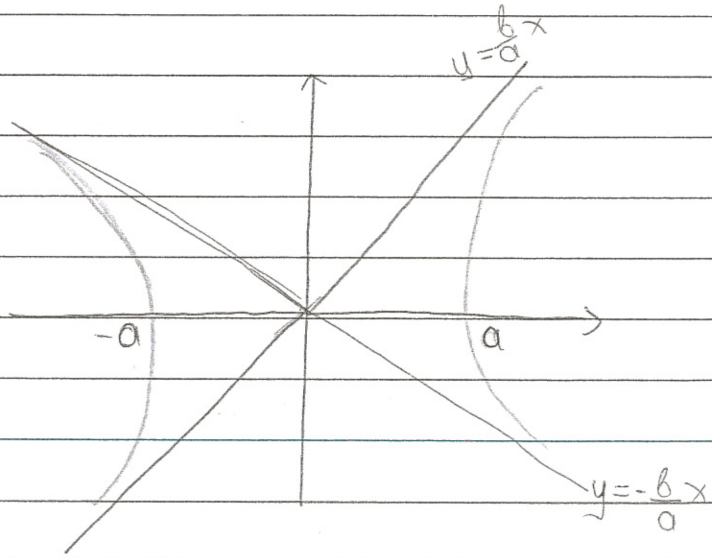
$d_1 = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$

$d_2 = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} - \sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} = 2\gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1}$$

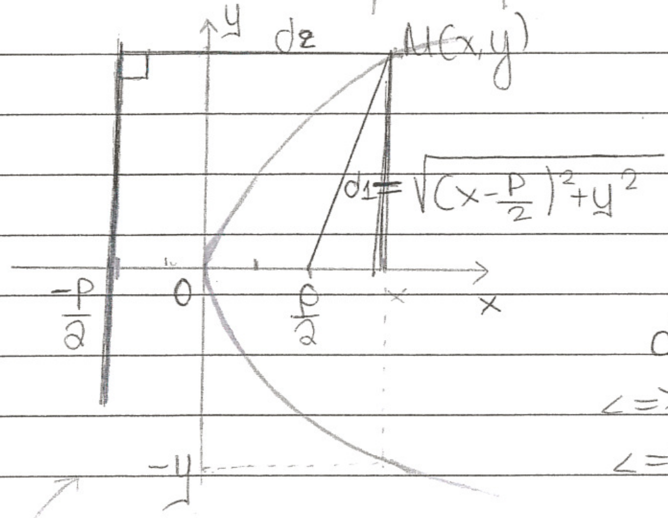
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



13-02-18

Παραβολή: Τι χαρακτηρίζει μια παραβολή:

Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα σημείο f μια ευθεία.



$$d_1 = d_2 \iff d_1^2 = d_2^2 \iff |x+p/2|^2 = (x-p/2)^2 + y^2$$

$$\iff \cancel{x^2} + px + \cancel{p^2/4} = \cancel{x^2} - px + \cancel{p^2/4} + y^2$$

$$\iff \boxed{x^2 = 2px}$$

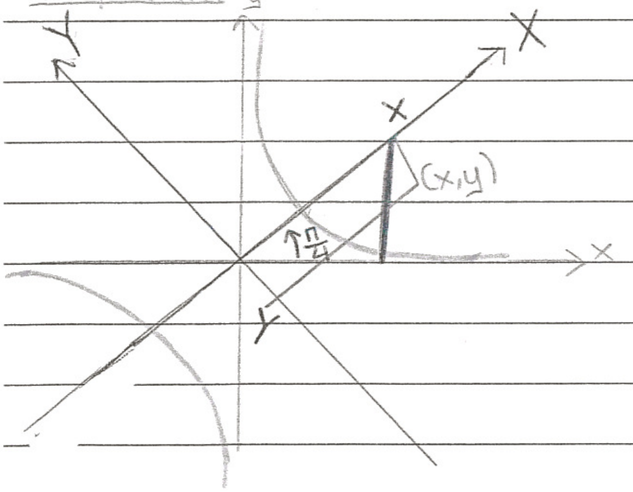
$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

$(x,y) \in \beta$

$(x,-y) \in \beta$

$d_2 = |x + p/2|$

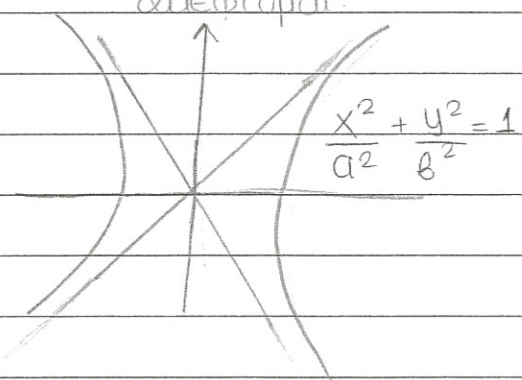
Υπερβολή:



(στροφή κατά $\pi/4$)

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2}/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2}/2)} = 1$$

Θυμάμαι:



Καμπύλες

1) $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(\vec{t}),\ t \in \mathbb{R}$

$\{(1,1,1),\ x \in \mathbb{R}\}$ | $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\vec{\gamma}(t) = (t,t,t) \in \mathbb{R}$

Παρατηρώ: ότι η καμπύλη που προκύπτει είναι ευθεία

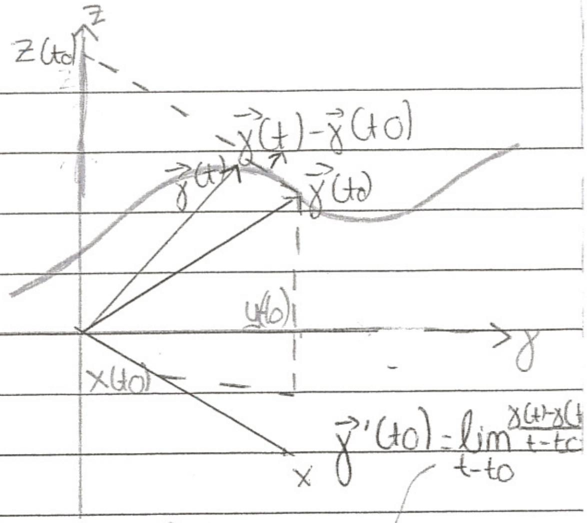
Θυμάμαι: Ότι η ευθεία είναι ειδική καμπύλη: Η ευθεία είναι καμπύλη (όχι το αντίστρ

$\vec{\gamma}:(0,1)\to\mathbb{R}^3$

$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t\in(0,1)$

είναι παραγωγίσιμη στο t_0

$$\frac{\vec{\gamma}(t)-\vec{\gamma}(t_0)}{t-t_0} = \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}, \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)$$



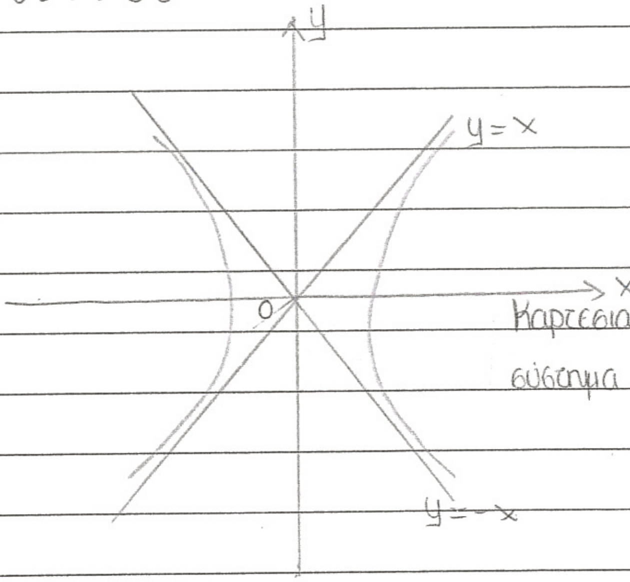
$\vec{\gamma}'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο t_0

Παραμετρικοποίηση καμπυλών

Συστήματα συντεταγμένων:

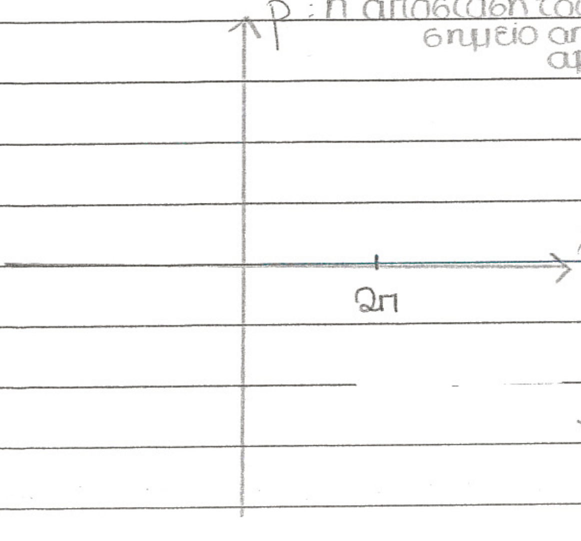
$x^2-y^2=1$



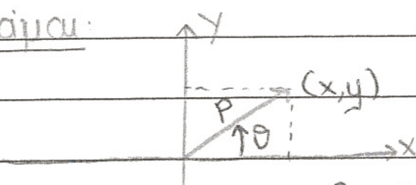
Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Πολικό σύστημα συντεταγμένων

ρ: η απόσταση του σημείου από την αρχή



Θυμάμαι:



$0\leq\theta<2\pi$

Έχουμε ότι:

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\theta$

Καρτεσιανό σύστημα -> Πολικό σύστημα

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad (x,y)\neq(0,0)$$

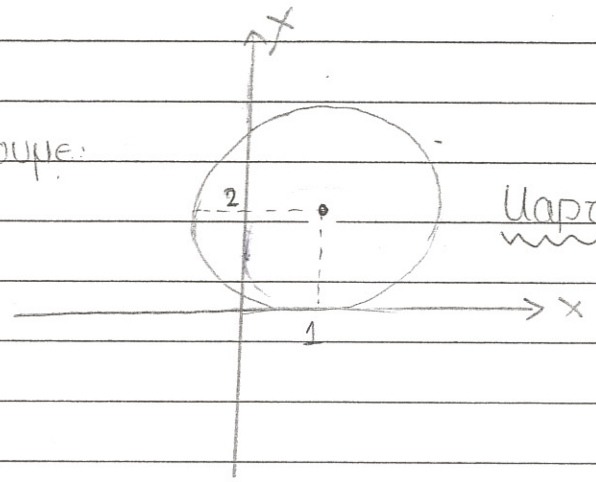
$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\quad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Έστω ο κύκλος

$(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$, θα έχουμε:

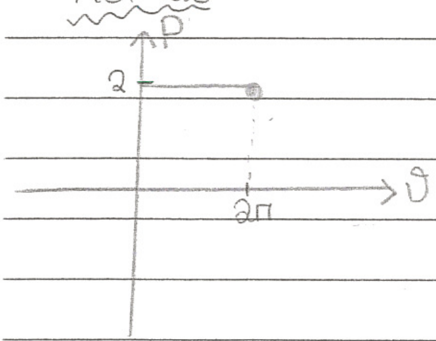
$x-1=2\cos\theta$

$y-2=2\sin\theta$



Καρτεσιανό $\xrightarrow{\text{μετατροπή σε}}$

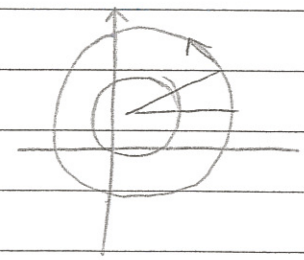
Πολικό



(Στις πολικές προκύπτει ευθεία καθώς παραμένει σταθερό το ρ)

Επιπλέον θα έχουμε: $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=2+2\sin\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,2\pi)$

άρα $\vec{\gamma}(0)=\vec{\gamma}(2\pi)$, κλειστή καμπύλη



• Θα έχουμε για την έλλειψη: ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

$\vec{\gamma}(\theta)=(\underbrace{\alpha\cos\theta}_{=x},\ \underbrace{b\sin\theta}_{=y})$, όπου $\theta\in[0,2\pi]$

• Για την υπερβολή θα ισχύει: ($\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$) παίρνω ένα απλό παράδειγμα ότι $a=b$

ΔΗΛ: $x^2-y^2=1$.

Από Euler:

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (α)

$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ (β)

άρα προκύπτουν από τύπους/σχέσεις (α) και (β):

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\ ,\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

Υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα: (ΤΥΠΟΙ)

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

Προτιμώ καλύτερα υπερβολικούς τύπους

γιατί $(\sinh x)' = \cosh x$

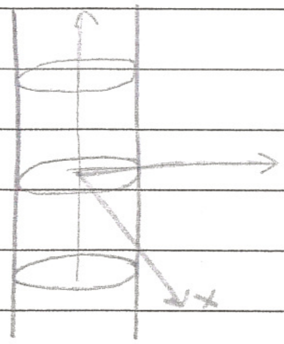
και $(\cosh x)' = \sinh x$

Ακόμη, πρέπει να ξέρω:

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$\vec{\gamma}(\theta) = (a\cosh\theta, b\sinh\theta), \theta\in\mathbb{R}$

Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων:



Έχουμε:

$x^2+y^2 \leq p^2$

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=\rho^2, z\in\mathbb{R}\}$

άρα

$\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\}, z\in\mathbb{R}$

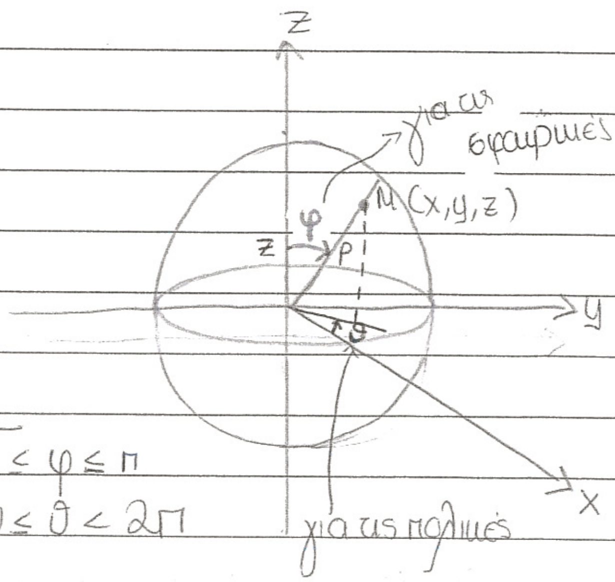
και $0\leq\theta\leq 2\pi$.

Σφαίρα:

Θα είναι: $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

και

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$

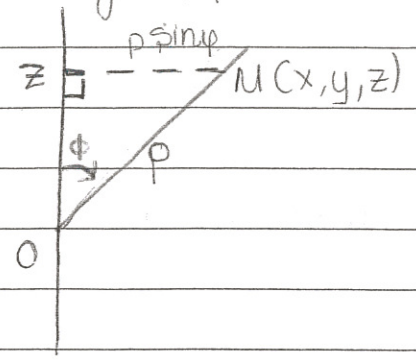


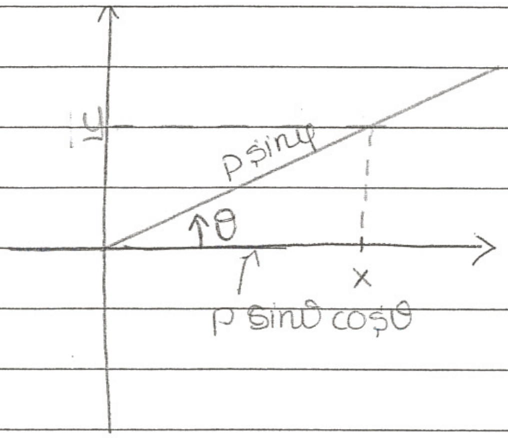
Θυμάμαι:

$0\leq\varphi\leq\pi$

$0\leq\theta<2\pi$

Πιο συγκεκριμένα: $z = \rho\cos\varphi$





Άρα καταλήγουμε:

$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \end{cases}$$

15-02-18

Πραγματική μεταβλητή (παράμετρος)

έστω: t

Έχουμε: $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ (πεδίο τιμών))

$t \to \vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$ (ονομάζεται διανυσματική συνάρτηση) $\mathbb{R}^3$

Επανάληψη προηγούμενου μαθήματος

Τύποι:

Κωνικές τομές

έλλειψη: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

υπερβολή: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

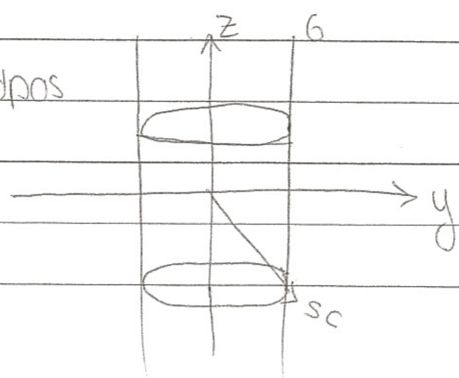
παραβολή: $y^2 = 2px$

Συντεταγμένες

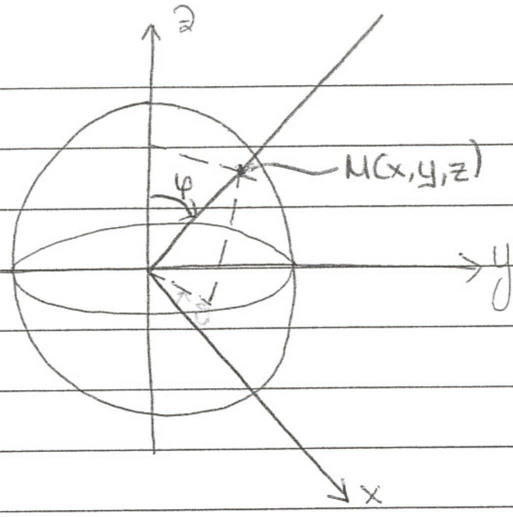
$x = \rho\cos\theta$, $0 \le \theta < 2\pi$

$y = \rho\sin\theta$ $0 \le \rho$

Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων: κύλινδρος



Σφαιρικό σύστημα:

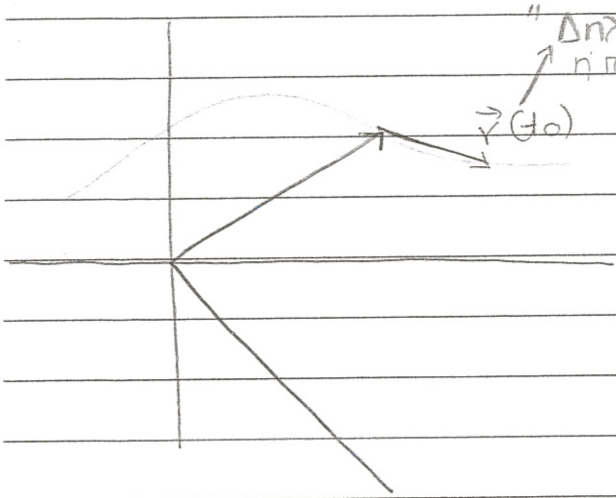


$$x^2+y^2+z^2=\rho^2$$

Οι γωνίες

φ: μετράει πόσο μακριά είμαστε από τον πόλο

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=\rho\cos\varphi$$



"Δηλώνει πού θα κινηθεί αν αυξήσω το χρόνο."
ή πώς θα κινηθεί το υλικό σημείο

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad t\in(a,b)$$
$$\vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

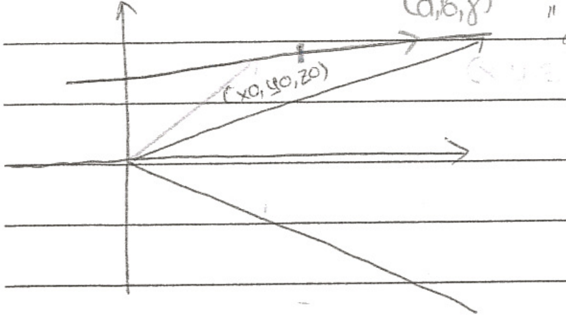
$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

Ευθεία:

Το διάνυσμα θέσης είναι ένα σημείο που διέρχεται η ευθεία

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,\gamma)$$

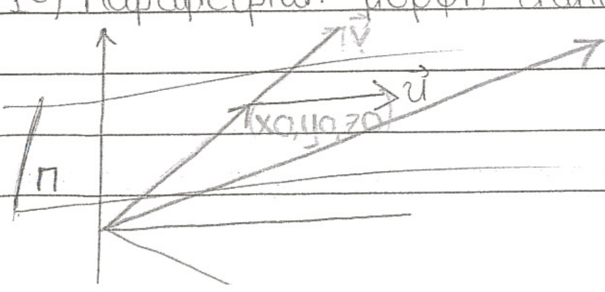
Σημείο ευθείας:



"Η ευθεία σε παραμετρική μορφή"

Επίπεδο: (Π) (x,y,z)

1ο) Παραμετρική μορφή επιπέδου



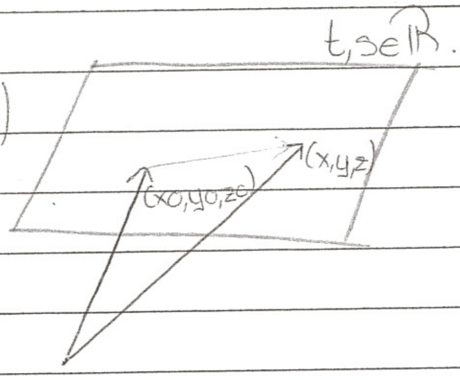
$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot\vec{u}+s\vec{v},\quad t,s\in\mathbb{R}$$

2ο Καρτεσιανή μορφή επίπεδο (Π)

$(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$

Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο: $\vec{n} \perp (\Pi)$

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \vec{n} = 0$



π.χ. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

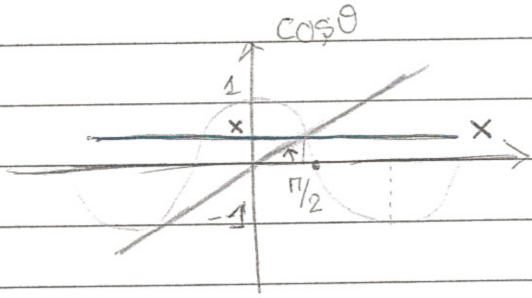
—

$(x(t), y(t)), \ t \in (a, b)$

Καρτεσιανή μορφή της καμπύλης γίνεται με απαλοιφή παραμέτρου.

Παράδειγμα:

$(\cos\theta, \sin\theta), \ \theta \in [0, \pi/2]$



$\Rightarrow x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}x$

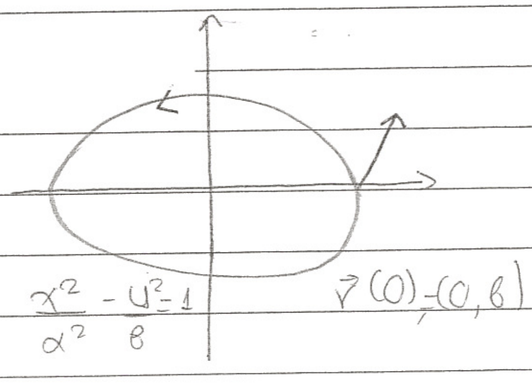
$y = \sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow y = \sin(\cos^{-1}x)$

$\vec{r}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta), \ \theta \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}(\theta) = (a\sin\theta, b\cos\theta)$

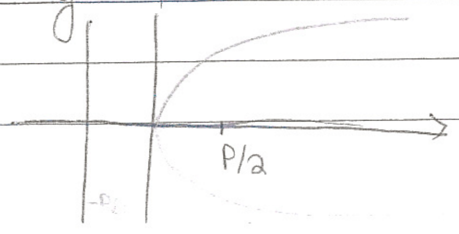


Έλλειψη:

$\vec{r}(t) = (a\cosh t, b\sinh t), \ t \in \mathbb{R}$

Παραβολή: $r(t) = (t^2/2p, t), \ t \in \mathbb{R}$

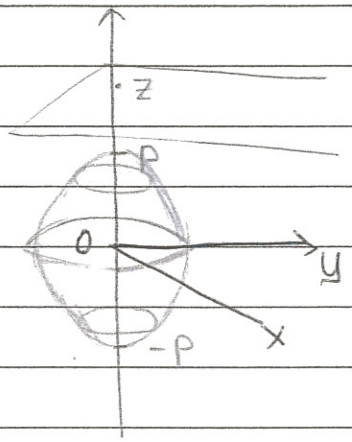
$y^2 = 2px$



Ειδικές Επιφάνειες

Σφαίρα: $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

Θέλω να βρω όλα τα σημεία του χώρου που να ικανοποιούν την σχέση (δηλ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$)



$z=0$

$x^2+y^2=\rho^2$

$x^2+y^2=\underbrace{\rho^2-z^2}_{<0}$

Παίρνω περιπτώσεις:

Αν: i) $\rho^2-z^2<0$

$(\rho-z)\cdot(z+\rho)>0$

$z\in(-\infty,-\rho)\cup(\rho,+\infty)$

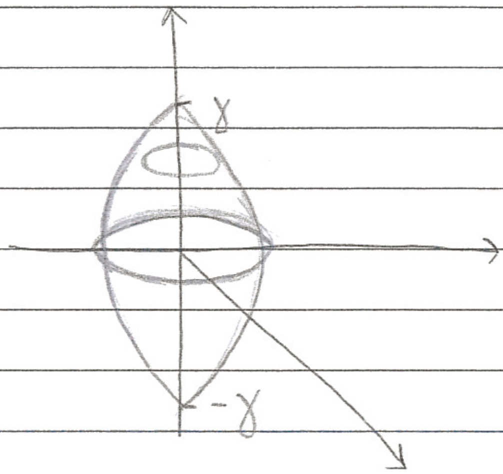
ii) $\rho^2-z^2=0$

$z=\pm\rho$

iii) $\rho^2-z^2>0$

$-\rho<z<\rho$

Ελλειψοειδές: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, για $\rho>0$



για $z=0$: έλλειψη

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

Έχουμε: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\underbrace{1-\frac{z^2}{\gamma^2}}_{\text{Έστω } \rho^2}$

Περιπτώσεις για $1-z^2/\gamma^2$:

i) αν $1-z^2/\gamma^2<0 \iff z\in(-\infty,-\gamma)\cup(\gamma,+\infty)$

ii) αν $1-z^2/\gamma=0$

iii) αν $1-z^2/\gamma>0 \iff \mathbb{R}^2$

$Ax^2 + By^2 + \Gamma z^2 + 2\Delta xy + 2Exz + 2Zyz + Hx + \Lambda y + Nz = c$

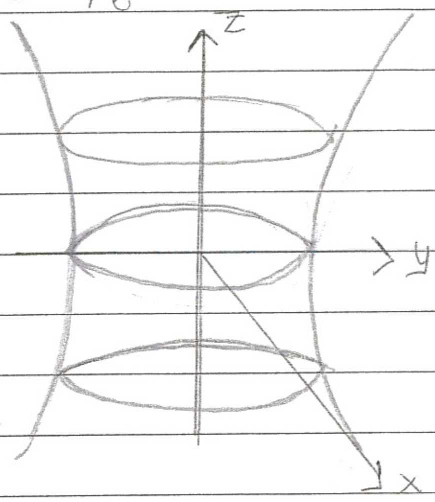
i) Ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

ii) Κύλινδροι:

iii) Ελλειπτικό παραβολοειδές: $z = x^2/a^2 + y^2/\beta^2$

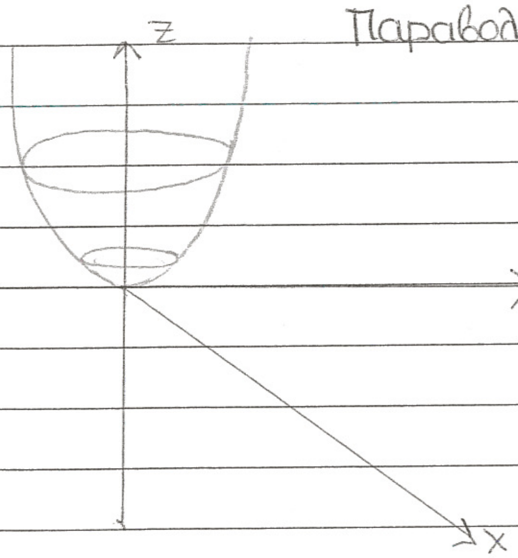
iv) Παραβολοειδές υπερβολής: $z = x^2/a^2 - y^2/\beta^2$



Αναλυτικότερα: Υπερβολοειδές

v) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ Ένα φύλλο (μονόχωνο)

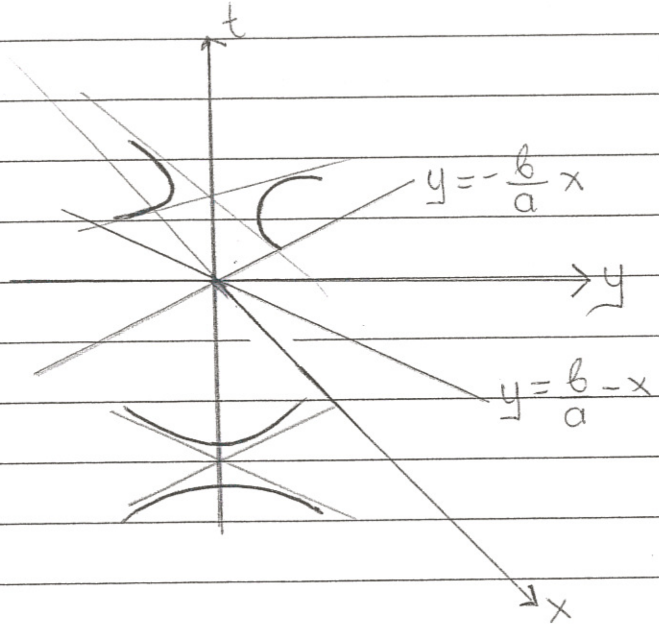
vi) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = -1$ Δύο φύλλα (δίχωνο)



Παραβολοειδές ελλειπτικό

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$



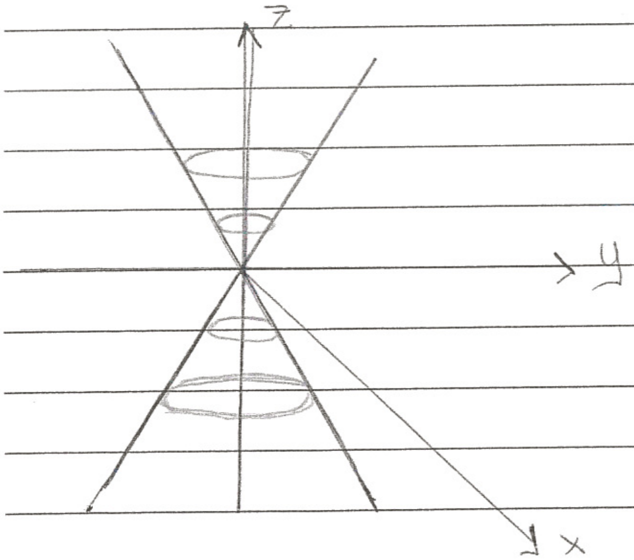
Παραβολοειδές υπερβολικό

$z>0$:

$z=\mathbb{R}^2$

$$1=\frac{x^2}{(a\sqrt{z})^2}-\frac{y^2}{(b\sqrt{z})^2}$$

vii) Κώνος: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$ (Αποτελείται επιφάνεια εκ περιστροφής)



Είναι:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{\gamma^2}$$

Παραμετρικοποίηση...

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2$$

$z=\rho\cos\varphi$
$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$
$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$

Θα έχουμε:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1$$

$$\frac{x}{a} = \sin\varphi \cos\theta \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\frac{y}{b} = \sin\varphi \sin\theta \quad , \quad 0 \leq \theta < \pi$$

$$\frac{z}{\gamma} = \cos\varphi$$

Τρίτη 20/02/18

Επανάληψη:

Για να περιγράψω παραμετρικά μια καμπύλη χρειάζομαι μια παράμετρο $(x,y,z)=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

Για:

- στην ευθεία: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,\gamma)$, $t\in\mathbb{R}$
- το επίπεδο: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,b_1,\gamma_1)+s(a_2,b_2,\gamma_2)$, $t,s\in\mathbb{R}$

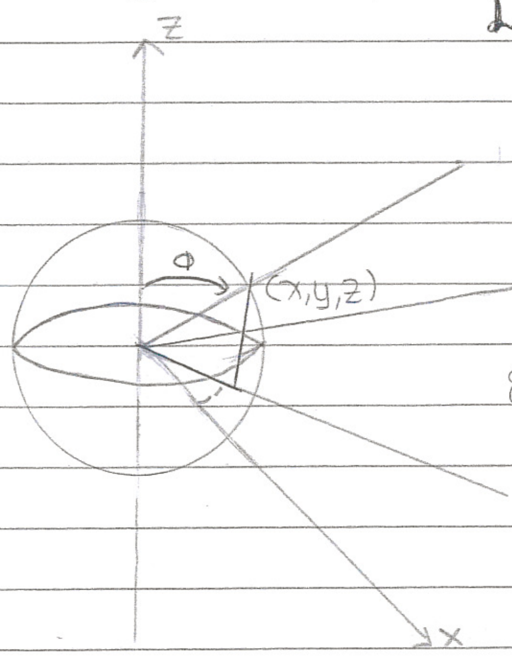
$\Leftrightarrow$ όπου $(a_1,b_1,\gamma_1) \not\parallel (a_2,b_2,\gamma_2) \Leftrightarrow (x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\vec{n}=0$

$\vec{n}=(a_1,b_1,\gamma_1)\times(a_2,b_2,\gamma_2)$

- στην επιφάνεια: $(x,y,z)=(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$, $(t,s)\in\mathbb{R}$

Είναι: $x^2+y^2+z^2=1$ (σφαιρικές συντεταγμένες)

$\hookrightarrow$ καθώς η σφαίρα είναι επιφάνεια και όχι καμπύλης



$x=s\sin\varphi\cos\theta$, $0\le\varphi<\pi$

$y=s\sin\varphi\sin\theta$, $0\le\theta<2\pi$

$z=\cos\varphi$

Είναι:

$(x,y,z)=(s\sin\varphi\cos\theta, s\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$

Είναι καμπύλη γιατί χρειαζόμαστε δύο παραμέτρους

Κύλινδροι:

- Ελλειπτικός κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z\in\mathbb{R}$

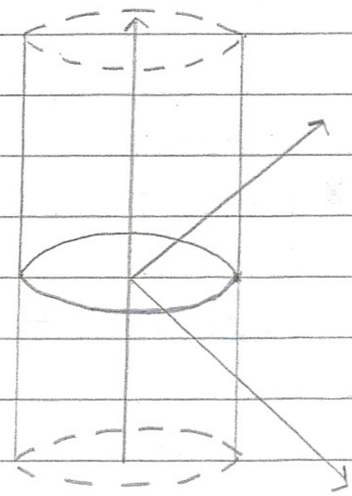
$(x,y,z)=(a\cos\theta, b\sin\theta, z)$

- Υπερβολικός κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(a\cosh t, b\sinh t, z)$ $t,z\in\mathbb{R}$

- Παραβολικός κύλινδρος: $x^2=2px$, $z\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(t^2/2p, t, s)$ $t,s\in\mathbb{R}$



Ελλειψοειδές $x^2/a^2 + y^2/\beta^2 + z^2/\gamma^2 = 1$

$(x,y,z) = (a\sin\varphi\cos\theta, \beta\sin\varphi\sin\theta, \gamma\cos\varphi)$ $0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta < 2\pi$

όπου $\begin{cases} x/a = \sin\varphi\cos\theta \\ y/\beta = \sin\varphi\sin\theta \\ z/\gamma = \cos\varphi \end{cases}$

Παραβολοειδές

$\Rightarrow$ Ελλειπτικό $z = x^2/a^2 + y^2/\beta^2$

Μια $(x,y,z) = (x, y, x^2/a^2 + y^2/\beta^2)$ $(x,y) \in \mathbb{R}$

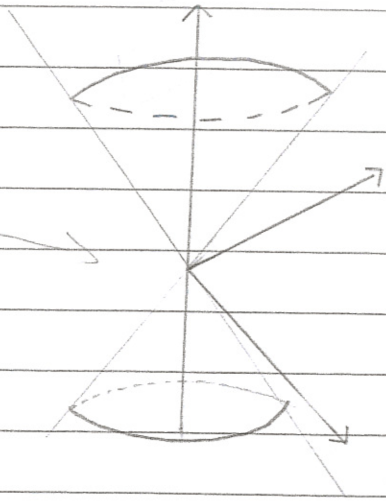
όμως $(x,y,z) = (\rho a\cos\theta, \rho\beta\sin\theta, \rho^2)$, $\rho \ge 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\Rightarrow$ Υπερβολικό $z = x^2/a^2 - y^2/\beta^2$

Μια $(x,y,z) = (x, y, x^2/a^2 - y^2/\beta^2)$, $x,y \in \mathbb{R}$

όμως $(x,y,z) = (\rho a\cosh t, \rho\beta\sinh t, \rho^2)$, $\rho \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$

Κώνος $z^2 = x^2/a^2 + y^2/\beta^2$



Μια $(x,y,z) = (x, y, \sqrt{x^2/a^2 + y^2/\beta^2})$, $x,y \in \mathbb{R}$

$= (x, y, -\sqrt{\dots})$

όμως $(x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \pm\rho)$, $\rho \ge 0$

Υπερβολοειδές
- $x^2/a^2 + y^2/\beta^2 - z^2/\gamma^2 = 1$ (ένα φύλλο)
- $x^2/a^2 + y^2/\beta^2 - z^2/\gamma^2 = -1$ (δύο φύλλα)

Θα έχουμε, ότι:

$\cancel{x}/a = \cos\theta\cosh t$

$y/\beta = \sin\theta\cosh t$

$z/\gamma = \sinh t$

(i) $(x,y,z) = (a\cos\theta\cosh t, \beta\sin\theta\cosh t, \gamma\sinh t)$

$\theta \in [0, 2\pi)$ $t \in \mathbb{R}$

(ii) $(x,y,z) = (a\cos\theta\sinh t, \beta\sin\theta\sinh t, \gamma\cosh t)$

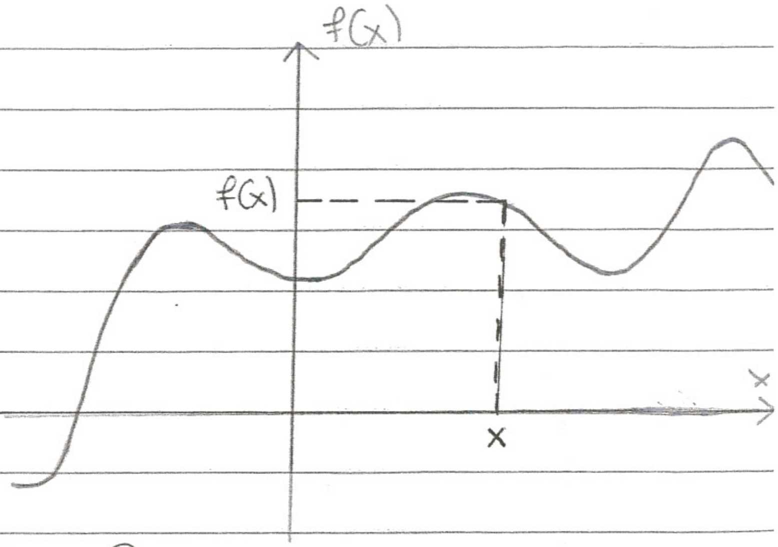
Γράφημα Συνάρτησης

Έχουμε:

▶ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (πραγμ. συνάρτηση)

$C_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$

(μονοσήμαντα)

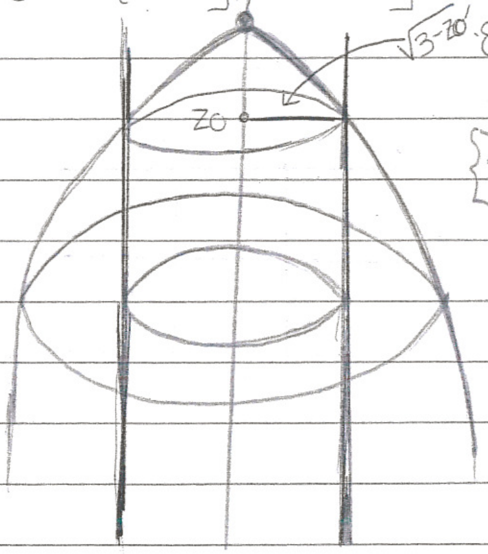


▶ $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$

Παραδείγματα: $f: \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$(z=)\ f(x,y) = 3 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2<1$

$C_f = \{(x, y, 3-x^2-y^2)\ x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2<1\}$

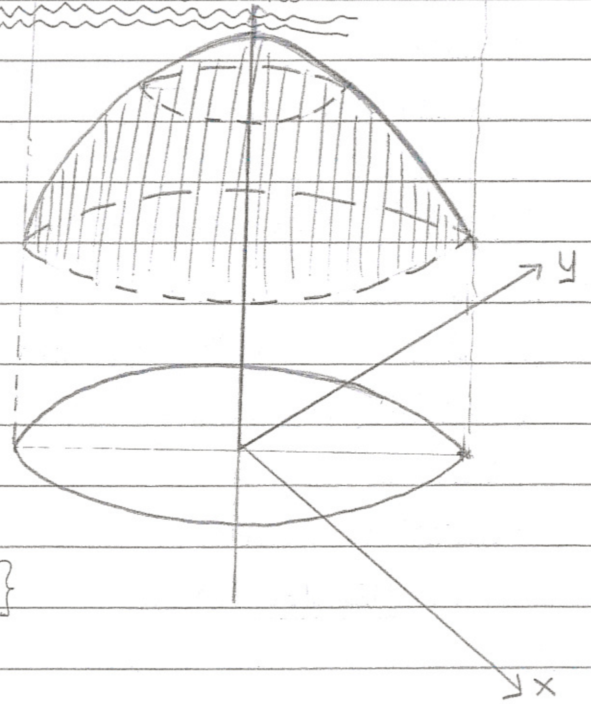


Έστω $z_0 \in \mathbb{R}$

$z_0 = 3 - x^2 - y^2$

$\boxed{x^2+y^2 = 3 - z_0\ (=\rho^2)}$

Ουσιαστικά έχω:



▶ $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$

$C_f = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y,z) \in \Omega\}$

$w_0 = f(x,y,z)$

Η διαφορά με το $\mathbb{R}^2$ είναι ότι στον $\mathbb{R}^3$ αντί για καμπύλη στάθμης έχω επιφάνεια στάθμης

Θυμάμαι: Πέμπτη 22-02-18

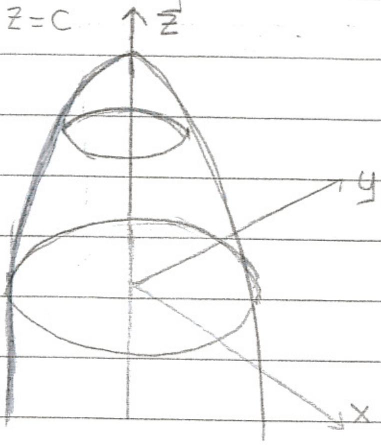
Καμπύλη στάθμης: $z=f(x,y)$, $z=c$ $\{f(x,y)=c\}$

π.χ είναι $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=c \end{cases} \iff 2-x^2-y^2=c \iff 2-c=x^2+y^2$

$\iff x^2+y^2=2-c$, $2-c>0 \iff -c>-2$

$\iff c<2$

$=(\sqrt{2-c})^2$



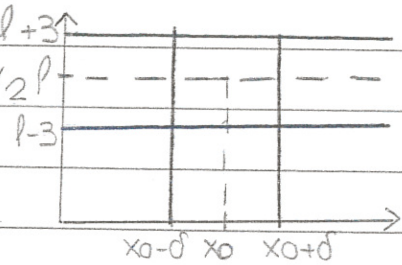
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 πότε $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

Θα έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

π.χ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \Rightarrow \exists \delta_0>0: 1-\delta_0<x<1+\delta_0$

$x\neq 1 \Rightarrow 3/2<f(x)<5/2$

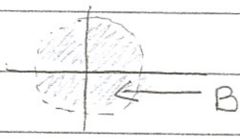


▶ Ανοιχτό σύνολο και όριο

· $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Το Ω το λέμε ανοιχτό. Τότε $\forall a\in\Omega, \exists \delta>0$:

$\forall x<|x-a|<\delta \Rightarrow x\in A$

π.χ $B(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$



Το B είναι ανοιχτό

· $\forall a\in\Omega, \exists\delta>0$ $B(a,\delta)\subseteq\Omega$

Αν $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ($\Omega\subseteq\mathbb{R}^{2 \text{ ή } 3}$) και είτε $(x_0,y_0)\in\Omega$, $\exists\delta>0: B((x_0,y_0),\delta)\subset\Omega$ είτε είναι συνοριακό σημείο του Ω.

(x_0,y_0): $B((x_0,y_0),\delta)\subseteq\Omega$ (στο πεδίο ορισμού της f)

$\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell}$ $\forall\varepsilon>0, \exists \delta_1>0$ ($\delta_1\le\delta$) τ.ω: $\forall X=(x,y)$, $X\in B(x_0,\delta_1)\setminus\{x_0\}$:
$|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Τα όρια στη μια μεταβλητή είναι ανάλογα των ορίων στις πολλές μεταβλητές

Πράξεις ορίων:

1 Μεταβλητή

Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m \Rightarrow (1)$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0}(f+g)x= =\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2,3 Μεταβλητές

Αν $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=m$ $\Rightarrow (\ell)$ $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f+g)(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

Απόδειξη: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1\ \forall \overset{\to(x,y)}{x} \in B(x_0,\delta_1)\setminus\{x_0\}: |f(x)-\ell|<\varepsilon/2$

$\exists \delta_2\ \forall x\in B(x_0,\delta_2)\setminus\{x_0\}\quad |g(x)-m|<\varepsilon/2$

Επιλέγω $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ τότε $\forall x\in B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$

$|f(x)-\ell|<\varepsilon/2$

$|g(x)-m|<\varepsilon/2$ τότε $|(f+g)-(\ell+m)| = |f(x)-\ell)+(g(x)-m)|$

$\leq |f(x)-\ell| + |g(x)-m| \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

ii) Έστω $f:\mathbb{R}\to A$ $(A\subseteq\mathbb{R})$, $g:A\to\mathbb{R}$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(f\circ g:A\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

Αν $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ $\exists \lim\limits_{y\to \ell} g(y)=m$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=m$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ x_n\to x_0$

$\Rightarrow f(x_n)\to \ell$

ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$

Αν $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$ και

$\exists \lim\limits_{t\to \ell} g(t)=m$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)} g\circ f(x,y)=m$

iii)

• Πότε $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=?$

Αν $\exists$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\to x_0$, $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n\to x_0$ και $f(x_n)\to\ell$.

$f(y_n)\to m$, $m\neq \ell$.

Παράδειγμα: $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy/x^2+y^2$?

Έλω απροσδιοριστία θα χρησιμοποιήσω <u>πολικές</u> συντεταγμένες

$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $\quad xy=\rho^2\cos\theta\sin\theta \quad x^2+y^2=\rho^2 \qquad \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}=\cos\theta\sin\theta$

Άρα, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to0^+}\sin\theta\cos\theta=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\cos2\theta}{2}$ $\begin{cases}\to \theta=0\to 0\\ \to \theta=\frac{\pi}{4}\to 1/2\end{cases}$

Είναι, λοιπόν:

$\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} xy/x^2+y^2=0 \qquad \lim\limits_{(x,x)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,x)}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}.$

Τρίτη 27/02/18

Επανάληψη προηγούμενου μαθήματος

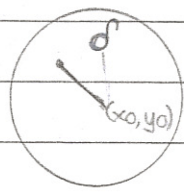
Όρια συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Πότε: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x)-\ell)=0$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0:$

$\forall (x,y) \mid 0<|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$

$\Longrightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$



- Αν έχουμε 2 συναρτήσεις (στο ίδιο σημείο) και υπάρχει το όριο της μίας (δηλ $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$) και το όριο της άλλης (δηλ $\exists \lim_{x\to x_0} g(x,y)=m$) τότε η διαφορά είναι το όριο των επιμέρων (δηλ $\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$

- Το όριο του γινομένου είναι το γινόμενο των ορίων:

  - $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

- Το όριο του πηλίκου είναι το πηλίκο των ορίων:

  - Αν $m\neq 0$ τότε ορίζεται: $\lim_{x\to x_0} f(x,y)/g(x,y)=\lim_{x\to x_0} f(x)/\lim_{x\to x_0} g(x)$

Έχουμε $\exists \lim_{x\to x_0} g(x)=m\neq 0$ $\begin{cases} m>0 \\ m<0\end{cases}$

- Έστω $m>0$:

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0:\ 0<|x-x_0|<\delta\quad |g(x)-m|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$-\varepsilon<g(x)-m<\varepsilon \xrightarrow{+m} -\varepsilon+m<g(x)<m+\varepsilon$

Επιλέγω $\varepsilon=m/2>0,\ \exists \delta_1>0:$

$0<|x-x_0|<\delta_1 \Longrightarrow |g(x)-m|<m/2$

$\iff \boxed{m/2<g(x)}<3m/2$

Πρόταση: Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $g:B(x_0,1)\to\mathbb{R}$ φραγμένη (πρέπει να είναι η g) $\Longrightarrow \nexists \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)\neq 0$

$B(x_0,1)$

$g: \emptyset \to \mathbb{R}$ φραγμένη
όταν $\exists M>0: |g(x)| \leq M \quad , \forall x \in B(x_0,1)$ (Δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται στο x_0)

$\Updownarrow$

$|x-x_0|<1$

Έστω $\varepsilon>0$, επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$
$\exists \delta>0: \quad |f(x)| < \varepsilon/M, \quad 0<|x-x_0|<\delta$ (για το τυχαίο πάλι)
Τότε: για $|x-x_0|<\delta$ ($\delta_1=\min(1,\delta)$) εδώ επιλέγω $\delta<1$
Έχουμε:
$$|f(x)g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|$$
$$\leq M|f(x)| < M\cdot \varepsilon/M=\varepsilon.$$

$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$

Κριτήριο Παρεμβολής:
Έστω $f,g,h : B(x_0,1)\setminus\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε
$g(x)\leq f(x)\leq h(x) \quad , \forall x\in B(x_0,1)\setminus\{x_0\}$
Εάν επιπρόσθετα $\begin{cases}\exists \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell \\ \exists \lim_{x\to x_0} h(x)=\ell\end{cases}$ τότε $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ και μάλιστα

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell.}$

Έστω $f: B(x_0,1)\setminus\{x_0\} \to (\ell-1,\ell+1)-\{\ell\}$
$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και η g (ορίζεται στο): $(\ell-1,\ell+1)-\{\ell\}\to\mathbb{R}$,
ώστε $\exists \lim_{t\to \ell} g(t)=m$

$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to \ell} g(t)=m$

Απόδειξη:
Επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \forall\varepsilon>0, \exists \delta>0$ ($\delta<1$) $\forall\, 0<|x-x_0|<\delta$, ~~$0<|x-x_0|<\delta_2$~~ $\Longrightarrow$
$|f(x)-\ell|<\varepsilon$ / ~~$|f(x)-\ell|<\delta_1$~~
Αφού/Επειδή $\lim_{t\to \ell} g(t)=m, \forall\varepsilon>0, \exists \delta_1>0$: Εάν γίνει αυτό, τότε
(*) $0<|t-\ell|<\delta_1 \Longrightarrow |g(t)-m|<\varepsilon$
Τότε για $0<|x-x_0|<\delta_2 \Longrightarrow 0<|f(x)-\ell|<\delta_1$, οπότε στην σχέση (*)

θέτω $t=f(x)$ οπότε παίρνω:

$$|g(f(x))-m|<\varepsilon,\ 0<|x-x_0|<d_2$$

▶ Πότε η f είναι συνεχής στο x_0?

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

να υπάρχει $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ και μάλιστα $l=f(x_0)$

Παρ 1 Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2/x^2+y^2$$

Κάνουμε αλλαγή ώστε ο παρανομαστής να θυμίζει "απόσταση" στο τετράγωνο

Αποδ:

Θέτουμε $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, επειδή $\lim(x,y)\to(0,0)$ $\Updownarrow$ $\lim \rho=0^+$

Τότε έχουμε: $xy^2/x^2+y^2 = (\rho\cos\theta)\rho^2\sin^2\theta/\rho^2=\rho\cos\theta\sin^2\theta.$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |\rho\cos\theta\sin^2\theta| \le \rho|\cos\theta|\cdot\sin^2\theta \le \rho\cdot 1\cdot 1=\rho$$

Επειδή $\lim_{\rho\to0^+}\rho=0$ ανεξαρτήτου του θ (ομοιόμορφα ως προς θ)

$$-\rho \le xy^2/x^2+y^2 \le \rho \iff -\sqrt{x^2+y^2} \le xy^2/x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \le |x|$$

όταν $\lim(x,y)=(0,0) \Rightarrow \lim x=0$

$$=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right||y|$$

Ανισότητα: $2|xy|\le|x|^2+|y|^2 \iff (|x|-|y|)^2\ge0$ (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

$x,y\in\mathbb{R}^n$

$$|x\cdot y|\le|x|\cdot|y|$$

$$|(x_1y_1+\dots+x_ny_n)|\le\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$$

$x, y > 0$

$$x \cdot y \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

$$\boxed{x \le \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q}}$$ (Ανισότητα Young)

Παρ 2 Έστω $a, b > 0$ Υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a + |y|^b}{x^2 + |y|^3}$?

Απόδ: Θα πρέπει να προκύψει $x = \rho\cos\theta$

Παίρνω πολικές συντεταγμένες

$x = \rho\cos\theta$

$|y|^{3/2} = \rho\sin\theta$

$|y| = \rho^{2/3}(\sin^2\theta)^{1/3}$

Αν $y > 0$: $x = \rho\cos\theta$

$y = \rho^{2/3}\sin^{2/3}\theta$ (επιλύεται μονοσήμαντα)

$\Longrightarrow \rho^2 = x^2 + |y|^3$

Άρα:

$$\frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^3} = \frac{|\rho\cos\theta|^a |\rho^{2/3}\sin^{2/3}\theta|^b}{\rho^2} = \rho^{a + \frac{2b}{3} - 2} |\cos\theta|^a |\sin\theta|^{2b/3}$$

$$\le \rho^{a + 2b/3 - 2}$$

Εάν $a + 2b/3 - 2 > 0$ (I)

$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + |y|^3} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^{a + \frac{2b}{3} - 2} = 0$

(II) $a + 2b/3 - 2 = 0$

$\theta = 0$ $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + |y|^3} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{a + \frac{2b}{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \neq 0$

(III) $a + 2b/3 - 2 < 0$, αν επιλέξω $\theta = \pi/4$ έχουμε $\frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + |y|^3} = \rho^{a + \frac{2b}{3} - 2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{a + \frac{2b}{3}} \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} +\infty$

Παρ 3 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$?

Έχουμε ▸ $y = \lambda x$

$$\Longrightarrow \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \frac{\lambda x^2}{x^6 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda x^2}{x^4 + \lambda^2}$$

▸ $\boxed{y = x^3}$

$$\frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}$$

Αυτό που θέλω ουσιαστικά είναι : $x^6+y^2=\rho^2$

Παίρνω πολικές συντεταγμένες: $\begin{cases} x=\rho\sin\theta \\ y=\rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \rho=\sqrt{x^6+y^2}$

$\left(\begin{array}{ll} \cos\theta=\alpha & \text{Για να έχει} \\ \sin\theta=\beta & \text{λύση πρέπει} \\ & \alpha^2+\beta^2=1 \end{array}\right)$

Είναι: $\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\dfrac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2}=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

Για να καταλήξω στο $\boxed{y=\lambda x^3}$

Πέμπτη 01/03/18

Έχουμε:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0, $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ ε.ω.

$|x-x_0|<\delta \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $x_0\in\mathbb{R}^2$

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\ 0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-l|<\delta$

$x\in\mathbb{R}^2$: $f(x)=(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$

$f_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad i=1,2,3$

$\sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+(f_2(x)-l_2)^2+(f_3(x)-l_3)^2} < \varepsilon \Longrightarrow$

$(f_i(x)-l_i)^2<\varepsilon \iff |f_i(x)-l_i|<\varepsilon$

Επιλέγοντας $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ τότε για $0<|x-x_0|<\delta$

$|f_i(x)-l_i|<\varepsilon$ τότε έχουμε:

$|f(x)-l| = \sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+(f_2(x)-l_2)^2+(f_3(x)-l_3)^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{3}$

Παραγώγιση (για μια μεταβλητή)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$ $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} := f'(x_0)$

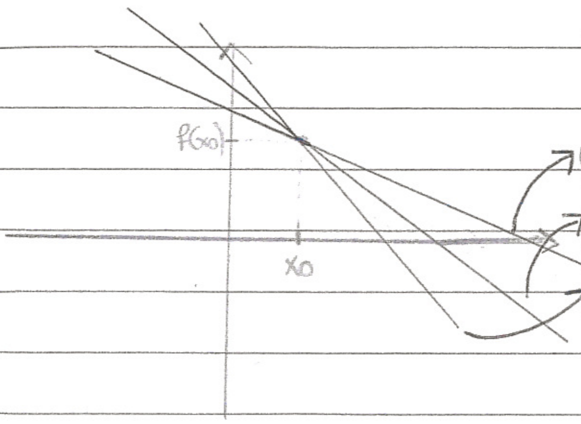
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: 0|x-x_0|<\delta \quad \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow$

$\left|\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right| < \varepsilon \iff |f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|<\varepsilon|x-x_0|$

$\iff -\varepsilon|x-x_0| < f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) < \varepsilon|x-x_0|$

Γεωμετρική Ερμηνεία

i) $x_0+\delta > x > x_0$: $\quad -\varepsilon(x-x_0) < f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) < \varepsilon(x-x_0)$



$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x) < f(x_0) + (f'(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$

$y = f(x_0)+(f'(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$

$y = f(x)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y = f(x)+(f'(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)$

· (για δυο μεταβλητές)

· $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$, $x,y \in \mathbb{R}$

Έστω (x_0,y_0)

Πως είναι για την μια μεταβλητή το y είναι φιξαρισμένο;

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\cancel{2} + x^2 - \cancel{y_0^2} - (\cancel{2} - x_0^2 - \cancel{y_0^2})}{x - x_0}$$

$$= \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x_0 - x)\cdot(x_0 + x)}{x - x_0} = -(x + x_0)$$

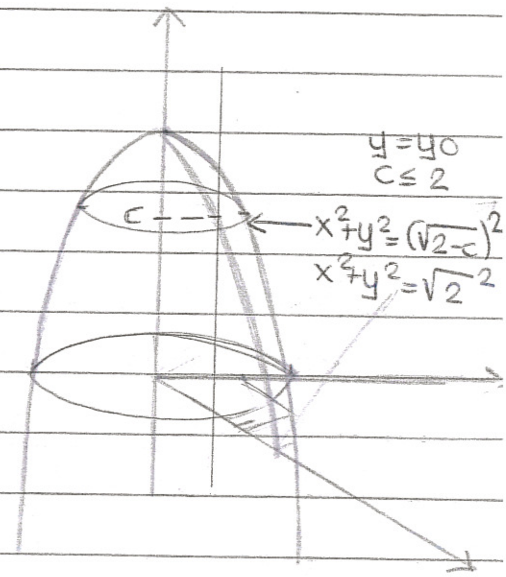
Μερική Παράγωγος

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0) =: \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = -2x_0$$

$$\frac{df}{dy}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

ή

$f_y(x,y_0)$



Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0), \quad \frac{df}{dy}(x_0,y_0)$$

Ερώτημα είναι η f συνεχής στο (x_0,y_0)? **ΌΧΙ!!!**

π.χ

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ -1, & xy = 0 \end{cases}$$

$$\frac{df(0,0)}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-1-(-1)}{0} = 0$$

$$\frac{df}{dy}(0,0) = 0$$

Εφαπτόμενο επίπεδο

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x_0 - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$$

Ορισμός: Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) αν υπάρχουν:

$\frac{df}{dx}(x_0,y_0)$, $\frac{df}{dy}(x_0,y_0)$ και $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{df}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}$

$=0$ δηλ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: 0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{df}{dy}(x_0,y_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}\right|<\varepsilon$$

Πρόταση:

Αν η f παραγ στο (x_0,y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0,y_0) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$

$\Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le \left|\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0)\right| + \left|\frac{df}{dy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right| + \varepsilon|x-x_0|$

$(\delta\le\varepsilon) \quad \le \varepsilon\left(\left|\frac{df}{dx}(x_0,y_0)\right| + \left|\frac{df}{dy}(x_0,y_0)\right| + \varepsilon\right)$

- $f(x,y)=2-x^2-y^2$ είναι παραγωγ σε κάθε σημείο;

$\rightarrow \frac{df}{dx}(x_0,y_0)=-2x_0$ $\qquad \rightarrow \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{|x-x_0|}$

$\rightarrow \frac{df}{dy}(x_0,y_0)=-2y_0$ $\qquad = \frac{2-x^2-y^2-2+x_0^2+y_0^2+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)}{|x-x_0|}$

$$= \frac{2-x^2-y^2-2+x_0^2+y_0^2+2x_0x-2x_0^2+2y_0y-2y_0^2}{|x-x_0|}$$

$= \frac{-x^2+2x_0x-x_0^2-y^2+2y_0y-y_0^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$=-|x-x_0| \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}(\dots) = \lim_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=0$ (όπου $x=(x,y)$, $x_0=(x_0,y_0)$)

Δίνεται συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Είναι η f παραγ στο $(0,0)$?

Απάντηση:

(1) Θεώρημα:
Έστω $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\forall (x,y)$:
$\exists \frac{df}{dx}(x,y), \frac{df}{dy}(x,y)$
και $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ είναι συνεχείς
τότε
$\Longrightarrow f$ παραγωγ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\exists\ {}^{df}/_{dx}(0,0)$? $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \dfrac{0-0}{x-0} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \Rightarrow \dfrac{df}{dx}(0,0) = 0$ Επίσης $\dfrac{df}{dy}(0,0) = 0$

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)\cdot(y-0)}{|x-0|}$$

$$= \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0x - 0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$y-0$: $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \ldots = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{2x^2} = 1/2.$

Άρα δεν είναι η f παραγ στο (0,0).

Τρίτη 06/01/18

Επανάληψη προηγούμενου μαθήματος

$f: U \to \mathbb{R}$, U ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

$(x_0,y_0) \in U$

Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0)?

Απ: i) Θα πρέπει αρχικά να υπάρχουν ($\exists$) $\partial f/\partial x(x_0,y_0)$, $\partial f/\partial y(x_0,y_0)$

$$\partial f/\partial x(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\partial f/\partial y(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

"Εφαπτόμενο επίπεδο" που διέρχεται από τον $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

$$z = f(x_0,y_0) + \partial f/\partial x(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial f/\partial y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

ii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial f/\partial x(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial f/\partial y(x_0,y_0)(y-y_0)}{|(x-x_0,y-y_0)|}=0$$

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \overset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$, (x_0,y_0,z_0)

Η f παραγωγίσιμη στο $(x_0,y_0,z_0) \in U$ θα πρέπει $\exists\ \partial f/\partial x(x_0,y_0,z_0)$, $\partial f/\partial y(x_0,y_0,z_0)$, $\partial f/\partial z(x_0,y_0,z_0)$

και $$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)-\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)}{|(x-x_0,y-y_0,z-z_0)|}=0$$

$f(x,y)$ (συνάρτηση "2 μεταβλητών")

κλίση της f στο (x_0,y_0)

$$\nabla f(x_0,y_0) = (\partial f/\partial x(x_0,y_0), \partial f/\partial y(x_0,y_0))$$

Τότε $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) = \partial f/\partial x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial f/\partial y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

Αν $f(x,y,z)$ (συνάρτηση "3 μεταβλητών")

κλίση της f στο (x_0,y_0,z_0) είναι

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (\partial f/\partial x(x_0,y_0,z_0), \partial f/\partial y(x_0,y_0,z_0), \partial f/\partial z(x_0,y_0,z_0))$$

(ανάδελτα)

είναι αντίστοιχα:

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0) = \frac{df}{dx}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{df}{dy}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{df}{dz}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)$

~ Διανυσματική συνάρτηση ~

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{1\times n}$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$

$\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$

$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\nabla f_i(x_0) = \left(\frac{df_i}{dx_1}(x_0), \ldots, \frac{df_i}{dx_n}(x_0)\right)$

→(έχει γίνει πίνακας) (είναι ισομορφισμοί)

$$Df(x_0) := \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \ldots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \ldots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \frac{df_m}{dx_2} & \ldots & \frac{df_m}{dx_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ πίνακας}$$

Θεώρημα: Έστω $f: U \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$

είναι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι

$\frac{df_i}{dx_j}(x)$ $\quad \forall x \in U$

$\forall j=1,\ldots,n$

$\forall i=1,\ldots,m$

είναι επιπρόσθετα η $\frac{df_i}{dx_j}$ είναι συνεχείς.

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο U.

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δηλ αν η f είναι τέτοια ώστε να $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Πρόχειρο: (x_0,y_0)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{df}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

Θέλω να "φτιάξω" τις διαφορές: ΔΗΛ να το "ΦΙΞΑΡΩ"

• θέλω να το κάνω 1 μεταβλητής

$f(x,y)-f(x_0,y_0) = f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$ (παρατηρώ ότι x-σταθερό και y_0- =//=)

• κάνω χρήση → = ΘΜΤ (απαιτεί συνέχεια και παραγωγισιμότητα) ως προς την δεύτερη μεταβλητή

στο διάστημα την $y>y_0$

y, y_0, $y_0<\xi<y$ στο ενδιάμεσο διάστημα $\xi=\xi(x,x_0,y)$ ώστε (1) $f(x,y)-f(x,y_0) = (y-y_0)\cdot\frac{df}{dy}(x,\xi)$

Αντίστοιχα, ∃ η στο ανοιχτό διάστημα των x, x_0 ώστε

(2) $f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = (x-x_0)\, \partial f/\partial x\, (\eta, y_0)$

$$\Rightarrow f(x,y) - f(x_0,y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial f/\partial y(x_0,y_0)(y-y_0) =$$
$$= \partial f/\partial x(\eta,y_0)(x-x_0) + \partial f/\partial y(x,\xi)(y-y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$= \left(\partial f/\partial x(\eta,y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)\right)(x-x_0) + \left(\partial f/\partial y(x,\xi) - \partial f/\partial y(x_0,y_0)\right)(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - \partial f/\partial y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$

$$= \left(\partial f/\partial x(\eta,y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)\right)\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Ομοίως $\eta \to x_0$ καθώς $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$\xi \to y_0$

και λόγω συνέχεια των $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ θα έχουμε: //

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\partial f/\partial x(\eta,y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)\right) = 0$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\partial f/\partial y(x,\xi) - \partial f/\partial y(x_0,y_0)\right) = 0$$

και $\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \le 1$

$\left|\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \le 1$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Πότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη και πόσο είναι $(g \circ f)'(x)$;

i) η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0
η g να είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$

$\Longrightarrow$ η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Συμβολισμός: $\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du}\,\frac{du}{dx}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Η σύνθεση τους θα είναι:

$(f\circ\vec{\gamma})(t) = f(\vec{\gamma}(t))$, $t\in\mathbb{R}$.

$f\circ\vec{\gamma}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Πότε η $f\circ\vec{\gamma}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0\in\mathbb{R}$

Αν η $\vec{\gamma}$ είναι παραγωγ/μη στο t_0 και η f παραγ/μη στο $\vec{\gamma}(t_0)$.
Τότε η $f\circ\vec{\gamma}$ είναι παραγ/μη στο t_0, και μάλιστα

$$(f\circ\vec{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\vec{\gamma}(t_0)\cdot\vec{\gamma}'(t_0)) \text{ ή } Df(\vec{\gamma}(t_0))\cdot\vec{\gamma}'(t_0)$$

$\nabla f = (df/dx, df/dy, df/dz)$

$\vec{\gamma}'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \gamma_3'(t_0))$

$= \nabla f(\vec{\gamma}(t_0))\cdot\vec{\gamma}'(t_0) = (df/dx(\vec{\gamma}'(t_0)), df/dy(\vec{\gamma}'(t_0)), df/dz(\vec{\gamma}'(t_0)))$

$\cdot(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \gamma_3'(t_0))$

$= df/dx(\vec{\gamma}'(t_0))\cdot\gamma_1'(t_0) + df/dy(\vec{\gamma}'(t_0))\cdot\gamma_2'(t_0) + df/dz(\vec{\gamma}'(t_0))\cdot\gamma_3'(t_0)$

$Df(\vec{\gamma}'(t_0)) = [\,df/dx(\vec{\gamma}(t_0)) \quad df/dy(\vec{\gamma}(t_0)) \quad df/dz(\vec{\gamma}(t_0))\,]$

πίνακας 3 γραμμές 1 στήλη

$$D\gamma(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \\ \gamma_3'(t_0) \end{bmatrix}$$

$$Df(\vec{\gamma}(t_0))\,D\vec{\gamma}(t_0) = df/dx\,\gamma_1' + df/dy\,\gamma_2' + df/dz\,\gamma_3'$$

Παράδειγμα: Δίνεται η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x,y,z) = e^{x^2} + 2ye^{y^2} + e^{z^2}$, όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$ και $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, με τύπο $\vec{\gamma}(t) = (t, \sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $f \circ \vec{\gamma}$ είναι παραγ/μη, και βρείτε την παράγωγο αυτής.

1η $f(\vec{\gamma}(t)) = e^{t^2} + 2\sin t \cdot e^{\sin^2 t} + e^{\cos^2 t}$

η $f \circ \vec{\gamma}$ είναι παραγωγ/μη ως το άθροισμα f σύνθεση παραγ/μη συναρτήσεων και γινόμενα.

$$\frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = e^{t^2}(t^2)' + 2\cos t \cdot e^{\sin^2 t} + 2\sin t\, e^{\sin^2 t}(\sin^2 t)' + e^{\cos^2 t}(\cos^2 t)'$$
$$= 2t \cdot e^{t^2} + 2\cos t \cdot e^{\sin^2 t} + 4\sin^2 t \cos t \cdot e^{\sin^2 t} - 2\sin t \cos t \cdot e^{\cos^2 t}$$

Πέμπτη 08-03-18

Από το προηγούμενο μάθημα: Έχουμε:

$f(x,y,z) = e^{x^2} + 2y\, e^{y^2} + e^{z^2}$ $\qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\gamma(t) = (t, \sin t, \cos t),\ t \in \mathbb{R}$ $\qquad Df \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Στόχος: Εύρεση $\frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t))$ $\qquad D\gamma \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

1ος τρόπος (Με αντικατάσταση)

$$(f\circ\gamma)(t) = f(t, \sin t, \cos t)$$
$$= e^{t^2} + 2\sin t\, e^{\sin^2 t} + e^{\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(f\circ\gamma)(t) = 2t e^{t^2} + 2\cos t \cdot e^{\sin^2 t} + 4\sin^2 t \cos t \cdot e^{\sin^2 t} - 2\sin t\cos t\, e^{\cos^2 t}$$

2ος τρόπος Πινάκων

Έστω $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 3\times 2 \\ \text{πίνακας}}}{(Dg)(x,y)} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x\, g_1(x,y) & \partial/\partial y\, g_1(x,y) \\ \partial/\partial x\, g_2(x,y) & \partial/\partial y\, g_2(x,y) \\ \partial/\partial x\, g_3(x,y) & \partial/\partial y\, g_3(x,y) \end{bmatrix}$$

$g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y))$

Γενικότερα: Αν $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, όπου $m,n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\mathbb{R}^{m\times n}}{\underset{\cap}{Dg}} = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial x_1 & \cdots & \partial g_1/\partial x_n \\ \partial g_2/\partial x_1 & & \partial g_2/\partial x_n \\ \partial g_m/\partial x_1 & \cdots & \partial g_m/\partial x_n \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$D(f\circ\gamma)(t) = (Df)(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t)$$

Αν: $Df(x,y,z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \ \frac{\partial f}{\partial z}\right]$

$$= \left[2x e^{x^2} \quad 2(1+2y^2)e^{y^2} \quad 2z e^{z^2}\right]$$

όμως δεν το θέλουμε για x,y,z αλλά για t, επομένως θα έχουμε

$$(Df)(\gamma(t)) = \left[2t e^{t^2} \quad 2(1+2\sin^2 t)\cdot e^{\sin^2 t} \quad 2\cos t\, e^{\cos^2 t}\right]$$

$$(D\gamma)(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$(Df)(y(t))(Dy)(t) = \begin{bmatrix} 2t\cdot e^{t^2} & 2(1+2\sin^2 t)\cdot e^{\sin^2 t} & 2\cos t\, e^{\cos^2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$= 2t\cdot e^{t^2} + 2\cos t\cdot(1+2\sin^2 t) - 2\sin t\cos t\cdot e^{\cos^2 t}$$

Παράδειγμα 2

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, με τύπο

$$f(x,y) = (x^2+1,\ xy,\ yx^2)$$

και $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x^2, y^2)$

Βρείτε το πίνακα $D(f\circ g)(x,y,z)$

Απ: Οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι πολυωνυμικές σε κάθε συνιστώσα, οπότε υπάρχουν οι μερικές παραγώγους και είναι συνεχείς συναρτήσεις, και επομένως από το Θ. πρόκειται για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Οπότε: $D(f\circ g)(x,y,z) = (Df)\cdot(g(x,y,z))\cdot(Dg)\cdot(x,y,z)$

$$Df \in \mathbb{R}^{3\times 2} \implies D(f\circ g) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$Dg \in \mathbb{R}^{2\times 3} \implies D(f\circ g) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$(Df)\cdot(u,v) = \begin{bmatrix} \partial/\partial u\, f_1 & \partial/\partial v\, f_1 \\ \partial/\partial u\, f_2 & \partial/\partial v\, f_2 \\ \partial/\partial u\, f_3 & \partial/\partial v\, f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 2uv & u^2 \end{bmatrix}$$

$$(Df)(g(x,y,z)) = (Df)\cdot(x^2,y^2) = \begin{bmatrix} 2x^2 & 0 \\ y^2 & x^2 \\ 2x^2y^2 & x^4 \end{bmatrix}$$

$$(Dg)(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (D(f\circ g))(x,y,z) = (Df)\cdot(g(x,y,z))\cdot(Dg)(x,y,z))$$

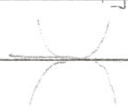
$$= \begin{bmatrix} 2x^2 & 0 \\ y^2 & x^2 \\ 2x^2y^2 & x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x^3 & 0 & 0 \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 4x^3y^2 & 2x^4y & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x_0,y_0,z_0) = g(x_0,y_0,z_0)$

Πότε οι f, g τέμνονται στο (x_0,y_0,z_0) εφαπτομενικά;



Έχουμε:

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$g(x,y,z) = -x^2+y^2+z^2$

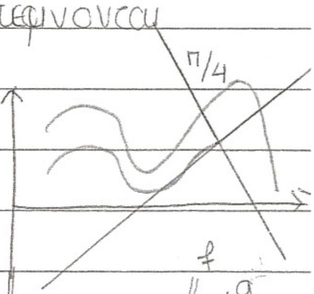
τέμνονται στο 0 δηλ. $f(0,0,0)=0=g(\ldots)$

Έστω:

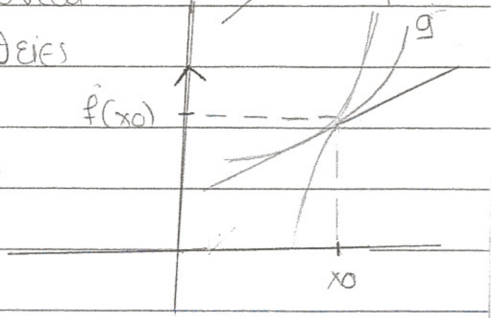
$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έστω $f(x_0)=g(x_0)$

Πότε τέμνονται εφαπτομενικά; (κατά ⊥ συγκεκριμένη γωνία) Πότε τέμνονται κατά γωνία $\pi/4$;

Σκέφτομαι ↳



Τέμνονται εφαπτομενικά σημαίνει ότι ταυτίζονται οι εφαπτόμενες ευθείες για τον $\mathbb{R}^2$ και τα επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$.

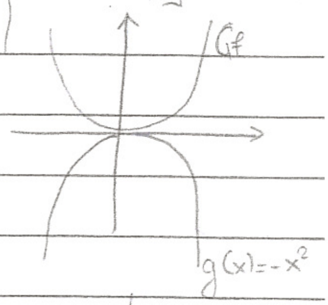


Έστω $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$g(x,y,z)=-x^2+y^2+z^2$

Αντίστοιχα

$f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2$



Ψ) Χρειαζόμαστε 4 μεταβλητές 3 για να τρέχουν στο x,y,z και 1 για να μας δώσει το αποτέλεσμα

$\Rightarrow f'(0) = (2x)\big|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow$ Εφαπτόμενη ευθεία

$y = f(0)+f'(0)(x-0)$

$= 0$ (Διερχόμαστε για να καταλάβουμε)

Θα έχουμε:

$\partial f/\partial x\,(x,y) = 2x$

$\partial f/\partial y\,(x,y) = 2y$

$\Rightarrow f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$

Εφαπτόμενο επίπεδο: $z = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)$

$= 0$

Παράγωγος σε κατεύθυνση

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(x_0,y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$ (Μας μετράει την κλίση που έχει το γράφημα)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Επιλέγω τυχαία ένα διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$|\vec{v}|=1$ (θα αφορά το μοναδιαίο διάνυσμα)

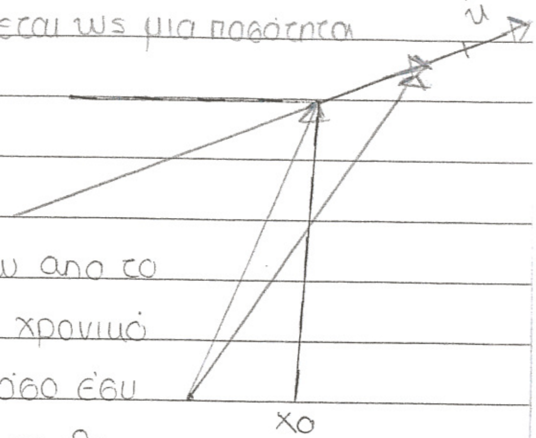
Θέλουμε να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής με ~~[illegible]~~ συγκεκριμένη κατεύθυνση

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t\vec{v}) - f(x_0,y_0)}{t}$$ → πόσο μετακινήθηκα από την συγκεκριμένη θέση

Επομένως:

$$D_{\vec{v}} f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t\vec{v}) - f(x_0,y_0)}{t}$$

Ορίζεται ως μια ποσότητα



Ξεκινάω από το x_0 μετά από χρονικό διάστημα t πόσο έχει ($f(x_0,y_0)$ ← μετακινηθεί και θα είναι στο $f((x_0,y_0)+t\vec{v})$

$$\frac{d}{dt} f((x_0,y_0)+t\vec{v})\Big|_{t=0}$$ ρυθμός μεταβολής

π.χ Έστω $\vec{v}=(1,0)$ ή $(-1,0)$
και επιπλέον δίνεται
$f((x_0,y_0)+t(1,0)) = f(x_0+t,y_0)$

τότε θα έχουμε: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$

αν $\vec{v}=(0,1)$ ή $(0,-1)$

τότε θα έχουμε: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$

Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{f((x_0,y_0))+t(-1,0)-f(x_0,y_0)}{t} = \frac{f(x_0-t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$t\to 0 \Leftrightarrow x\to x_0$

$$= \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_0-x} = -\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$x = x_0 - t \Leftrightarrow \boxed{t = x_0 - x}$

Όμως:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(1,0))-f(x_0,y_0)}{t} = -\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

!Αν θέλουμε σε κάθε κατεύθυνση θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη

Για την ακρίβεια:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0,y_0) \Longrightarrow \forall \vec{u}, |\vec{u}|=1 \ \exists \ D_{\vec{u}} f(x_0,y_0)$
(παίρνουμε συγκεκριμένες ευθείες)

Ερώτηση: Αν $\forall |\vec{v}|=1, \exists \ D_{\vec{v}} f(x_0,y_0) \Longrightarrow$ η f παραγωγίζεται στο (x_0,y_0)?

Αν f παραγωγίζεται στο (x_0,y_0) $\quad D_{\vec{v}} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$

Σκέφτομαι

$\gamma(t) = (x_0,y_0) + t\vec{v}$

$\gamma'(t) = \vec{v}$

$$D(f(\gamma(t)))\Big|_{t=0}$$

$$= (Df)(\gamma(t)) \, D\gamma(0)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Τριτη 13-03-18

Επαναληψη προηγουμενου μαθηματος/προηγουμενων μαθηματων

Φυλλαδιο 2

Ασκηση 3: Καθε ευθεια στον κωνο

$$x^2+y^2-z^2=0$$

διέρχεται από την αρχη των αξόνων, και στην συνέχεια βρειτε όλες τις ευθειες της μορφης

$$(x,y,z)=t(a,b,c),\ t\in\mathbb{R}$$

που βρίσκεται πάνω στον κωνο.

Λύση:

Εστω η ευθεια να ειναι:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c),\ \text{οπου}\ t\in\mathbb{R}$$

και βρίσκεται πάνω στο κωνο.

Το (x_0,y_0,z_0) είναι σημείο του κώνου

και το διάνυσμα $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Επομένως έχουμε:

$x=x_0+ta$

$y=y_0+tb$

$z=z_0+tc$, και τώρα αντικαθιστώ στην $x^2+y^2-z^2=0$

$$(x_0+ta)^2+(y_0+tb)^2-(z_0+tc)^2=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

$$x_0^2+y_0^2-z_0^2+2(x_0a+y_0b-z_0c)t+(a^2+b^2-c^2)t^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2-z_0^2=0 \\ x_0a+y_0b-z_0c=0 \\ a^2+b^2-c^2=0 \end{cases}$$

• Πότε η ευθεια διέρχεται από την αρχή των αξόνων; Θα πρέπει να υπάρχει κάποιο t ώστε

$t\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_0+ta=0 \\ y_0+tb=0 \\ z_0+tc=0 \end{cases}$$

Το c δεν είναι μηδεν, γιατί αν $c=0$, $\Rightarrow a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$ (άρα θα προέκυπτε ότι το διάνυσμα (a,b,c) θα ήταν μηδενικό), άτοπο

Επομένως $t = -z_0/c$.

Θα αποδείξω ότι:

$$\begin{cases} x_0 - z_0/c\, a = 0 \\ y_0 - z_0/c\, b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c x_0 - z_0 a = 0 \\ c y_0 - z_0 b = 0 \end{cases}$$

Οπότε:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = z_0^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \\ x_0 a + y_0 b = z_0 c \end{cases}$$ (εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος (x_0, y_0) με το (a,b))

$$\Longrightarrow (z_0 c)^2 = z_0^2 c^2 \iff (x_0 a + y_0 b)^2 = (a^2+b^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)$$

Γενικότερα:

Το εσωτερικό γινόμενο: $(X \cdot Y)^2 = |X|^2 \cdot |Y|^2 \cdot \cos^2\theta \Longrightarrow Y = \lambda \cdot X$ (θα πρέπει να είναι συγγραμμικά αν θέλουμε $\cos^2\theta = 1$)

Άρα θα έχουμε: $(x_0, y_0) = \lambda(a,b)$

$$\begin{matrix} x_0 = \lambda a \\ y_0 = \lambda b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2(a^2+b^2) = z_0^2 \\ a^2+b^2 = c^2 \\ \lambda(a^2+b^2) = z_0 c \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\lambda c^2 = z_0 \cdot c \Rightarrow \boxed{z_0 = \lambda c}$, η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω.

$c x_0 - a z_0 = \lambda a c - a \lambda c = 0$

$c y_0 - z_0 b = c \lambda b - \lambda c b = 0$

Άρα η ευθεία μας διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Αφού όλες οι ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων επιλέγω $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$, τότε θα έχουμε: $(x,y,z) = t\,(a,b,c)$, όπου $t \in \mathbb{R}$.

Θα πρέπει $a^2 + b^2 = c^2$ (περιγράφω σε παραμετρική μορφή)

$$a = c\cos\theta$$

$$b = c\sin\theta$$

Άρα: $(x,y,z) = t(c\cos\theta, c\sin\theta, c)$

$\qquad = t\,c(\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$\Longrightarrow (x,y,z) = s\,(\cos\theta, \sin\theta, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$

2ος τρόπος

$$\begin{cases} x_0+y_0+z_0=2z_0 \\ x_0\cdot a+y_0\cdot b+z_0 c=2z_0 c \\ a^2+b^2+c^2=2c^2 \end{cases}$$

(x_0,y_0,z_0)

(a,b,c)

Αντίστοιχη ιδιότητα $\Rightarrow$ $((a,b,c)\cdot(x_0,y_0,c_0))^2 = |(a,b,c)|^2\cdot|(x_0,y_0,z_0)|^2$

...

3ος τρόπος

Απόδειξη: Θα αποδείξω αρχικά ότι διέρχεται από ένα σημείο της μορφής $(x_0,y_0,0)$

Αυτό συμβαίνει πάντοτε επιλέγοντας $t=-z_0/c$.

Η ευθεία έχει πάντα ένα τέτοιο σημείο, από το οποίο ξεκινάω.

Επομένως η ευθεία έχει την μορφή:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,0)+t(a,b,c),\ \text{όπου } t\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \\ z=tc \end{cases} \Rightarrow (x_0+ta)^2+(y_0+tb)^2-t^2c^2=0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+2(ax_0+by_0)t-t^2c^2=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_0=y_0=0}$$

Θα έχουμε, λοιπόν: "Ταυτότητα Lagrange"

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-((a,b,c)\cdot(x_0,y_0,z_0))^2=\begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & c \\ x_0 & z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b & c \\ y_0 & z_0\end{vmatrix}^2$$

Κανόνας Αλυσίδας

Άσκηση 1: Έστω $f(u,v)=(\tan(u-1)-e^u,\ u^2-v^2)$

$g(x,y)=(e^{x-y},\ x-y)$ και $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Να υπολογίσετε $D(f\circ g)(1,1)$

Λύση:

$$Dh(1,1)=\left[\frac{\partial h}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial h}{\partial y}(1,1)\right]$$

Το μεγάλο πλεονέκτημα είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

$\nabla h(1,1)\rightsquigarrow$ το αντίστοιχο $=\left(\frac{\partial h}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial h}{\partial y}(1,1)\right)$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ διάνυσμα ενώ $x,y,z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Θα έχουμε, λοιπόν

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}(\quad)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}(\quad)\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$g(x,y) = (\underbrace{e^{x-y}}_{g_1}, \underbrace{x-y}_{g_2})$$

Αντίστοιχα:

$$\frac{d}{du}\left(f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \right) = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{du} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{du}$$

Άρα θα είναι:

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(e^{x-y}, x-y)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f\circ g\right)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d}{dx}\,(e^{x-y}) + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{d(x-y)}{dx}$$

$$D(f\circ g)(x,y) = (Df)\cdot(g(x,y))\cdot Dg\,(x,y)$$

$$(Dg)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{\partial x} & \frac{dg_1}{dy} \\ \frac{dg_2}{dx} & \frac{dg_2}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}\,e^{x-y} & \frac{d}{dy}\,e^{x-y} \\ \frac{d}{dx}\,(x-y) & \frac{d}{dy}\,(x-y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{x-y}\frac{d}{d}(x-y) & e^{x-y}\frac{d}{dy}(x-y) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(Df)(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(u-1)} & e^{-v} \\ 2u & -2v \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (Df)(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(e^{x-y}-1)} & -e^{x-y} \\ 2e^{x-y} & -2(x-y) \end{bmatrix}$$

$$D(f\circ g)\cdot(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\cos^2(e^{x-y}-1)} & -e^{x-y}\\ 2e^{x-y} & -2(x-y)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{x-y} & -e^{x-y}\\ 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{e^{x-y}}{\cos^2(e^{x-y}-1)}-e^{xy} & -\frac{e^{x-y}}{\cos^2(e^{x-y}-1)}+e^{x-y}\\ 2e^{2(x-y)}-2(x-y) & -2e^{2(x-y)}+2(x-y)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D(f\circ g)(1,1)=\begin{bmatrix}1-1 & -\frac{1}{1}+1\\ 2-2(1-1) & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Έστω f διαφορίσιμη και θέτουμε

$f(x,y)=F(r,\theta)$

όπου $x=r\cos\theta$ όπου $\partial x/\partial r=\cos\theta$ και $\partial y/\partial r=\sin\theta$

$y=r\sin\theta$

Να υπολογίσετε $\frac{\partial F}{\partial r},\frac{\partial F}{\partial \theta},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta$$

$$=\partial f/\partial x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\partial f/\partial y(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

$F(r,\theta)=f(x,y)$

$\Rightarrow \partial F/\partial r(r\theta)=\partial/\partial r(f(x,y))$

$\partial F/\partial x(r,\theta)=\partial/\partial\theta(f(x,y))=\partial f/\partial x\cdot\partial x/\partial\theta+\partial f/\partial y\cdot\partial y/\partial\theta$

$=\partial f/\partial x(-r\sin\theta)+\partial f/\partial y(r\cos\theta)$

$= r\sin\theta\ \partial f/\partial x(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \cdot \partial f/\partial y\,(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\partial f/\partial x(x,y) = \partial F/\partial r\,(r,\theta)\ \partial r/\partial x + \partial F/\partial\theta\,(r,\theta) \cdot \partial\theta/\partial x$

$r^2 = x^2+y^2,\quad r = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Παραγωγίζω μια ισότητα ως προς την μεταβλητή x

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta)$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$= \frac{\partial/\partial x(x)\sqrt{x^2+y^2} - x\ \partial/\partial x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\ x/\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x^2/\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial\theta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Επομένως:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r}\left(\sqrt{x^2+y^2}, \sin^{-1}\left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial F}{\partial\theta}(\quad)\frac{y}{x^2+y^2}$$

Πέμπτη 15-03-18

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$(\ast\; x_0 = (x_0, y_0, \dots x_{n0})$

$f: \mathbb{R}^{n} \ni v \to \mathbb{R}$ $\quad \partial f / \partial v (x_0)$ ή $Df_v(x_0) := \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$

$u \in |v| = 1$

Αν η f παραγωγ στο x_0 $\Longrightarrow$ Πρόταση

$\Longrightarrow \partial f / \partial v (x_0) := \nabla f(x_0) \cdot v$

<u>Παραδοχή</u>: Αν f παραγ στο x_0, $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ τ.ω $\gamma(t_0) = x_0$ και η γ παραγωγίσιμη στο t_0 $\Longrightarrow$

$f \circ \gamma$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και μάλιστα $(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0))\, \gamma'(t_0)$

$\gamma(t) = x_0 + tv$ (παίρνω την πιο απλή που έχει λύση το x_0) (?)

$t = 0 \Longrightarrow (f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = \dfrac{d}{dt} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$

$= \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$

Έχουμε την f στο x_0 παραγωγ στο x_0.

$\forall v \Longrightarrow \exists\, \partial f / \partial v (x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$

Υπάρχουν κατευθύνσεις v που μεγιστοποιείται ο ρυθμός μεταβολής στο x_0? (αντιστοίχως να ελαχιστοποιούνται)

$\partial f / \partial v = \nabla f(x_0) \cdot v = |\nabla f(x_0)| \cdot \cancel{|v|}^{\,1} \cos\theta$

<u>για μέγιστο ρυθμό μεταβολής</u> επιλέγω $\theta = 0$ επειδή $\cos\theta = 1$, όπου $\theta = 0$

άρα $\quad v \,//\, \nabla f(x_0) (\neq 0)$

άρα $\quad v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

αντίστοιχα <u>για ελάχιστο ρυθμό μεταβ.</u> επιλέγω $\theta = \pi$ $\quad \cos\theta = -1$

επομένως

$v = -\dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

<u>Για τυχαίο v</u> $\qquad \nabla f(x_0) \left(- \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}\right) \leq \dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) \leq \nabla f(x_0) \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

$\Longrightarrow -|\nabla f(x_0)| \leq \partial f / \partial v (x_0) \leq |\nabla f(x_0)|$

Επιφάνεια στάθμης ($f(x,y,z)$, επιφ0 $\Rightarrow f(x,y,z)=c$)

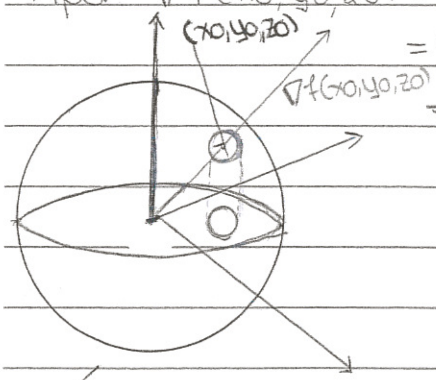
(Θέλω να δώ τι σχέση έχει η κλίση της σω με την επιφάνεια)

π.χ $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \quad x^2+y^2+z^2=c$

Άρα $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (\partial f/\partial x(x_0,y_0,z_0), \partial f/\partial y(x_0,y_0,z_0), \partial f/\partial z(x_0,y_0,z_0))$

$= 2(x_0,y_0,z_0)$

$\Rightarrow f(x_0,y_0,z_0) = 2(x_0,y_0,z_0)$

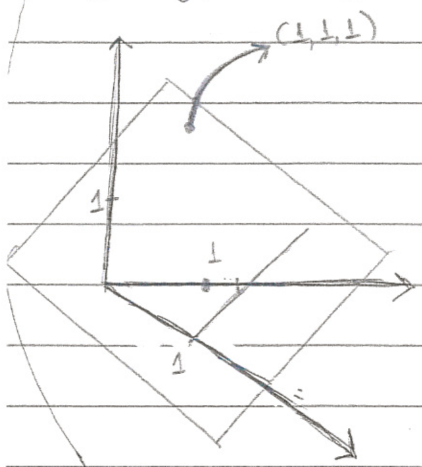


$g(x,y,z)=x+y+z \quad g(x,y,z)=c \Leftrightarrow x+y+z=1$

$\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)\perp$

$\Leftrightarrow (x-1)+y+z=0$

$\Leftrightarrow (x-1,y,z)\cdot(1,1,1)=0$



Ξανά για την σφαίρα: έστω $x^2+y^2+z^2=1 \quad (x_0,y_0,z_0)$

Έστω $z_0>0$

$\Rightarrow z_0^2 = 1-x_0^2-y_0^2 \Rightarrow z_0 = \pm\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

$z_0 = +\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$, άρα $z=\sqrt{1-x^2-y^2}=\phi(x,y)$

$z=\phi(x_0,y_0)+\nabla\phi(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) \Rightarrow$

$z=\phi(x_0,y_0)+\partial\phi/\partial x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\partial\phi/\partial y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$\phi_x(x,y)=1/2(\quad)^{-1/2}(-2x) = -x/\sqrt{1-x^2-y^2}$

$\phi_x(x_0,y_0) = -\dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}$

$\phi_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ άρα $\phi_{y_0}(x_0,y_0) = -\dfrac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}$

Άρα $z=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \; \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(x-x_0) - \dfrac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(y-y_0) \overset{z_0=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}{\iff}$

$$z = z_0 - \frac{x_0(x-x_0)}{z_0} - \frac{y_0(y-y_0)}{z_0}$$

$\iff (z-z_0)\cdot z_0 + (x-x_0)\cdot x_0 + (y-y_0)\cdot y_0 = 0$: εφαπτ. επίπεδο στο (x_0,y_0,z_0)

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(x_0,y_0,z_0) = 0 \Rightarrow$

$(x_0,y_0,z_0) = 1/2\, \nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp$ εφαπτ. επίπεδο που διέρχεται από το (x_0,y_0,z_0)

Θεώρημα Έστω ότι η $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι C^{-1} συνάρτηση (C^{-1} συνεχής και υπάρχουν μερικές) και (x_0,y_0,z_0) σημείο της επιφάνειας στάθμης $f(x,y,z)=c$

Τότε $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια στάθμης στο (x_0,y_0,z_0)

Απόδειξη Έστω $\gamma:\mathbb{R} \to$ Επιφάνεια $\subseteq \mathbb{R}^3$, παραγωγίσιμη $\gamma(0)=(x_0,y_0,z_0)$.

Τότε $f(\gamma(t)) = c$, $\forall t \in (-\delta,\delta)$, για $\delta>0$

Επειδή η $f\circ\gamma$ είναι διαφορίσιμη $\Rightarrow d/dt((f\circ\gamma)(t)) = d/dt\cdot c$

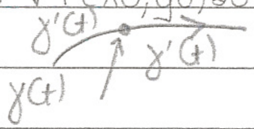
Από κανόνα της αλυσίδας

$\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = 0$, $t\in(-\delta,\delta)$

και για $t=0$ $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\gamma'(0)=0 \Rightarrow \forall \gamma'(0)$ εφαπτόμενο διάνυσμα

$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp$ εφαπτόμενο επίπεδο

όπου το εφαπτομ. επίπεδο είναι: $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot\nabla f(x_0,y_0,z_0) = 0$



Θεώρημα:

Έστω $f: U\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g: V\subseteq\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ U,V ανοιχτά και $g(U)\subseteq U$

$\Rightarrow f\circ g: V\subseteq\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

Αν η g είναι παραγωγ. στο $x_0\in V$ και η f είναι παραγωγ. στο $g(x_0)\in U$ τότε η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει

$$D(f\circ g)(x_0) = (Df)(g(x_0))\cdot(Dg)(x_0)$$

Απόδειξη:

Υπενθύμιση: Αν $g: V\subseteq\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ τότε $(Dg)(x_0)\in\mathbb{R}^{n\times k}$ και

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)\cdot(x-x_0) - (Dg)(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{k\times 1 \text{ διάνυσμα}}}{|x-x_0|} = 0$$

$\left(\underbrace{(Dg)(x_0)\cdot(x-x_0)}_{n\times 1}\right)$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)-g(x_0) - (Dg)(x_0)\cdot(x-x_0)|_{\mathbb{R}^n}}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

(Από προηγούμενο μάθημα) Τρίτη 20/03/18

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad |\vec{v}| = 1$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \partial f / \partial v (x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \nabla f(x_0) \cdot v$

Εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αν $f(x,y,z)$ είναι μια επιφάνεια στάθμης, τότε

$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp$ Επιφάνεια στο σημείο (x_0,y_0,z_0)

Εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (x_0,y_0,z_0), που είναι:

$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$

$\Leftrightarrow \partial f / \partial x (x_0,y_0,z_0) (x-x_0) + \partial f / \partial y (x_0,y_0,z_0) \cdot (y-y_0) + \partial f / \partial z (x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

Μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση της παραγώγου κατά κατεύθυνση (ρυθμός μεταβολής).

Στην διεύθυνση $v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

$\partial f / \partial v (x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \nabla f(x_0) \cdot \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} = \nabla f(x_0)$

Ενώ η επιλογή $v = -\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$, μας δίνει ρυθμό μεταβολής $-|\nabla f(x_0)|$

Θεώρημα: Έστω $g: V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ V ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^k$

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$

ώστε $g(V) \subseteq U$, τότε ορίζεται $f \circ g : V \to \mathbb{R}^m$

Εάν επιπρόσθετα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in V$ και

η f =//= =//= $g(x_0) \in U$

Τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε μάλιστα

$\boxed{D(f \circ g)(x_0) = (Df) \cdot (g(x_0)) \cdot Dg(x_0)}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο xo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$$

$Dg(x_0)\in \mathbb{R}^{n\times k}$

$x-x_0\in \mathbb{R}^{k\times 1}$

$\Rightarrow Dg(x_0)\cdot(x-x_0)\in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$g: V\to \mathbb{R}^{n\times 1}$ (μπορώ να αφαιρέσω πίνακες)

(με χρήση του ορισμού) $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$

$$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow \frac{|g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|}{|x-x_0|}<\varepsilon$$

Αντίστοιχα, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο g(z0) z0, έχουμε

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-Df(z_0)\cdot(z-z_0)}{|z-z_0|}=0$$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta'=\delta(\varepsilon)$: $|z-z_0|<\delta'$

$$\Rightarrow \frac{|f(z)-f(z_0)-Df(z_0)\cdot(z-z_0)|}{|z-z_0|}<\varepsilon$$

Θα αποδείξουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)-D(f\circ g)(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$$

μάλιστα θέλουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)-(Df)\cdot(g(x_0)\cdot Dg(x_0)\cdot(x-x_0))}{|x-x_0|}=0$$

Για το ε>0, έχουμε:

$$|(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)-Df(g(x_0))\cdot Dg(x_0)(x-x_0)|=$$

$$=|f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|$$

Από τον ορισμό της παραγώγου στο $g(x_0)=z_0$, έχουμε στο $\exists\ \delta'=\delta'(\varepsilon)$

$|z-g(x_0)|<\delta'$

$$|f(z)-f(g(x_0))-Df(g(x_0))(z-g(x_0))|\leq \varepsilon|z-g(x_0)| \quad (1)$$

$z=g(x)$

όπου $z=g(x)$: Για

$\forall \delta'>0, \exists \delta''>0$

$$|x-x_0|<\delta'' \Rightarrow \frac{|g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|}{|x-x_0|}<\delta'$$

$$\Leftrightarrow |g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|<\delta'|x-x_0|$$

(συνεπαγωγή) $\Rightarrow |g(x)-g(x_0)| < |Dg(x_0)\cdot(x-x_0)| + \delta'|x-x_0|$ (ανάποδη τριγωνική ανισότητα: $|A|-|B|$ $|A+B|\le|A|+|B|$)

$$< \underbrace{(|Dg(x_0)|+\delta')}_{M.}\cdot|x-x_0| \overset{\text{θέλω}}{<} \delta$$

$$|g(x)-g(x_0)|\le(1+M)|x-x_0|$$

Επιλέγω το δ'' τέτοιο ώστε:

$$(M+1)\delta''<\delta'$$

π.χ. $\delta''=\dfrac{\delta'}{2(M+1)}$

οπότε για $|x-x_0|<\delta''=\dfrac{\delta'}{2(M+1)} \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\delta'$

στην (1), θέτω $z=g(x)$ και τότε παίρνουμε:

$$|f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0))|\le\varepsilon|g(x)-g(x_0)|$$

Όμως:

$$|f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\,Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|=$$

$$=|f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0))+Df(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|$$

$$\le|f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0))|+|Df(g(x_0))\cdot\{g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0)\}|$$

$$\le \varepsilon|g(x)-g(x_0)|+|Df(g(x_0))|\cdot|g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)\cdot(x-x_0)|$$

$$\le \varepsilon(1+M)|x-x_0|+M\delta'|x-x_0|$$

Αν $\delta'(<\varepsilon/2M)$

$$=\{\varepsilon(1+M)+M\delta'\}|x-x_0|$$

$$<\varepsilon[\underbrace{(1+M)}_{1/2}+1/2]|x-x_0|$$

$$<\varepsilon|x-x_0|$$

* * *

Αν $z=f(x,y)$, στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, το εφαπτόμενο επίπεδο είναι:

$z - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0)$

$\Rightarrow z = f(x_0,y_0) + \partial f/\partial x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial f/\partial y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

Θέτουμε $F(x,y,z)=c$

$\qquad\qquad\ \ \|$

$\qquad\quad \underline{z - f(x,y) = 0}$

$F(x_0,y_0,z_0)=0 \iff z_0 = f(x_0,y_0)$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = (\partial F/\partial x(x_0,y_0,z_0),\ \partial F/\partial y(\ \ ),\ \partial F/\partial z(\ \ ))$

$= (-\partial f/\partial x(x_0,y_0),\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ 1)$

Εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0,y_0,z_0)

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$

$(-\partial f/\partial x(x_0,y_0),\ -\partial f/\partial y(x_0,y_0),\ 1)\cdot(x-x_0,\ y-y_0,\ z-f(x_0,y_0))=0$

$\iff z - f(x_0,y_0) - \partial f/\partial x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - \partial f/\partial y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

Για την σφαίρα: $e^{x^2}+e^{y^2+z^2}+e^{x^2-y^2}=1$ (μπορώ να επιλύσω γτ η μεταβλητή z είναι σε μια θέση)

αν: $e^{x^2+z^2}+e^{y^2+z^2}+e^{x^2-y^2}=2018$ (δυσκολεύει)

Ερώτημα: Μπορεί $\forall \vec{v}$, $|\vec{v}|$, $\exists\ \partial f/\partial v(0,0)$ και f να μην είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$?

Έστω

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a|y|^b}{|x|^2+|y|^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$\partial f/\partial x(0,0)=0$

$\partial f/\partial y(0,0)=0$ $\qquad v=(v_1,v_2)$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{f((0,0)+tv) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^a|v_1|^a\cdot t^b|v_2|^b - 0}{t^2}}{t}$ (συνέχεια στην επόμενη σελίδα)

*** Επιφάνεια στάθμης (στην πίσω σελίδα)

$F(x,y,z)=c$

$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$

$\nabla F(0,0,f(0,0)) = (-\partial f/\partial x(0,0) - \partial f/\partial y(0,0),\ 1)$

$(-\partial f/\partial x(0,0),\ -\partial f/\partial y(0,0),\ 1)\cdot(x,\ y,\ z-f(0,0))=0$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^a|y|^b}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$v=(v_1,v_2)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(tv)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^{a+b}|v_1|^a|v_2|^b}{t^2\cdot v_1^2+t^4\cdot v_2^4}}{t}=\lim_{t\to 0} t^{a+b-3}\frac{|v_1|^a\cdot|v_2|^b}{v_1^2+t^2\cdot v_2^4}\qquad (v_1\neq 0)\quad a+b-3>0$$

$a+b-3>0$

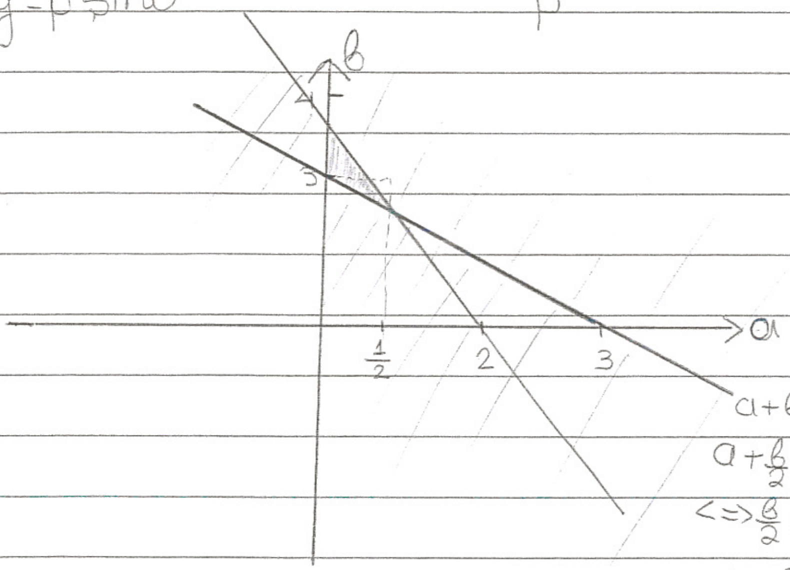
Πότε η g δεν είναι συνεχής;

$x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\theta$

$$\frac{\rho^a|\cos\theta|^a\,\rho^{b/2}|\sin\theta|^{b/2}}{\rho^2}=\rho^{a+\frac{b}{2}-2}|\cos\theta|^a|\sin\theta|^{b/2}$$

$$\begin{pmatrix} a+\frac{b}{2}-2\leq 0\\ a+b-3>0\end{pmatrix}$$



$a+3/2-2=0$

$\Leftrightarrow a=2-3/2$

$\Leftrightarrow a=1/2$

$a+b-3=0$

$a+\frac{b}{2}-2=0$

$\Leftrightarrow \frac{b}{2}=2-a$

$\Leftrightarrow b=4-2a$

Παραγωγίσεις ανώτερης τάξης:

$z=f(x,y)$

$\partial f/\partial x(x_0)$, $\partial f/\partial y\,(x_0)$

f παραγωγίσιμη στο x_0

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\quad - \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right)$$

Θεώρημα: Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ώστε 2 φορές συνεχής παραγωγίσιμη (υπάρχουν όλες οι παράγωγοι 2ης τάξης και να είναι συνεχής συνάρτηση η καθεμία). Τότε: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

Τρίτη 15-05-18

Επανάληψη από
το προηγούμενο μάθημα

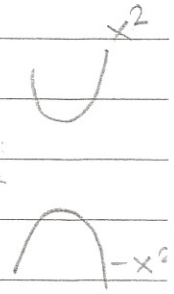
1▸ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g(x)=c$ Πιθανά τοπικά ακρότατα $(\nabla g(x) \neq 0)$ $\left[\begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = c \end{array}\right]$

2▸ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τοπικά ακρότατα

Για την εύρεση πιθανών τοπικών ακροτάτων: $\nabla f(x) = 0$

Αναγνώριση: 2▸ $D^2 f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$ Θυμάμαι:



- x_0 τοπικό ελάχιστο

$D^2 f(x_0) > 0$ κύριες ορίζουσες (θετικές) $++++$

- x_0 τοπικό μέγιστο $D^2 f(x_0) < 0$

$-+-+\ldots$

1▸ (Κάτω από δέσμευση)

3x3

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -g_{x_1} & \cdots & -g_{x_n} \\ -g_1 & h_{x_1x_1} & \cdots & h_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -g_{x_n} & h_{x_nx_1} & \cdots & h_{x_nx_n} \end{pmatrix}$

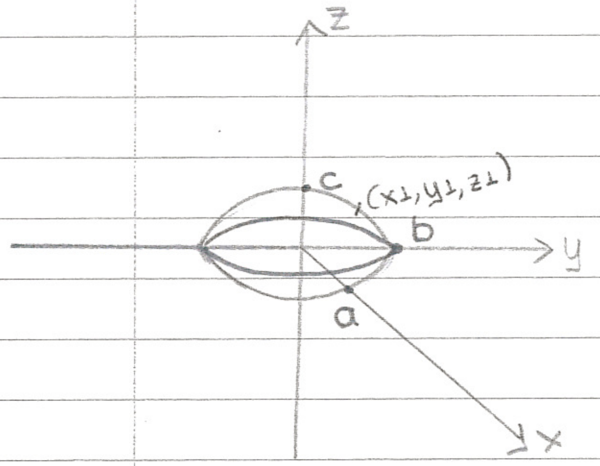
→ Ισχύει ότι 2▸ (αλλά το αντίθετο)

Πότε x_0 είναι τοπικό ελάχιστο; $---\ldots$ (πρέπει να είναι αρνητικές)

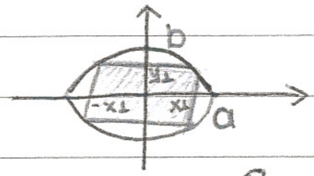
Πότε x_0 είναι τοπικό μέγιστο; $+-+\ldots$

Άσκηση: Βρείτε τον όγκο του μεγαλύτερου παραλληλεπιπέδου που εγγράφεται στο ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a,b,c > 0)$$



Υποπρόβλημα:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$E=4x_1y_1$$ (x_1,y_1 στοιχεία στην έλλειψη)

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

Αν (x_1,y_1,z_1) τότε $(\pm x_1,\pm y_1,\pm z_1)$

Θα έχουμε, λοιπόν ότι ο όγκος θα είναι:

$$V=8x_1y_1z_1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1$$

Απάντηση άσκησης: Η επιφάνεια του ελλειψοειδούς είναι κλειστό και φραγμένο.

η $f(x,y,z)=8xyz$

είναι συνεχής (πολυώνυμο) και άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Αν $x_0=(x,y,z)$ είναι κρίσιμο σημείο, τότε

$$\nabla g(x,y,z)=2\left(x/a^2,\ y/b^2,\ z/c^2\right)$$

Έχουμε $\nabla g(x,y,z)\neq 0$, γιατί αν $\nabla g(x,y,z)=0 \iff x=y=z=0$ όμως το $(0,0,0)$ δεν είναι σημείο του ελλειψοειδούς.

Ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος πολλαπλασιαστών Lagrange, οπότε $\exists \lambda\in\mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$$

$$g(x,y,z)=1$$

$$8yz=\lambda\frac{2x}{a^2}$$

$$8xz=\lambda\frac{2y}{b^2} \iff$$

$$8xy=\lambda\frac{2z}{c^2}$$

Αν $\lambda=0 \Rightarrow x=y=0$, $\frac{z^2}{c^2}=1$

$f(0,0,z)=0$

$(0,0,\pm c)$

$(0,\pm b,0)$

$(\pm a,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ y/x = \dfrac{x/a^2}{y/b^2} \\ z/y = \dfrac{y/b^2}{z/a} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\ 8yz=\lambda\frac{2x}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ \left(\frac{z}{y}\right)^2=\left(\frac{c}{b}\right)^2 \\ 4yz=\lambda\, x/a^2 \\ x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a} \\ \frac{z}{y}=\pm\frac{c}{b} \\ 4y^2=\lambda\, x/a^2 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

• $y=\pm b/a \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm a/b\, y \\ z=\pm c/b\, y \\ 4yz=\lambda\, x/a^2 \\ \frac{(a/b\, y)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(\frac{c}{b}y)^2}{c^2}=1 \\ 4yz=\lambda\, x/a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(1/b^2+1/b^2+1/b^2)= \\ 3y^2=b^2 \Leftrightarrow \\ y=\pm b/\sqrt{3} \end{cases}$

$y=\pm b/\sqrt{3}$, $z=\pm c/\sqrt{3}$
$x=\pm a/\sqrt{3}$

$f(x_0,y_0,z_0)=\pm\ 8\dfrac{abc}{(\sqrt{3})^3} \Longrightarrow -\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}} \le f(x,y,z) \le \dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$

Θ - Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$F(x,y)=0$

Έστω (x_0,y_0) σημείο της καμπύλης $F(x_0,y_0)=0$

Έστω $F\in C^1$, $\nabla F(x_0,y_0)\neq(0,0)$

και έστω $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, τότε $\exists^{\delta>0}\ y\in C^1(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ώστε

$F(x,y(x))=0$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$y(x_0)=y_0$ (κοντά στο x_0,y_0 ορίζεται μονοσήμαντα) με παραγώγιση, της σχέσης, παίρνουμε

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0$$

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) y'(x) = 0$$

Θεώρημα (Peano)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \exists \delta > 0$ (τοπικά) $y \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ που λύνει την ΔΕ

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

$$y'(x_0) = y_0$$

$$F(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) = 0$$

$$\Rightarrow F(x, y(x)) = F(x_0, y(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$$

Έστω:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

και (X_0, Y_0) σημείο που λύνει το σύστημα

$\| \quad (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$

$$f_1(X_0, Y_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(X_0, Y_0) = 0$$

Ερώτημα: Κάτω από τι υποθέσεις, $\exists\, y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n)$

$y_2 = y_2(x_1, \ldots, x_n) \quad |x - x_0| < \delta$

ώστε $f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), y_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$

$y_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0 = y_m(x_1, \ldots, x_n)$

$y_i(x_0) = y_i^0$?

$\Rightarrow f_{1,x_1}(\quad) + f_{1,y_1}\; y_{1,x_1} + \ldots + f_{1,y_m}\; y_{m,x_1} = 0$

$f_{2,x_2}(\quad) + f_{2,y_1}\; y_{1,x} + \ldots + f_{1,y_m}\; y_{m,x_1} = 0$

$\vdots$

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)} = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}\right| \neq 0$$

Άσκηση: Εξετάστε την επιλυσιμότητα του συστήματος:

$f_1(x,y,z,w,u,v) = 3x+2y+z^2+u+v^2=0$

$f_2(x,y,z,u,v,w) = 4x+3y+z+u^2+v+w+2=0$

$f_3(x,y,z,u,v,w) = x+z+w+u^2+z=0$

ως προς u,v,w συναρτήσει των x,y,z κοντά στο σημείο $x=y=z=0$, $u=v=0$, $w=-2$

$$\left(\exists \quad \begin{matrix} \exists\, \delta>0 & \\ u=u(x,y,z) & x^2+y^2+z^2<\delta^2 \\ v=v(x,y,z) & u(0,0,0)=0 \\ w=w(x,y,z) & v(0,0,0)=0 \\ & w(0,0,0)=-2 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{aligned} &3x+2y+z^2+u(x,y,z)+v^2(x,y,z)=0 \\ &4x+3y+z+u^2(x,y,z)+v(x,y,z)+z=0 \qquad x^2+y^2+z^2<\delta^2 \\ &x+z+w(x,y,z)+u^2(x,y,z)+2=0 \end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2u & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 2u & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2u & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$