ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 10 Ιανουαρίου 2024

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τελική Εξέταση

Θέμα 1. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= ty^2(t) + t^2 + 1, \quad t > 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.
β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων στο διάστημα ύπαρξης των λύσεων.
γ) Αποδείξτε πως η λύση δεν ορίζεται σε όλο το διάστημα $[0, +\infty)$.

Θέμα 2. α) Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

και στη συνέχεια να γίνει ένα πρόχειρο διάγραμμα φάσεων.

β) Να γίνει ένα πρόχειρο διάγραμμα φάσεων των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x'(t) &= (4x(t) - 3y(t))(1 + x^2(t) + y^2(t)), \quad t \in \mathbf{R}, \\ y'(t) &= (6x(t) - 5y(t))(1 + x^2(t) + y^2(t)), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Θέμα 3. Έστω $\sigma : [0, 1) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Εαν επιπρόσθετα ισχύει:

$$\sigma'(t) \leq \frac{6t}{1 - t^2}\, \sigma(t) + \sigma^{\frac{2}{3}}(t), \quad 0 < t < 1,$$
$$\sigma(0) = 0,$$

να αποδείξτε ότι

$$\sigma(t) \leq (1 - t^2)^{-3} \left(\frac{t}{3} - \frac{t^3}{9} \right)^3, \quad 0 \leq t < 1.$$

Θέμα 4. Έστω $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ πίνακας τέτοιος ώστε ο A^2 που έχει ακριβώς μια πραγματική ιδιοτιμή την 1. Βρείτε τη λύση και το μεγιστικό διάστημα ύπαρξης της λύσης $X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} X'(t) &= -AX^2(t), \\ X(0) &= A. \end{aligned}$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.

Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας **διατυπώνοντας τα θεωρήματα που κάνετε χρήση**.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>