ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 15 Ιουνίου 2021
Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Θέμα 1. Προσδιορίστε με απόδειξη όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 f(t)\phi(t)\,dt \;=\; 0, \;\; \phi \in \mathcal{A},$$

όπου

$$\mathcal{A} = \{\phi \in \mathbf{C}[0,1], \mid \int_0^1 \phi(x)\,dx = 0, \;\; \int_0^1 x\phi(x)\,dx = 0\}.$$

Θέμα 2. Βρείτε αρχικά τους πιθανούς ελαχιστοποιητές του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0,1], \mid u(0) = 0, \;\; u(1) = 1, \}$$

και τη δέσμευση

$$G(u) = \int_0^1 u(x)dx = \frac{2}{3}.$$

Στη συνέχεια προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή και αποδείξτε ότι είναι η ελάχιστη τιμή.

Θέμα 3. Για $\alpha > 0$ θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς

$$J(u) = \int_0^1 (u(x))^2(\alpha - u'(x))^2\,dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0,1] \mid u(0) = 0, \;\; u(1) = 1 \}.$$

α) Εαν $\alpha = 1$, αποδείξτε ότι το πρόβλημα έχει ελαχιστοποιητή τον οποίο και να βρείτε.

β) Εαν $1 < \alpha$, αποδείξτε ότι το πρόβλημα δεν έχει ελαχιστοποιητή.

γ) Εαν $1 < \alpha$, αποδείξτε ότι το πρόβλημα έχει ελαχιστοποιητή $\bar{u} \in \mathcal{B}$, με

$$\mathcal{B} = \{u \in \bar{C}^1[0,1], \mid u(0) = 0, \;\; u(1) = 1.\}$$

δ) Εαν $0 < \alpha < 1$, έχει το πρόβλημα ελαχιστοποιητή $\bar{u} \in \mathcal{B}$?

$$\bar{C}^1 := \quad \text{κατά τμήματα } C^1 \text{ συναρτήσεις}$$

Θέμα 4. Για $\alpha > 0$ θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$I_\alpha[u] = \int_0^1 (1-x)^\alpha (u'(x))^4 \, dx,$$

με συναρτήσεις ελέγχου

$$\mathcal{A} = \{ u \in \mathbf{C}[0,1] \cap \mathbf{C}^1(0,1) \mid u(0) = 0, \;\; u(1) = 1 \}.$$

Να αποδείξτε ότι:

α) Εάν $0 < \alpha < 3$, τότε

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} I_\alpha[u] > 0,$$

και υπάρχει ελαχιστοποιητής στο $\mathcal{A}$, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $w \in \mathcal{A}$ ώστε

$$I_\alpha[w] = \inf_{u \in \mathcal{A}} I_\alpha[u].$$

β) Εάν $\alpha > 3$, τότε

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} I_\alpha[u] = 0,$$

και δεν υπάρχει ελαχιστοποιητής στο $\mathcal{A}$, δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση $w \in \mathcal{A}$ ώστε

$$I_\alpha[w] = \inf_{u \in \mathcal{A}} I_\alpha[u].$$

Να λυθούν όλα τα θέματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!