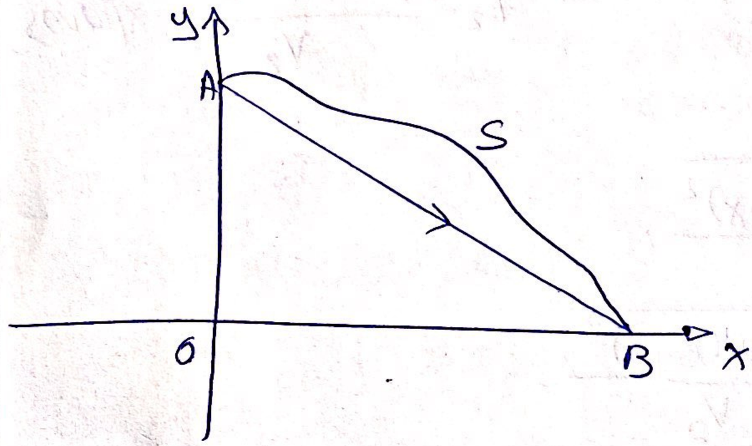
# Λογισμός Μεταβολών 08/02/2021.

## Το βασικό πρόβλημα:

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Πρόβλημα: (Εύρεση γεωδησιακή μεταξύ δύο σημείων)

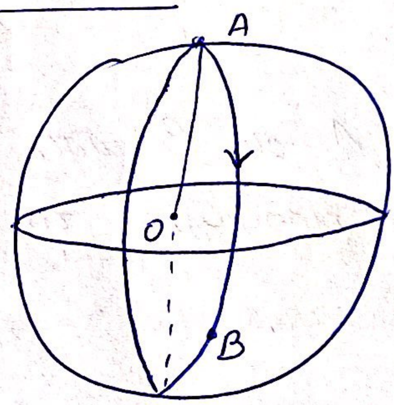
Έστω $A, B$ δύο σημεία του επιπέδου, να βρεθεί η διαδρομή που πρέπει κάποιος να ακολουθήσει από το $A$, στο σημείο $B$ ώστε το διάστημα που θα διανύσει να είναι το ελάχιστο δυνατό.




$A(0,\alpha)$
$B(\beta,0)$

Απάντηση:
Η ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία $A$, $B$.

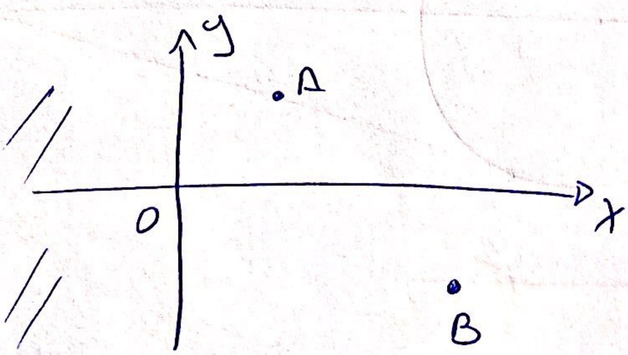
Πρόβλημα (Ίδιο αλλά $A, B \in R^3$)




Πρόβλημα: Έχουμε δύο σημεία στο επίπεδο.

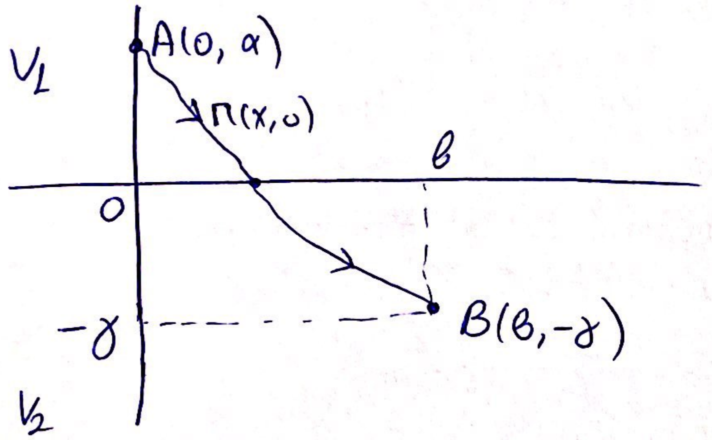
Αέρας $V_1$

$V_2$ Νερό




Απάντηση:
Πρέπει να κινηθούμε ακριβώς κατά μήκος του μεσημβρινού.

Να βρεθεί η διαδρομή από A στο B ώστε ο χρόνος κίνησης να είναι ο ελάχιστος δυνατός:




$A \to \Gamma$ απαιτείται:

$$t_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{V_1} \text{ χρόνος}$$

$\Gamma \to B$ απαιτείται:

$$t_2 = \frac{\sqrt{(\beta - x)^2 + \gamma^2}}{V_2} \text{ χρόνος.}$$

Συνολικός χρόνος:

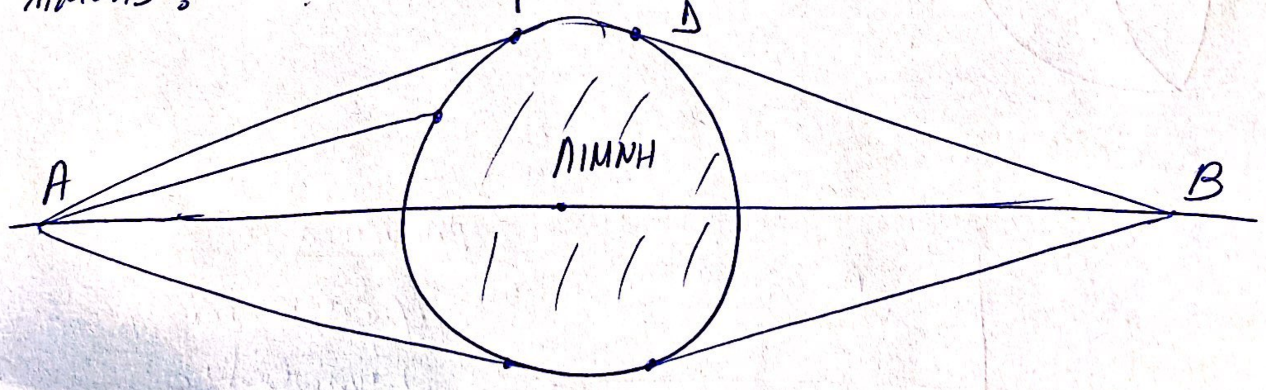
$$t_{ol} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{\gamma^2 + (\beta - x)^2}}{V_2}$$

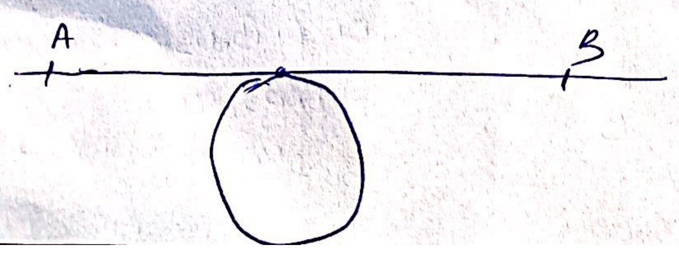
$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{\gamma^2 + (\beta - x)^2}}{V_2}$$

Το ζητούμενο ελαχιστοποιεί την $f(x)$, $x \in [0, \beta]$

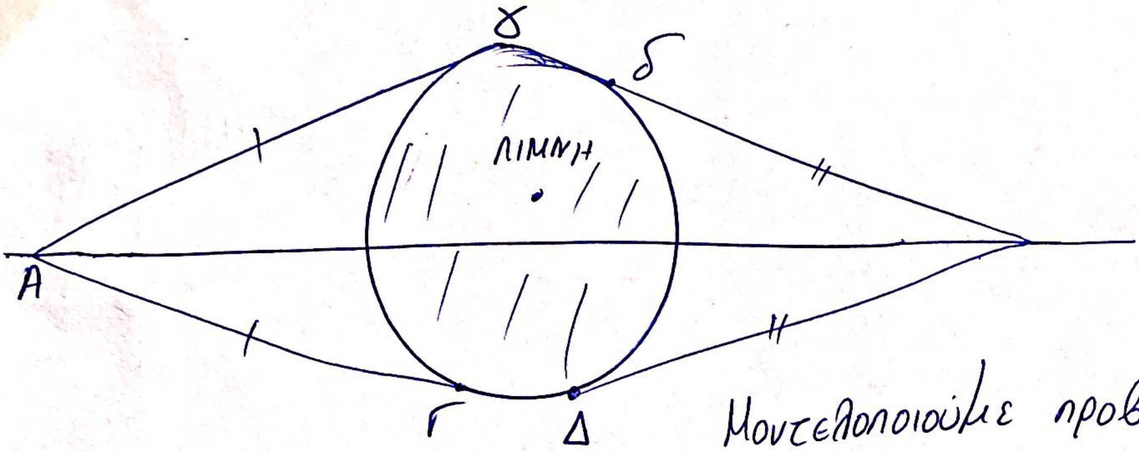
$\boxed{\text{Πρόβλημα}}$

Τι διαδρομή θα ακολουθήσουμε από το A στο B ώστε να διανύσουμε το μικρότερο δυνατό μήκος αποφυγής της λίμνης?



# ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ο




Μοντελοποιούμε προβλήματα ελαχιστοποίησης και στη συνέχεια τα ελαχιστοποιούμε.

$A \quad , \quad B$

$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\sigma(0) = A$ | $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$\sigma(1) = B$

Το μήκος καμπύλης? $L = \int_0^1 |\sigma'(t)|\,dt$

## ΕΡΩΤΗΜΑ

Να βρεθεί η $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ ώστε

$\sigma(0) = A \quad , \quad \sigma(1) = B$

και να ελαχιστοποιείται το μήκος $L(\sigma) = \int_0^1 |\sigma'(t)|\,dt$.

Ελαχιστοποιούμε το $L(\sigma)$.

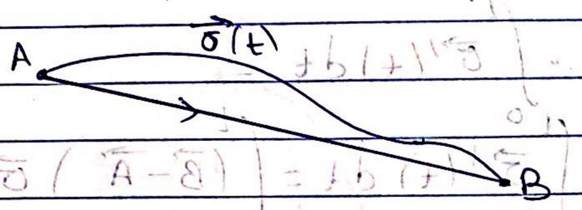
10/02/2021

# ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Ποια είναι τα προβλήματα του μαθήματος;

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ο (ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ)**

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^3$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε την καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία (από το A στο B) και ελαχιστοποιεί το μήκος της καμπύλης (διαδρομή).




Ερωτ.: Γιατί είναι η ευθεία η ελάχιστη καμπύλη;

Απάντηση

Έστω $\vec{\sigma}: [0,1] \to \mathbb{R}^3$ τ.ω. $\vec{\sigma}(0) = A$ και $\vec{\sigma}(1) = B$ (και είναι ομαλή καμπύλη).

Το μήκος της καμπύλης είναι τότε $L = \int_0^1 |\sigma'(t)|\, dt$

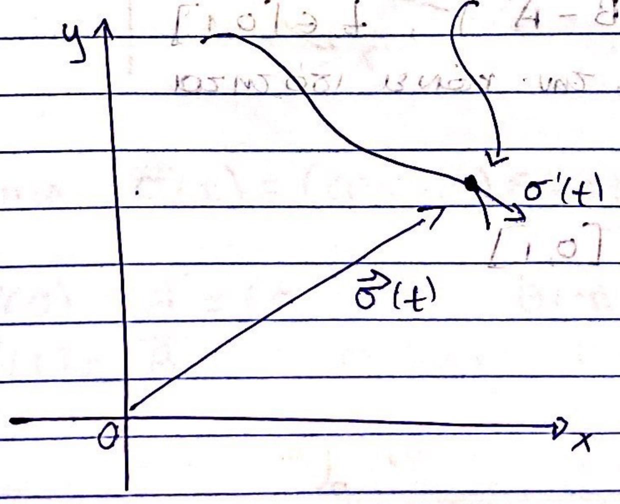
(Αν $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ τότε $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$)

Άρα $L(\vec{\sigma}) = \int_0^1 |\sigma'(t)|\, dt$

Γιατί η ευθεία δίνει την μικ

$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [0,1]$

τότε $\vec{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$




Αυτό που μπορούμε να υπολογίσουμε είναι το

$\int_0^1 \vec{\sigma}'(t)\, dt = \int_0^1 (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt$

το οποίο για να έχει έννοια θα πρέπει οι παράγωγοι να είναι συνεχείς συναρτήσεις

$$= \left( \int_0^1 x'(t)\,dt,\ \int_0^1 y'(t)\,dt,\ \int_0^1 z'(t)\,dt \right) =$$

$$= \left( x(1) - x(0),\ y(1) - y(0),\ z(1) - z(0) \right) =$$

$$= \left( x(1), y(1), z(1) \right) - \left( x(0), y(0), z(0) \right)$$

$$= \vec{\sigma}(1) - \vec{\sigma}(0) = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\Rightarrow |\vec{B} - \vec{A}|^2 = \left| \int_0^1 \vec{\sigma}'(t)\,dt \right|^2 = \quad \left( |\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} \right)$$

$$= \int_0^1 \vec{\sigma}'(t)\,dt \cdot \int_0^1 \vec{\sigma}'(t)\,dt =$$

$$= (\vec{B} - \vec{A}) \int_0^1 \vec{\sigma}'(t)\,dt = \int_0^1 (\vec{B} - \vec{A})\, \vec{\sigma}'(t)\,dt$$

Άρα,

$$|\vec{B} - \vec{A}|^2 = \int_0^1 (\vec{B} - \vec{A})\, \vec{\sigma}'(t)\,dt \leq \int_0^1 |\vec{B} - \vec{A}|\,|\vec{\sigma}'(t)|\,dt$$

αφού $\underset{\underset{|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})}{\parallel}}{\vec{u}\cdot\vec{v}} \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$, με $A \neq B$ $\quad = |\vec{B} - \vec{A}| \int_0^1 |\vec{\sigma}'(t)|\,dt$

$$\Rightarrow |\vec{B} - \vec{A}| \leq \int_0^1 |\vec{\sigma}'(t)|\,dt$$

Η ισότητα ισχύει αν $\vec{\sigma}'(t)$ παράλληλο του $\vec{B} - \vec{A}$

Μάλιστα,

Η καμπύλη $\vec{\sigma}_0(t) = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$, $t \in [0,1]$ ελαχιστοποιεί την ανισότητα, την κάνει ισότητα.

$$L(\vec{\sigma}) \geq L(\vec{\sigma}_0(t))$$

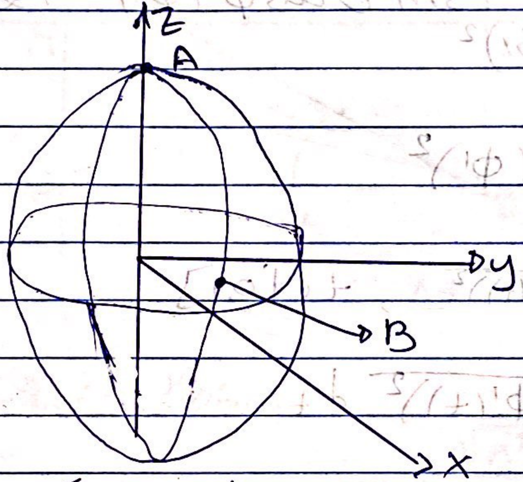
$$\vec{\sigma}_0(t) = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A}), \quad t \in [0,1]$$

Πρόβλημα 2ο (ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ)

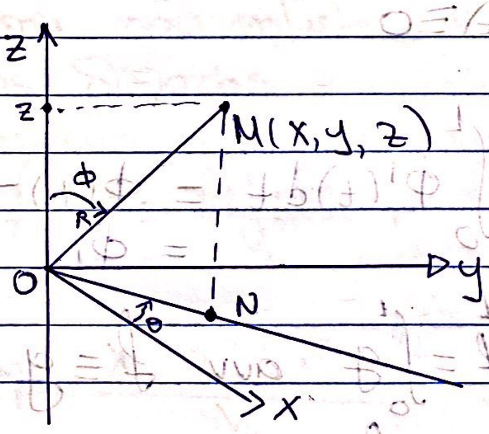
Να βρούμε την καμπύλη ελάχιστης διαδρομής μεταξύ δύο σημείων $\vec{A}, \vec{B} \in R^3$, όπου τα σημεία $\vec{A}, \vec{B}$ σημεία της μοναδιαίας σφαίρας $|\vec{A}| = |\vec{B}| = 1$

Με περιορισμό κίνηση πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

Θεωρούμε ότι $\vec{A} = (0,0,1)$ κ' $\vec{B} = (0,0,z_0)$




Σφαιρικές Συντεταγμένες




$0 \leq \phi \leq \pi$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= R\cos\phi \\ x &= R\sin\phi\cos\theta \\ y &= R\sin\phi\sin\theta \end{aligned}}$$

$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Έστω $\vec{\sigma}(t) = (\cos\theta(t)\sin\phi(t), \sin\theta(t)\sin\phi(t), \cos\phi(t))$, $t \in [0,1]$

$\vec{\sigma}(0) = \vec{A} = (0,0,1)$, $\theta(0) = 0$, $\phi(0) = 0$

$\vec{\sigma}(1) = \vec{B} = (x_0, 0, z_0)$, $\theta(1) = 0$, $\phi(1) = \phi_1 \in [0, \pi]$

Άρα, $L(\vec{\sigma}) = \int_0^1 |\vec{\sigma}'(t)|\,dt$

τότε $\vec{\sigma}'(t) = (-\sin\theta(t)\sin\phi\ \theta'(t) + \cos\theta(t)\cos\phi(t)\phi'(t),$
$\cos\theta(t)\sin\phi(t)\theta'(t) + \sin\theta(t)\cos\phi(t)\phi'(t), -\sin\phi(t)\phi'(t)$

Οπότε,

$$|\vec{\sigma}'(t)|^2 = (-\sin\theta\sin\phi\ \theta' + \cos\theta\cos\phi\ \phi')^2 + (\cos\theta\sin\phi\theta' + \sin\theta\cos\phi\ \phi')^2 + (-\sin\phi\ \phi')^2$$

$$= \sin^2\theta\sin^2\phi\ (\theta')^2 + \cos^2\theta\cos^2\phi(\phi')^2 - 2\ldots + \cos^2\theta\sin^2\phi(\theta')^2 + \sin^2\theta\cos^2\phi\ (\phi')^2 + 2\ldots + \sin^2\phi\ (\phi')^2$$

$$= \sin^2\phi\ (\theta')^2 + (\phi')^2$$

$$|\vec{\sigma}'(t)| = \sqrt{\sin^2\phi(t)\,(\theta'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\ ,\ t\in[0,1]$$

$$L(\vec{\sigma}) = \int_0^1 \sqrt{\sin^2\phi(t)(\theta'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt$$

Το ζητούμενο είναι να ελαχιστοποιήσουμε αυτή την καμπύλη.
Η ελαχιστοποίηση γίνεται με $\theta'(t) \equiv 0$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta(0) = 0$$

και τότε

$$\geq \int_0^1 |\phi'(t)|\, dt \geq \int_0^1 \phi'(t)\, dt = \phi(1) - \phi(0) = \phi_1$$

Άσκηση:
Αν $f, g$ συνεχείς και $f \geq g$ τότε $\int_0 f = \int_0 g$ ανν $f \equiv g$

$$\int_0^1 f(t)\,dt \geq \int_0^1 g(t)\,dt \Rightarrow h(t) = f(t) - g(t)$$

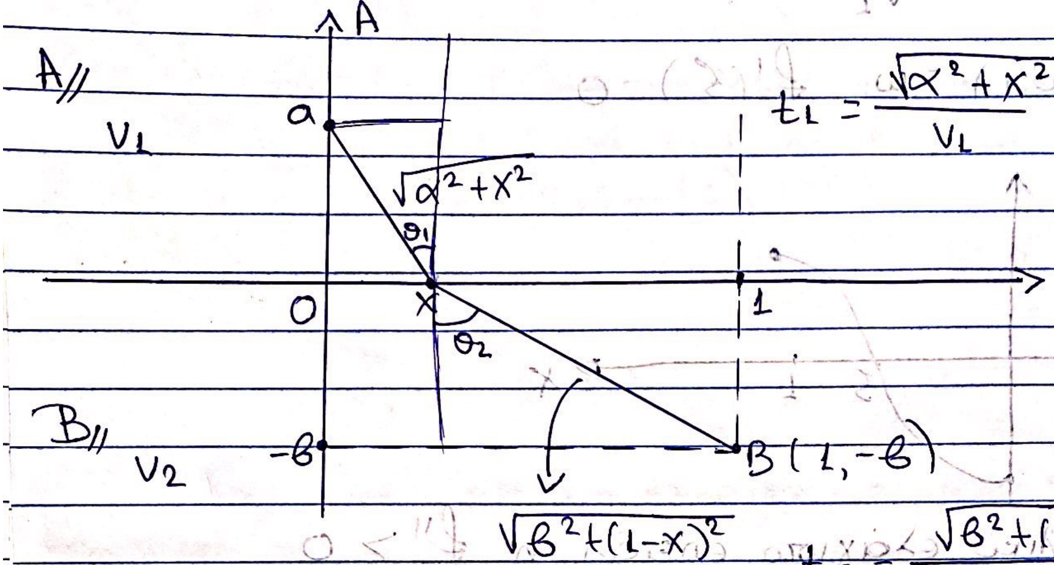
και θέλω τότε $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt$

$$\Rightarrow h \geq 0 \iff \int_0^1 h(t)\,dt = 0$$

Αν η $h$ είναι συνεχής $\Big\}\Rightarrow h \equiv 0$

# Πρόβλημα 3ο (Ελάχιστης Διαδρομής)

Να βρούμε διαδρομή ελάχιστου χρόνου μεταξύ δύο σημείων του επιπέδου με διαφορετικό μέσο. Ειδικότερα:




$$t_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{\beta^2+(1-x)^2}}{v_2}$$

Άρα, συνολικός χρόνος

$$t_{ολ} = \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2+(1-x)^2}}{v_2}$$

Εύρεση του σημείου $x$ ώστε ο χρόνος να είναι ο μικρότερος δυνατός.

Ζητούμενο, η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2+(1-x)^2}}{v_2}, \quad x \in [0,1]$$

$$f'(x) = \frac{x(a^2+x^2)^{-1/2}}{v_1} - \frac{(1-x)(\beta^2+(1-x)^2)^{-1/2}}{v_2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{v_1}(a^2+x^2)^{-1/2} - \frac{x^2(\alpha^2+x^2)^{-3/2}}{v_1} + \frac{(\beta^2+(1-x)^2)^{-1/2}}{v_2} - \frac{(1-x)^2(\beta^2+(1-x)^2)^{-3/2}}{v_2}$$

$$= \frac{(\alpha^2+x^2)^{-3/2}}{v_1}(\alpha^2+x^2-x^2) + \frac{(\beta^2+(1-x)^2)^{-3/2}}{v_2}\cdot\left[\beta^2\cancel{+(1-x)^2}\cancel{-(1-x)^2}\right]$$

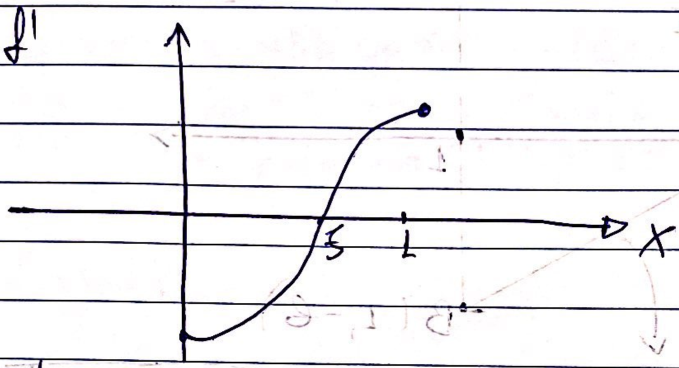
$$> 0 \Rightarrow f \text{ κυρτή}$$

$\Rightarrow f' \uparrow$ με $f'(0) = -\dfrac{(\beta^2+1)^{-1/2}}{V_2} < 0$

$f'(1) = \dfrac{(\alpha^2+1)^{-1/2}}{V_1} > 0$

$\Rightarrow \exists!$ ακριβώς 1 $\xi \in (0,1)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$

Σχεδιάζω την $f'$




Στο $\xi$ έχουμε ολικό ελάχιστο επειδή η $f'' > 0$.

Μάλιστα

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi}{V_1}(\alpha^2+\xi^2)^{-1/2} - \frac{(1-\xi)(\beta^2+(1-\xi)^2)^{-1/2}}{V_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi}{(\alpha^2+\xi^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{V_1} = \frac{1-\xi}{(\beta^2+(1-\xi)^2)^{1/2}} \frac{1}{V_2}$$

Αυτό μας λέει ότι

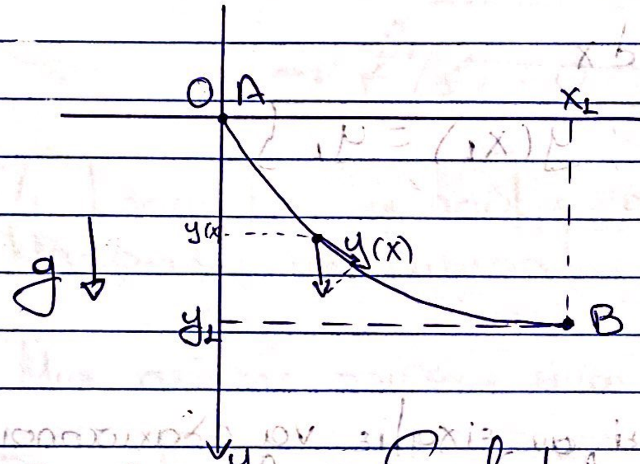
$$\sin\theta_1 \frac{1}{V_1} = \sin\theta_2 \frac{1}{V_2}$$

$\Rightarrow \sin\theta_1 \cdot n_1 = \sin\theta_2 \, n_2 \Rightarrow$ Νόμος Snell.

# ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ 15/02/2021

## Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΒΡΑΧΥΣΤΟΧΡΟΝΟΥ

Έχουμε ένα σώμα στο σημείο Α και επιλέγουμε ένα δεύτερο σημείο Β. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει το σώμα από το Α στο Β ώστε αυτό να συμβεί στο ελάχιστο δυνατό χρόνο, κάτω από την επίδραση της βαρύτητας.




Αφού δεν έχουμε τριβές έχουμε διατήρηση ενέργειας. Άρα:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\,y(x)$$

$$\Leftrightarrow v=\sqrt{2g\,y(x)}$$

Γνωρίζουμε ότι $v=\frac{ds}{dt} \Rightarrow dt=\frac{ds}{v}$

$$\Rightarrow \int dt = \int \frac{ds}{v}$$

↳ Αν θέλω να μετρήσω τον συνολικό χρόνο που κάνει.

$$\Rightarrow S(x)=\int_0^x \sqrt{1+(y(x))^2}\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$ds=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

Στην περίπτωση με $T=\int_0^{x_1}\frac{ds}{v}$

$$=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}}\,dx$$

Το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου είναι πρόβλημα εύρεσης της $y:[0,x_1]\to[0,\infty)$, $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$ και που ελαχιστοποιεί την ποσότητα: $J(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{y(x)}}\,dx$

Εύρεση του $\overset{\text{ελαχίστου}}{\min_{y\in A}} J(y) = \min_{y\in A} \int_{0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y(x)}}\,dx$

του συναρτησοειδούς J με συνάρτηση ελέγχου.

$y \in A = \{y \in C^1[0,x_1] \mid \mu\varepsilon\ y(0)=0,\ y(x_1)=y_1\}$

Αφήνουμε το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου.
Επιλέγουμε κάτι ευκολότερο
Ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$I[y] = \frac{1}{2}\int_0^{x_1} (y'(x))^2\,dx$$

$y \in A = \{y \in C^1[0,x_1] \mid y(0)=0,\ y(x_1)=y_1\}$

Να βρούμε το $\min_{y\in A} I[y]$

• Που είναι η βασική δυσκολία;
Κάποιος μπορεί να ανταποκριθεί αν είχαμε να ελαχιστοποιήσουμε κάποια συνάρτηση $(\min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x))$. Αν η $f \in C[\alpha,b]$ $\Rightarrow \exists\ \xi \in [\alpha,b]$

• Πως θα βρίσκαμε το $\xi$? $\min_{x\in[\alpha,b]} f(x) = f(\xi)$
Αν επιπρόσθετα η $f$ παραγωγίσιμη, βρίσκουμε αρχικά τα (πιθανά) κρίσιμα σημεία. Δηλ. τα σημεία όπου $f'(x)=0,\ x\in(\alpha,b)$
Τότε,

$$\min_{x\in[\alpha,b]} f(x) = \min\left(f(\alpha), f(\beta), \min_{\xi\in B} f(\xi)\right)$$

• Γιατί προσανατολιζόμαστε στα κρίσιμα σημεία; $\leftarrow$ συνεχής, παράγωγος στο $(\alpha,\beta)$

Θ. Fermat: Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ και το $\xi\in(\alpha,b)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου, τότε $f'(\xi)=0$.

Με $\varepsilon>0\ \forall\ x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ : $f(\xi)\le f(x)$

Αν $\xi+\varepsilon > x > \xi$ : κ' $x-\xi>0$ $\Leftrightarrow f(x)-f(\xi)\geq 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$$

Αρχικά $f'(\xi) \geq 0$

Επίσης αν $\xi - \varepsilon < x < \xi \Rightarrow x - \xi < 0$

$$f(x) - f(\xi) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(\xi) \leq 0}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0$$

⇒ Τι μπορούμε να πούμε αν $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Μπορούμε να μιλήσουμε για ελάχιστη τιμή της $f$?

Μια συνήθης συνθήκη είναι αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

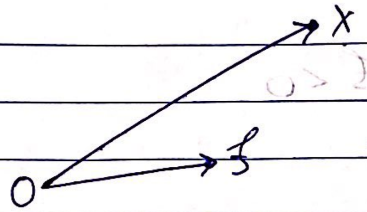
Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; (δηλαδή συνάρτηση όπως την θέλουμε)
Έστω επιπρόσθετα ότι $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$, τότε η $f$ παίρνει ελάχιστη τιμή.
Πόσα είναι τα πιθανά τοπικά ελάχιστα? (ακρότατα?)

Για τα πιθανά τοπικά ακρότατα βρίσκουμε:

$$\nabla f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) = 0 \\ f_{x_2}(\xi) = 0 \\ \vdots \\ f_{x_n}(\xi) = 0 \end{cases}$$

Γιατί;

**Βάση:** $f(x) \geq f(\xi)$, $(|x - \xi| < \rho)$




Επιλέγω: $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{n}| = 1$

$\Rightarrow x = \xi + t\vec{n}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(\xi + tn) \geq f(\xi)$

$\xi, n$

Τότε $g(t) = f(\xi + tn)$, $t \in \mathbb{R}$

$g(t) \geq g(0)$

$\Rightarrow g'(0) = 0$

$g'(t) = \nabla f(\xi + tn) \cdot n$ εσωτερικό γινόμενο.

$\Rightarrow g'(0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\xi) \cdot n = 0$, $\forall n : |\vec{n}| = 0$

Άρα $\Rightarrow \nabla f(\xi) = 0$.

Γιατί αν $\nabla f(\xi) \neq 0 \Rightarrow \vec{n} = \dfrac{\nabla f(\xi)}{|\nabla f(\xi)|}$

Τότε προκύπτει ότι $\nabla f(\xi) \dfrac{\nabla f(\xi)}{|\nabla f(n)|} = 0$

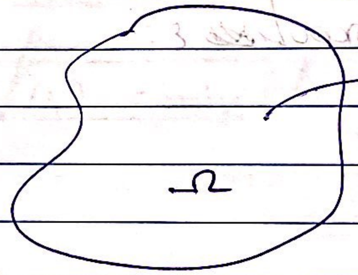
$$\frac{|\nabla f(\xi)|^2}{|\nabla f(\xi)|} = 0 \Leftrightarrow |\nabla f(\xi)| = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\xi) = 0$$

ΑΝΤΙΦΑΣΗ

Γιατί είπαμε πως η κλίση δεν είναι μηδέν. //

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε το χωρίο: Ω:



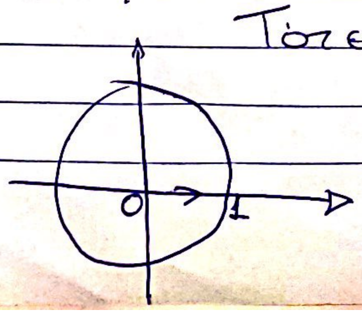

$\to x^2 + y^2 \leq 1$

$$\min_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) = ;$$

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: → πιθανά $\xi$ τοπικά ακρότατα $\Rightarrow \nabla f(\xi) = 0$
→ Σημεία του συνόρου

Τι μπορούμε να πάρουμε αν $|\xi| = 1$;

Τότε $f(x) \geq f(\xi)$.




Γιατί;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \leq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

Πάμε πίσω στο πρόβλημα μας.

$$\min_{y\in A} J(y) = ;$$

$$J(y) = \int_0^1 (y'(x))^2\,dx$$

$y \in A = \{ y \in C^1[0,1] \mid y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta \}$ ;

Έστω ότι $\omega \in A$ που ελαχιστοποιεί το πρόβλημα, δηλ.

$$J(y) = \int_0^1 (y'(x))^2 \geq \int_0^1 (\omega'(x))^2\,dx = J(\omega)$$

$$\forall\, y \in A = \{ y \in C^1[0,1] \mid y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta \}$$

Πως θα βρούμε τα πιθανά $\omega$?

Θα θέλαμε να πάρουμε $y$ τ.ω. $y(x) = \omega(x) + \overset{\in\mathbb{R}}{t}\,\phi(x)$

Έστω $\phi \not\equiv 0$, $\phi \in C^1[0,1]$

Η $y$ θέλω $\in A$, $\omega \in A = \{ \omega \in C^1[0,1] \mid \omega(0)=\alpha, \omega(1)=b \}$

με $y \in A = \{ y \in C^1[0,1] \mid y(0)=\alpha, y(1)=b \}$.

Για τα άκρα έχουμε:

$$y(0)=\alpha \Leftrightarrow \omega(0) + t\phi(0) = \alpha \Rightarrow \boxed{\phi(0)=0}$$

$$\Updownarrow$$

$$t\phi(0)=0$$

Παρόμοια $y(1)=b \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boxed{\phi(1)=0}$

$$\Rightarrow \underbrace{J(\omega+t\phi) \geq J(\omega)}_{f(t)\,\geq\, f(0)},\ \forall\, t\in\mathbb{R}$$

Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε θα πάρω $f'(0)=0$.

Ομοια, $f(t) = J(\omega+t\phi) = \int_0^1 (\omega'(x) + t\,\phi'(x))^2\,dx$

$$= \int_0^1 \left((\omega'(x))^2 + 2t\,\omega'(x)\cdot\phi'(x) + t^2(\phi'(x))^2\right)dx$$

$$f(t)=\int_0^1 (\omega'(x))^2 + 2t\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx + t^2\int_0^1 (\phi'(x))^2\,dx.$$

$\Rightarrow f$ παρ/ίμη (τριώνυμο ως προς $t$).

$\Rightarrow f'(0)=0.$

$$f'(t)=2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx + 2t\int_0^1 (\phi'(x))^2\,dx.$$

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow 2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx = 0$$

$\Rightarrow$ Τα αιθαναί $\omega\in A$ είναι εκείνα που ικανοποιούν:

$$\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx = 0$$

Καταλήξαμε, $\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx = 0$,

$\forall \phi\in C^1[0,1]$, κ' $\phi(0)=0=\phi(1)$

$\leadsto$ Εξίσωση Euler-Lagrange.

$\Rightarrow$ Τι συμπέρασμα βγάζουμε για το $\omega$?

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ 17/02/2021

$J(u) \geq J(\omega)$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\omega'(x))^2 dx$$

Έστω $\omega \in A = \{\omega \in C^1[0,1] \mid u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta\}$

$\forall \phi \in C^1[0,1]$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

$\Rightarrow$ Η $\omega$ ικανοποιεί $\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx = 0$ (*)

Τι μπορούμε να πούμε για την $\omega$ από την σχέση (*) ?

Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = 0$, $\forall \phi \in C[0,1]$ και $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

Τότε $f \equiv 0$ στο $[0,1]$.

Το ίδιο είναι το συμπέρασμα αν $\forall \phi \in C^1[0,1]$ κ' $\phi(0) = \phi(1) = 0$

(Οι συνοριακές συνθήκες παίζουν "κάποιο" ρόλο)

Αν για παράδειγμα γνωρίζαμε ότι η $f$ είναι τέτοια $f(0) = f(1) = 0$, τότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την $\phi = f$ και τότε θα παίρναμε ότι $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$

και $f^2(x) \geq 0 \xRightarrow{\text{f συνεχής}} f^2(x) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ στο $[0,1]$

## Απόδειξη

Απαγωγή σε άτοπο: Έστω $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0,1]$ τ.ω. $f(x_0) \neq 0$, έστω $f(x_0) > 0$.

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $|x - x_0| < \delta$, $x \in [0,1]$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

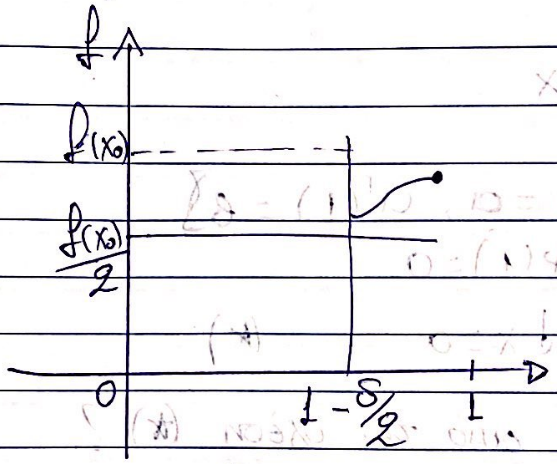
Για παράδειγμα $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{f(x_0)}{2} < f(x)} < \frac{3f(x_0)}{2}$$

Επομένως, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$, $|x-x_0| \leq \frac{\delta}{2}$, $x \in [0,1]$



$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = 0$$

$$\int_{1-\delta/2}^{1} f(x)\phi(x)dx = 0$$

$f(x)\phi(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $1-\frac{\delta}{4} < x < 1-\frac{\delta}{8}$

Άρα, $\int_{1-\delta/2}^{1} f(x)\phi(x)dx \geq \int_{1-\delta/4}^{1-\delta/8} \frac{f(x_0)}{4}dx = \frac{f(x_0)}{4}\frac{\delta}{8} > 0$.

ΑΝΤΙΦΑΣΗ γιατί τα ολοκληρώματα αυτά πρέπει πάντα να είναι ταυτοτικά μηδέν. $f \equiv 0$.

! Δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αν $\phi \in C^1[0,1]$, $\phi(0)=\phi(1)=0$

Έχουμε $\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = 0$, $\forall \phi$ που ικανοποιούν

Ισχυριζόμαι ότι, $\forall \phi \in C[0,1]$, με $\phi(0)=\phi(1)=0$ θα είχαμε επίσης $\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = 0$. Γιατί;

Η συνάρτηση $\phi \in C[0,1]$ συνεχής. Μπορώ να βρω $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^1[0,1]$ με $\phi_k(0)=\phi_k(1)=0$ και μάλιστα $\phi_k \to \phi$ συγκλ. ομοιόμ. στο $[0,1]$ ?

(ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ) Κάθε συνεχής συνάρτηση, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $\phi$.

$\Longrightarrow f\phi_k \longrightarrow f\phi$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$

Δηλ.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)\phi_k(x) - f(x)\phi(x)| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

Επειδή $f\phi_k \to f\phi$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f\phi_k(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)\,dx.$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 f(x)\phi(x)\,dx = 0$$

//

## ΛΗΜΜΑ

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και τ.ω. $\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx = 0$ $\forall\, \phi\in C^1[0,1]$, $\phi(0)=\phi(1)=0$.

Τότε η $f$ είναι παρ/μη συνάρτηση και μάλιστα $f'(x)\equiv 0$ στο $[0,1]$

## Απόδειξη

Αν η $f$ ήταν παρ/μη με παράγωγο συνεχής, τότε με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε:

$$\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx = 0 \iff -\int_0^1 f'(x)\phi(x)\,dx + (f\phi)\Big|_0^1 = 0$$

$$\iff -\int_0^1 f'(x)\phi(x)\,dx + f(1)\overset{0}{\phi(1)} - f(0)\overset{0}{\phi(0)} = 0$$

$$\iff -\int_0^1 f'(x)\phi(x)\,dx = 0,\quad \forall\,\phi\in C^1[0,1],\ \phi(0)=\phi(1)=0$$

$$\Longrightarrow f'(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$$

Σκέψεις:

$\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx = 0$ : Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $\phi'(x)=f(x)$?

$$\phi'(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' \iff \left(\phi(x) - \int_0^x f(t)\,dt\right)' = 0$$

$$\boxed{\Longrightarrow \exists\, c\in\mathbb{R}} \text{ τ.ω. } \phi(x) = c + \int_0^x f(t)\,dt$$

Θέλουμε $\phi(0)=\phi(1)=0$.

Στο $x=0$ : $0=\phi(0)=c+0 \Leftrightarrow c=0$

$$\Rightarrow \phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Θα έπρεπε: $\phi(1)=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt=0$

Μπορούμε να βρούμε $k\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\phi'(x)=f(x)+k$ ?

$$\Rightarrow \phi'(x)=\left(\int_0^x (f(t)+k)\,dt\right)'$$

$$\Rightarrow \exists\, c\in\mathbb{R} \text{ τ.ω. } \phi(x)=c+\int_0^x (f(t)+k)\,dt$$

$$\phi(0)=0 \Leftrightarrow c=0 \Rightarrow \phi(x)=\int_0^x (f(t)+k)\,dt$$

$$0=\int_0^1 f(t)\,dt+k \Leftrightarrow \boxed{k=-\int_0^1 f(t)\,dt}$$

**Λύση**

Επιλέγουμε την $\phi$ τ.ω. $\phi'(x)=f(x)\underbrace{-\int_0^1 f(t)\,dt}_{k}$

$$\Rightarrow \phi(x)=\int_0^x (f(t)+k)\,dt$$

$$\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x)+k-k)\phi'(x)\,dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x)+k)\phi'(x)\,dx-k\overbrace{\int_0^1 \phi'(x)\,dx}^{=0}=0$$

Άρα, καταλήξαμε ότι: $\int_0^1 (f(x)+k)\phi'(x)\,dx=0$

Επιλέγω την $\phi(x)=\int_0^x (f(t)+k)\,dt$ με $\underbrace{k=-\int_0^1 f(t)\,dt}_{\Rightarrow \phi(1)=0}$

$$\Rightarrow \phi'(x)=f(x)+k$$

Με αντικατάσταση, παίρνουμε $\int_0^1 (f(x)+k)^2\,dx=0 \Rightarrow f(x)+k\equiv 0$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=-k}$$

$\hookrightarrow$ $f$ σταθερή $f\equiv 0$

//

Επιστροφή στο πρόβλημα μας

$\exists\ \omega \in A$ που ικανοποιεί $J(u) \geq J(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\omega'(x))^2 dx$

$\Longrightarrow \int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx = 0, \ \forall \phi \in C^1[0,1], \ \phi(0)=\phi(1)=0$

$\xRightarrow{\text{(Λήμμα 2)}}$ Η ω' είναι παραγωγ. και μάλιστα

$(\omega')' \equiv 0 \Longleftrightarrow \omega''(x) \equiv 0, \ x \in [0,1].$

Λύνοντας την Δ.Ε.: $\omega''(x) = 0, \ x\in[0,1]$

$\omega(0)=\alpha, \ \omega(1)=\beta$

$\xRightarrow{\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \omega(x) = c_1 + c_2 x$

Χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες $\left.\begin{array}{l}\omega(0)=\alpha\\ \omega(1)=\beta\end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} c_1=\alpha \\ c_1+c_2=\beta\end{array}\right\}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = \alpha \\ c_2 = \beta - \alpha \end{cases}$

$\Longrightarrow \boxed{\omega(x) = \alpha + (\beta-\alpha)x, \ x\in[0,1]}$

$\left( I[u] = \int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx \right)$

• Είναι ο $\omega(x) = \alpha + (\beta-\alpha)x, \ x\in[0,1]$ ο ελαχιστοποιητής του προβλήματος?

$u\in A \longrightarrow J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (\omega'(x))^2 dx =$

$= \underline{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2}$ ?

$0 \leq \int_0^1 (u'(x)-\omega'(x))^2 dx = \int_0^1 \left((u'(x))^2 - 2u'(x)\omega'(x) + (\omega'(x))^2\right)dx$

$\int_0^1 (u'(x))^2 - 2\int_0^1 u'(x)\omega'(x)dx + \int_0^1 (\omega'(x))^2 dx \geq 0$

$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq 2\int_0^1 u'(x)\omega'(x)dx - \int_0^1 (\omega'(x))^2 dx$

$= \int_0^1 (\omega'(x))^2 dx + 2\int_0^1 u'(x)\omega'(x)dx - 2\int_0^1 (\omega'(x))^2 dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (\omega'(x))^2\,dx + \underbrace{\int_0^1 u'(x)\omega'(x)\,dx - \int_0^1 (\omega'(x))^2\,dx}_{A}$$

$$\int_0^1 \left(u'(x)\omega'(x) - (\omega'(x))^2\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (\omega'(x))^2 + \underbrace{\int_0^1 \omega'(x)\left(u'(x)-\omega'(x)\right)dx}_{A}$$

$A$? (Μπορούμε να πούμε κάτι;)

Όμως ο $\omega'$ λύνει την εξίσωση

$$\omega(x) = \alpha + (\beta-\alpha)x \Rightarrow \omega'(x) = \beta-\alpha$$

Τότε $A = \int_0^1 (\beta-\alpha)\left(u'(x)-(\beta-\alpha)\right)dx =$

$$= \int_0^1 (\beta-\alpha)u'(x) - \int_0^1 (\beta-\alpha)^2\,dx =$$

$$= (\beta-\alpha)\left(u(1)-u(0)\right) - (\beta-\alpha)^2$$

$$= (\beta-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)^2 = 0$$

Η $\omega$ ικανοποιούσε την εξίσωση

$$\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx, \quad \forall \phi \in C^1[0,1], \ \phi(0)=\phi(1)=0$$

Μήπως η $u(x)-\omega(x)$ έχει αυτές τις ιδιότητες;

$$A = \{u \in C^1[0,1] \mid u(0)=\alpha,\ u(1)=\beta\}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$$

<u>Πραγματικό πρόβλημα</u> Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{y(x)}}\,dx, \quad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1>0$$

Έστω το συναρτησοειδές της μορφής

$$J(y) = \int_\alpha^\beta f(x, y(x), y'(x))\,dx \qquad + \text{Συνοριακές συνθήκες.}$$

Τότε αν $\omega$ ελαχιστοποιητής δηλαδή $J(y) \geq J(\omega)$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $y = \omega + \varepsilon\phi$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\omega + \varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

<u>Ερώτημα:</u> Θεμ. Θεωρ. Απ. Λογ.

$$\underbrace{F(x)}_{\text{παραγωγ.?}} = \int_0^x f(t)\,dt$$

$\Longrightarrow$ Αν $f$ συνεχής $\Rightarrow$ $F$ παραγωγίσιμη.

Άρα $\underline{F'(x) = f(x)}$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

Έστω ότι $x \mapsto \int_0^1 f(t;x)\,dt$ είναι παρ/μη ?

Μάλιστα θα θέλαμε να υπολογίσουμε την $\frac{d}{dx}\int_0^1 f(t,x)\,dx$.

$$\int_0^1 f(t;x)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(t,x)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$$

?

## ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

22/02/2021

• Κάτω από τι υποθέσεις έχουμε

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad ?$$

Θέλω $\displaystyle \lim_{y\to y_0} \frac{\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx}{y-y_0} =$

$$= \lim_{y\to y_0}\int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,dx$$

$$\overset{\text{αν ισχύει}}{=} \int_a^b \lim_{y\to y_0}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx$$

**Θεώρημα**

Έστω $f:[\alpha,\beta]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παράγωγος ως προς την δεύτερη μεταβλητή ~~και~~ ~~ώστε~~ ώστε η $f_y:[\alpha,\beta]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $y\mapsto\int_a^b f(x,y)\,dx$ είναι παράγωγη και μάλιστα $\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$

Το δικό μας πλαίσιο: $f\in C^1([\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^2)$, $J(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$ όπου $f:[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ δοθείσα "καλή" συνάρτηση (Συνεχή, $\exists\ \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial z}$ συνεχείς)

Θα θέλαμε $u\in X=\{u\in C^1[\alpha,\beta] \mid u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$.

Στόχος να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές

$$J(u)=\int_\alpha^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$$

Αν έχουμε βρει έναν ελαχιστοποιητή, δηλ. $w\in X$ τ.ω.

$$J(u)\geq J(w),\quad \forall u\in X$$

Τότε αν επιλέξουμε $u=w+\varepsilon\varphi$ $\quad \varphi\in A=\{\varphi\in C^1[\alpha,\beta],\ \varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0\}$

οπότε έχουμε $J(w+\varepsilon\varphi)\geq J(w)$

$\exists\ \varepsilon$ τ.ω. $\displaystyle \frac{J(w+\varepsilon\Phi)-J(w)}{\varepsilon}\geq 0$

$\varepsilon \qquad\qquad {}_{a}L \qquad\qquad \varepsilon$

$$- \frac{f(x,\omega(x), \omega'(x))}{\varepsilon} \Big] dx$$

Θα θέλαμε να παραγωγίσουμε

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x, u(x) + \varepsilon\phi(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x))$$

Αν όλα πάνε καλά, ο κανόνας της αλυσίδας θα μας έδινε:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, \omega(x) + \varepsilon\phi(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\omega(x) + \varepsilon\phi(x)) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, \omega(x) + \varepsilon\phi(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\omega'(x) + \varepsilon\phi'(x))$$

$$f_u(x, \omega(x) + \varepsilon\phi(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x)) \cdot \phi(x) + f_z(x, \omega(x) + \varepsilon\phi(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi'(x)$$

Τότε ο κανόνας της αλυσίδας ισχύει και μάλιστα η $J(\omega + \varepsilon\phi)$ ως προς $\varepsilon$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\omega + \varepsilon\phi) = \int_a^b \Big[ f_\omega(x, \omega + \varepsilon\phi, \omega' + \varepsilon\phi')\phi(x) + f_z(x, \omega + \varepsilon\phi, \omega' + \varepsilon\phi')\phi'(x) \Big] dx.$$

Αν αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι $J(\omega + \varepsilon\phi) \geq J(\omega)$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{J(\omega + \varepsilon\phi) - J(\omega)}{\varepsilon} \geq 0$$

και επειδή υπάρχει η παράγωγος

$\Rightarrow \delta J(\omega, \phi) = 0$

Πρέπει (*) $\int_\alpha^\beta \left[ f_u(x, \omega(x), \omega'(x)) \phi(x) + f_z(x, \omega(x), \omega'(x)) \cdot \phi'(x) \right] dx = 0$

$\forall \phi \in C^1[\alpha, b]$, $\phi(\alpha) = 0 = \phi(\beta)$

(Ασθενής μορφή της Euler-Lagrange)

<u>Λήμμα</u>

Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την ιδιότητα

$$\int_\alpha^\beta (f(x)\phi(x) + g(x)\phi'(x)) dx = 0, \quad \forall \phi \in C^1[\alpha, \beta], \ \phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$$

Τότε η $g$ είναι $C^1[\alpha, \beta]$ συνάρτηση και μάλιστα

$$g'(x) = f(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Ορίζουμε $F(x) = \int_\alpha^x f(t) dt$, επειδή η $f$ είναι συνεχής, η $F$ παράγωγη συνάρτηση με $F'(x) = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Οπότε έχουμε: $\forall \phi \in C^1[\alpha, \beta]$, $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$

$$\int_\alpha^\beta (f(x)\phi(x) + g(x)\phi'(x)) dx = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^b (F'(x)\phi(x) + g(x)\phi'(x)) dx = 0$$

Τότε, $\int_\alpha^b F'(x)\phi(x) dx = -\int_\alpha^\beta F(x)\phi'(x) dx + (F\phi)\Big|_\alpha^\beta =$

$$= -\int_\alpha^\beta F(x)\phi'(x) dx + \underbrace{F(\beta)\phi(\beta) - F(\alpha)\phi(\alpha)}_{0}$$

Προκύπτει:

$$\int_\alpha^\beta (-F(x)\phi'(x) + g(x)\phi'(x)) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta (-F(x) + g(x)) \phi'(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in C^1[\alpha, \beta], \ \phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$$

Επομένως, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $-F(x) + g(x) = c$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$\Rightarrow g(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$= c + \int^x \ldots$

Euler-Lagrange.

$$\left.\begin{array}{l} w(\alpha)=c_1 \\ w(\beta)=c_2 \end{array}\right\}$$ βρίσκουμε τις πιθανές $w$.

- Τι να κάνουμε ώστε να εξασφαλίσουμε ότι η $w$ είναι όντως ελαχιστοποιητής;

Αντίστοιχα προβλήματα σε πιο πολλές μεταβλητές

$$J(u)=\iint_{\Omega}\sqrt{1+u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)}\,dx\,dy$$

με $C^1(\overline{\Omega})$

$u(x,y)=g(x,y)$, $\forall (x,y)\in\partial\Omega$

Έστω μια μεταβλητή

$$J(u)=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx \quad , \quad u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2$$

$$f(u,u')=\sqrt{1+(u')^2}$$

$$J(w+\varepsilon\phi)=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+(w'+\varepsilon\phi')^2}\,dx$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\sqrt{1+(w'(x)+\varepsilon\phi'(x))^2}=\frac{d}{d\varepsilon}\left(1+(w'(x)+\varepsilon\phi'(x))^2\right)^{1/2}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\quad\right)^{1/2-1}\frac{d}{d\varepsilon}(w'(x)+\varepsilon\phi(x))^2=$$

$\Rightarrow$ η $\dfrac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}}$ είναι σταθερή με $\left(\dfrac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}}\right)' = 0$

$$\Rightarrow \frac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}} = c \Rightarrow \omega' = k$$

$$\overset{\exists k,\lambda\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} \omega(x) = kx+\lambda$$

Επειδή
$$\left.\begin{array}{l}\omega(\alpha)=c_1\\ \omega(\beta)=c_2\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}k\alpha+\lambda=c_1\\ k\beta+\lambda=c_2\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}k=\dfrac{c_2-c_1}{\beta-\alpha}\\ \lambda = c_1 - \dfrac{c_2-c_1}{\beta-\alpha}\alpha\end{array}\right.$$

$$= \frac{c_1\beta - \cancel{c_1\alpha} - c_2\alpha + \cancel{c_1\alpha}}{\beta-\alpha} = \frac{c_1\beta - c_2\alpha}{\beta-\alpha}$$

$\Rightarrow$ η $\omega$ είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία $(\alpha, c_1)$ με το $(\beta, c_2)$ //

## Επιστροφή στις 2 μεταβλητές $x=(x,y)$

$$J(u) = \iint_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$
$$= \iint_{\Omega} f(x,y,u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y))\,dx\,dy$$

όπου $f: \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι $C^1$ συνάρτηση

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x,y,\overbrace{u(x,y)+\varepsilon\phi(x,y)}^{u}, \overbrace{u_x(x,y)+\varepsilon\phi_x(x,y)}^{z_1}, \overbrace{u_y(x,y)+\varepsilon\phi_y(x,y)}^{z_2})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(\quad)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(w+\varepsilon\phi) + \frac{\partial f}{\partial z_1}(\quad)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(w_x+\varepsilon\phi_x)$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z_2}(\quad)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(w_y+\varepsilon\phi_y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \phi + \frac{\partial f}{\partial z_1} \phi_x + \frac{\partial f}{\partial z_2} \phi_y = 0$$

$$\Rightarrow \delta J(\omega; \phi) = \iint_\Omega [f_u(x,y,\omega(x,y)), \omega_x(x,y), \omega_y(x,y)) \phi(x,y) +$$

$$+ f_{z_1}(\dots) \phi_x(x,y) + f_{z_2}(\dots) \phi_y(x,y)].$$

και αν μπορούμε να κάνουμε ολοκληρώσεις κατά μέρη

$$\iint (f_u \phi + f_{z_1} \phi_x + f_{z_2} \phi_y) \, dx\, dy = 0$$

$$\iint_\Omega f_{z_1}( \quad ) \phi_x(x,y) \, dx\, dy = -\iint \frac{\partial}{\partial x} f_{z_1}(\dots) \phi \, dx\, dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} f_{z_1} \cancel{v_1 \phi} \, dS \quad \xrightarrow{} 0$$

επειδή η $\phi$ στο σύνορο είναι μηδέν.

Και τελικά παίρνουμε ότι:

$$\iint (f_u \phi - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_1} \phi - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_2} \phi) \, dx\, dy = 0$$

$$\iint \left( f_u(x,\omega,\nabla\omega) - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_1}(x,\omega,\nabla\omega) - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_2}(x,\omega,\nabla\omega) \right) \phi(x,y) \, dx\, dy = 0$$

Λήμμα

Εάν $f: \bar{\Omega} \to R$ συνεχής και τ.ω. $\iint_\Omega f(x,y) \phi(x,y) \, dx\, dy = 0$ $\forall \phi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\phi|_{\partial\Omega} = 0$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \text{ στο } \bar{\Omega}$$

και επομένως η Euler-Lagrange παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{z_1}(x,\omega(x),\nabla\omega(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f_{z_2}(x,\omega(x),\nabla\omega(x)) =$$

$$= f_u(x,\omega(x),\nabla\omega(x_1))$$ Euler Lagrance.

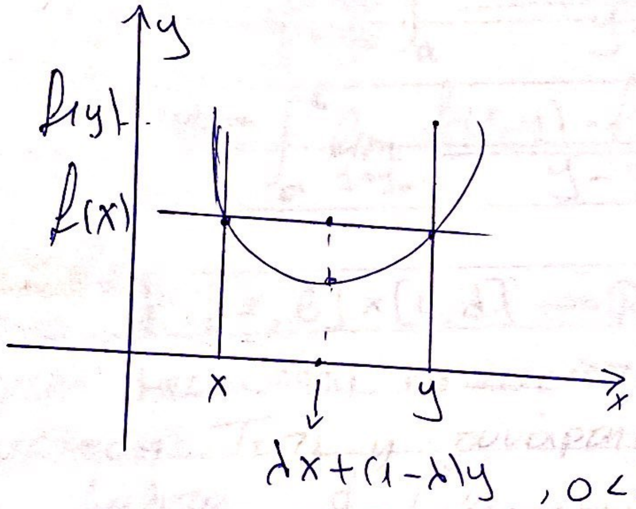
## ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΟΠΟΥ ΝΑ ΕΞΑΣΦΑΛΙΖΟΥΝ ΥΠΑΡΞΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση.
Πιθανά τοπικά ακρότατα, είναι τα κρίσιμα σημεία $f'(\xi)=$
Με ποιον τρόπο ελέγχουμε αν όντως είναι τοπικό ελάχιστο;

Αν $f''(\xi) > 0 \Rightarrow$ το $\xi$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f$.

## Βασική Κατηγορία συναρτήσεων

Κυρτές Συναρτήσεις.




$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

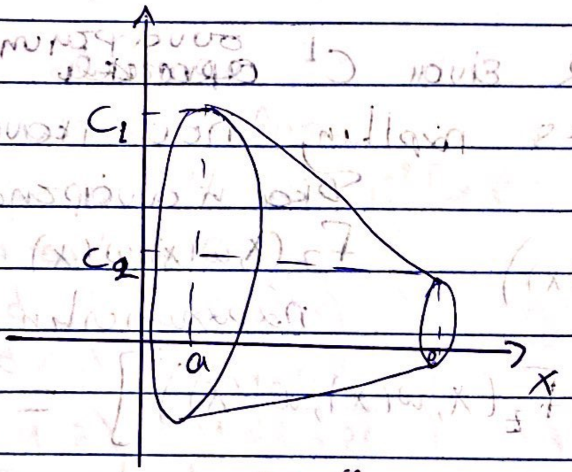
$\forall\, x<y$

$\forall\, \lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow f$ συνεχής συνάρτηση.

Να ελαχιστοποιηθεί το συναρτησοειδές

$$J(u) = 2A\int_\alpha^\beta u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$$




$u \in A = \{u \in C^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$

$c_1 > c_2 > 0$

Η συνάρτηση

$F(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2}$

← δεν είναι κυρτή ως προς τις δύο μεταβλητές. Είναι ως προς την τρίτη.

Αν $\omega \in A$ είναι συνάρτηση ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς, $\phi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$

$$J(\omega+\varepsilon\phi) \geq J(\omega)$$

$$\Rightarrow \delta J(\omega;\phi) = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \big(F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\,\phi'(x) + F_z(x,\omega(x))\,\omega'(x)\,\phi'(x)\big)\,dx = 0$$

Στην περίπτωση μας $F(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2}$

$$\Rightarrow F_y(x,y,z) = \sqrt{1+z^2},$$

$$F_z = \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$\Rightarrow$ Η συνάρτηση $F_z(x,\omega(x),\omega'(x)) = \dfrac{\omega(x)\,\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}$ είναι παρ/μη και μάλιστα ισχύει η εξ. Euler-Lagrange, δηλ. $\dfrac{d}{dx}F_z(x,\omega(x),\omega'(x)) = F_u(x,\omega(x),\omega'(x))$

Στην περίπτωση μας παίρνει την μορφή

$$(*)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\omega(x)\,\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\right) = \sqrt{1+(\omega'(x))^2}, \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$$

$$\omega(\alpha) = c_1,\quad \omega(\beta) = c_2$$

Όταν η $f(x,u,z)$ δεν εξαρτάται από το $x$.

ΛΗΜΜΑ

Έστω πως η $F:[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι $C^1$ συνάρτηση και $\omega\in C^1[\alpha,\beta]$, ω <u>δύο</u> φορές παρ/μη, που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d}{dx}F_z(x,\omega(x),\omega'(x))=F_u(x,\omega(x),\omega'(x))$$

και η συνάρτηση $F_z(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη.

Τότε $$\frac{d}{dx}\left[F(x,\omega(x),\omega'(x))-\omega'(x)F_z(x,\omega(x),\omega'(x))\right]=$$

$$F_x(x,\omega(x),\omega'(x)),\quad \forall x\in[\alpha,\beta]$$

Ειδικότερα αν $F_x(x,y,z)\equiv 0$

$\Longrightarrow \exists\, c\in\mathbb{R}$ τ.ω. $F(x,\omega(x),\omega'(x))-\omega'(x)F_z(x,\omega(x),\omega'(x))=c$
$\forall x\in[\alpha,\beta]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $F(x,\omega(x),\omega'(x))-\omega'(x)F_z(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Διότι

$x\mapsto F(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παρ/μη και μάλιστα

$$\frac{d}{dx}F(x,\omega(x),\omega'(x))=F_x(x,\omega(x),\omega'(x))+$$
$$+F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\omega'(x)+F_z(x,\omega(x),\omega'(x))\omega''(x)$$

Για το 2ο όρο $-\omega'(x)F_z(x,\omega(x),\omega'(x))$:

η παρ/μότητα προκύπτει από την παρ/μότητα του κάθε όρου και μάλιστα $\frac{d}{dx}\left(-\omega'(x)F_z(x,\omega(x),\omega'(x))\right)=-\omega''(x)F_z(x,\omega(x),\omega'(x))-\omega'(x)\frac{d}{dx}F_z(x,\omega(x),\omega'(x))$

και επομένως έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left[F-\omega' F_z\right] = F_x(x,\omega(x),\omega'(x)) + F_u(\,)\,\omega' + \cancel{F_z(\,)\,\omega''} - \cancel{\omega'' F_z(\,)} - \omega'\frac{d}{dx}F_z(\,)$$

$$= f_x(x,\omega(x),\omega'(x)) + \omega'(x)\Big[\underbrace{F_u(x,\omega(x),\omega'(x)) - \frac{d}{dx}F_z(x,\omega(x),\omega'(x))}_{\Rightarrow 0}\Big]$$

Πάμε στην επίλυση του προβλήματος ελάχιστης επιφάνειας με περιστροφή. Η $\omega \in C^1[\alpha,\beta]$, $\omega(\alpha)=c_1$, $\omega(\beta)=c_2$, $c_1 > c_2 > 0$ λύνει την Δ.Ε.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\omega(x)\,\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\right) = \sqrt{1+(\omega'(x))^2}$$

$(F(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2})$. Γιατί η ω είναι 2 φορές παρ/μη?

Γνωρίζουμε ότι η $\omega(x)\cdot\underbrace{\frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}}_{h(x)=}$ παρ/μη συνάρτηση.

Επομένως στα σημεία μη μηδενισμού της ω η

$\frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}$ θα ήταν παρ/μη συνάρτηση.

$$g(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad Q(x) = g(\omega'(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(Q(x)) = \omega'(x)$$

$$g'(t) = (1+t^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}2t(\,)^{-3/2}t$$

$$= (1+t^2)^{-3/2}\left[1+t^2-t^2\right] = (1+t^2)^{-3/2} > 0$$

$\Rightarrow g^{-1}: (-1,1)\to\mathbb{R}$ είναι παρ/μη συνάρτηση.

$\Rightarrow$ η ω' είναι παρ/μη συνάρτηση.

<u>Στόχος:</u> Να λύσουμε την Euler-Lagrange.

Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα

$$\frac{d}{dx}\left(\cancel{\omega(x)\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} - \omega'(x)\frac{\omega(x)\,\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega(x))^2}}\right) = 0 \quad , \text{αν } \omega(x)\neq 0.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\omega(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\left[1+\cancel{(\omega'(x))^2}-\cancel{(\omega'(x))^2}\right]=c$$

$$\frac{\omega(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}=c \quad , \forall\, x\in(\alpha_1,\beta_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}=c \quad , \forall\, x\in[\alpha_1,\beta_1]$$

Αν $\omega(\beta_1)=0 \Rightarrow c=0$ $\Big\}$ $\omega(x)\equiv 0, \forall x\in(\alpha_1,\beta_1)$ αντίφαση

$\Longrightarrow$ Η $\omega$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[\alpha,\beta]$.

$\Longrightarrow$ $\omega$ 2 φορές παρ/μη στο $[\alpha,\beta]$.

Επομένως έχουμε ότι $\exists\, c\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\frac{\omega(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}=c \quad , \forall\, x\in[\alpha,\beta].$$

$c=\frac{1}{\lambda}>0$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2\omega^2(x)=1+(\omega'(x))^2, \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$$

$$\xrightarrow{\omega' \text{ παρ/μη}} \lambda^2\cdot 2\omega(x)\omega'(x)=2\omega'(x)\,\omega''(x)$$

$$\Longleftrightarrow \omega'(x)\left[\omega''(x)-\lambda^2\omega(x)\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow \omega''(x)-\lambda^2\omega(x)=0 \quad , \quad \omega(x)=k\cosh(\lambda x+\nu)$$

$$=\mu\cosh(\lambda x)+\sigma\sinh(\lambda x)$$

$$\omega'(x)=k\lambda\sinh(\lambda x+\nu)$$

$$\lambda^2k^2\cosh^2(\lambda x+\nu)=1+(k\lambda)^2\sinh^2(\lambda x+\nu)$$

$$\lambda^2k^2\underbrace{\left(\cosh^2(\lambda x+\nu)-\sinh^2(\lambda x+\nu)\right)}_{1}=1$$

$$\lambda k=\pm \Longrightarrow k=\frac{1}{\lambda}$$

$$\omega(x)=\frac{\cosh(\lambda x+\nu)}{\lambda}, \quad x\in[\alpha,\beta]$$

Αρα,

$\cosh(\lambda\alpha+\nu) = \lambda c_1$

$\cosh(\lambda\beta+\nu) = \lambda c_2$

//.

## Euler – Lagrange – Φυσικές Συνοριακές Συνθήκες (Natural)

Έστω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$J(u) = \int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\,dx$$

$$u \in A = \{u \in C^1[\alpha,\beta] \mid u(\alpha) = c_1\}$$

Στην περίπτωση μιας $\phi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=0$ και τότε αν $\omega$ ελαχιστοποιείται, θα έχουμε $J(\omega+\varepsilon\phi) \geq J(\omega)$

$$\Rightarrow \delta J(\omega;\phi) = 0, \quad \forall \phi \in C^1[\alpha,\beta], \phi(\alpha)=0$$

$$\int_\alpha^\beta \left[F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) + F_z(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\right]dx = 0$$

Αρχικά $\phi(\beta)=0 \Rightarrow$ η συνάρτηση $F_z(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα έχουμε:

$$\frac{d}{dx}F_z(x,\omega(x),\omega'(x)) = F_u(x,\omega(x),\omega'(x)), \quad \forall x \in [\alpha,\beta].$$

$$\int_a^\beta \left(\cancel{F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) - \frac{d}{dx}F_z(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)}\right)dx + \left(F_z(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)\right)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = 0$$

$$\Rightarrow F_z(\beta,\omega(\beta),\omega'(\beta))\phi(\beta) - F_z(\alpha,\omega(\alpha),\omega'(\alpha))\underbrace{\phi(\alpha)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow F_z(\beta,\omega(\beta),\omega'(\beta))\phi(\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_z(\beta,\omega(\beta),\omega'(\beta)) = 0}$$

Στο πρόβλημα $J(u)=2\pi\int_a^b u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$

$A=\{u\in C^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=c_1>0\}$

$\Rightarrow$ Αν $w\in A$ ελαχιστοποιητής, τότε $w(x)>0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow \exists\ \lambda>0,\ v\in\mathbb{R}$ τ.ω. $w(x)=\frac{\cosh(\lambda x+v)}{\lambda}$.

· Στο άκρο $b$ τι γίνεται?

Μια συνοριακή συνθήκη είναι $w(\alpha)=c_1$

$(w)$ $\cosh(\lambda\alpha+v)=c_1\lambda$

Φυσική συνοριακή συνθήκη στο άκρο $b$.

$F_z(\beta,w(\beta),w'(\beta))=0$

$\Leftrightarrow \frac{w(\beta)(w'(\beta))^2}{\sqrt{1+(w'(\beta))^2}}=0$

$\Leftrightarrow w'(\beta)=0$

$w(x)=\frac{\cosh(\lambda x+v)}{\lambda}$

· $w'(x)=\sinh(\lambda x+v)$

$w'(\beta)=0 \Leftrightarrow \sinh(\lambda\beta+v)=0 \Leftrightarrow \lambda\beta+v=0$

$\Rightarrow v=-\lambda\beta$

$w(x)=\frac{\cosh(\lambda(x-\beta))}{\lambda}$

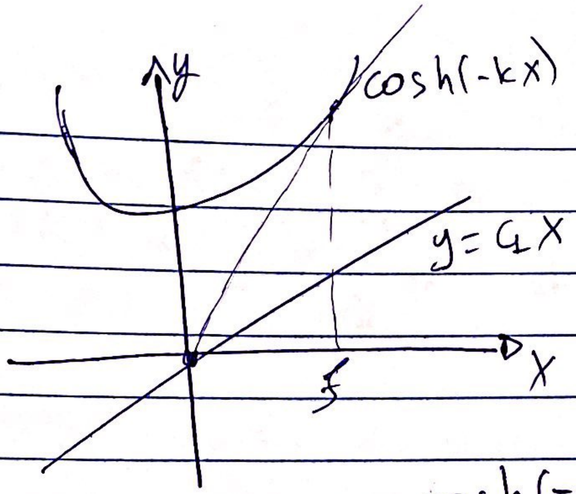
$w(\alpha)=c_1 \Leftrightarrow \boxed{\cosh(\lambda(\alpha-\beta))=c_1\lambda}$

· Υπάρχουν $\lambda>0$ τ.ω. $\cosh(\lambda(\alpha-\beta))=c_1\lambda$

$k=\beta-\alpha>0$

$f(x)=\cosh(-kx),\quad c_1x$

$f'(x)=-k\sinh(-kx)$




$$\left.\begin{aligned} \cosh(-k\xi) &= c_1 \xi \\ -k\sin(k\xi) &= c_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ το $\xi$ λύνει την εξίσωση

$$\cosh(-k\xi) = -k\xi \sinh(-k\xi)$$

Επιλύεται

$\exists\ \xi > 0$ (γιατί;)

$\Rightarrow$ οριακό $c_1$.

# ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

03/03/2021

Ελαχιστοποίηση $J(u) = 2\pi \int_{a}^{b} u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$,

$u \in A = \{ u \in C^1[\alpha,\beta] \mid u(\alpha) = c_1 \}$, $c_1 > 0$

$\Rightarrow$ ... πιθανοί ελαχιστοποιητές $\frac{d}{dx}\left(\frac{w(x)\,w'(x)}{\sqrt{1+(w'(x))^2}}\right) = \sqrt{1+(w'(x))^2}$

....

$\Rightarrow \exists\ \lambda > 0,\ \nu \in \mathbb{R}$ τ.ω. $w(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x + \nu)$,

$w(\alpha) = c_1,\ w'(\beta) = 0$

$w'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \sinh(\lambda\beta + \nu) = 0 \Leftrightarrow \nu = -\lambda\beta$

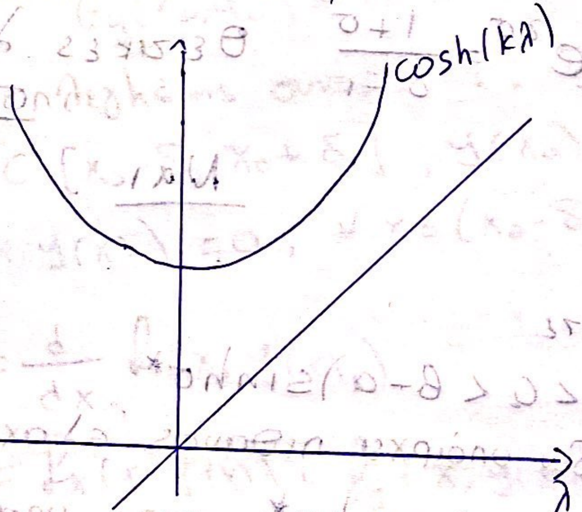
$\Rightarrow w(x) = \frac{\cosh(\lambda(x-\beta))}{\lambda}$

Θέλουμε $w(\alpha) = c_1 \Leftrightarrow \boxed{\cosh(\lambda(\alpha-\beta)) = c_1\lambda}$ (*)

Υπάρχουν $\lambda > 0$ που να ικανοποιούν την (*)

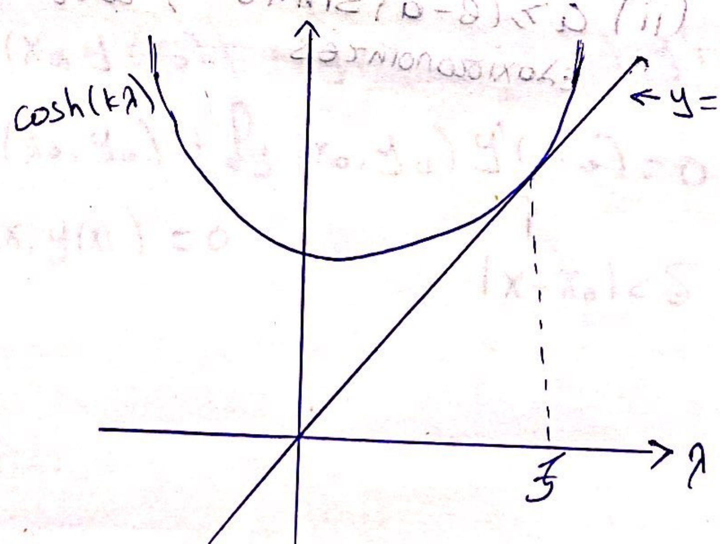
$k = \beta - \alpha > 0$

$\cosh(k\lambda) = c_1\lambda$ (*')




Αν $0 < c_1$ μικρό, δεν υπάρχουν $\lambda$ που να ικανοποιούν τα δεδομένα

Η "οριακή" κατάσταση, δηλ. η ευθεία να εφάπτεται του γραφήματος της $\cos(k\lambda)$




Πρέπει

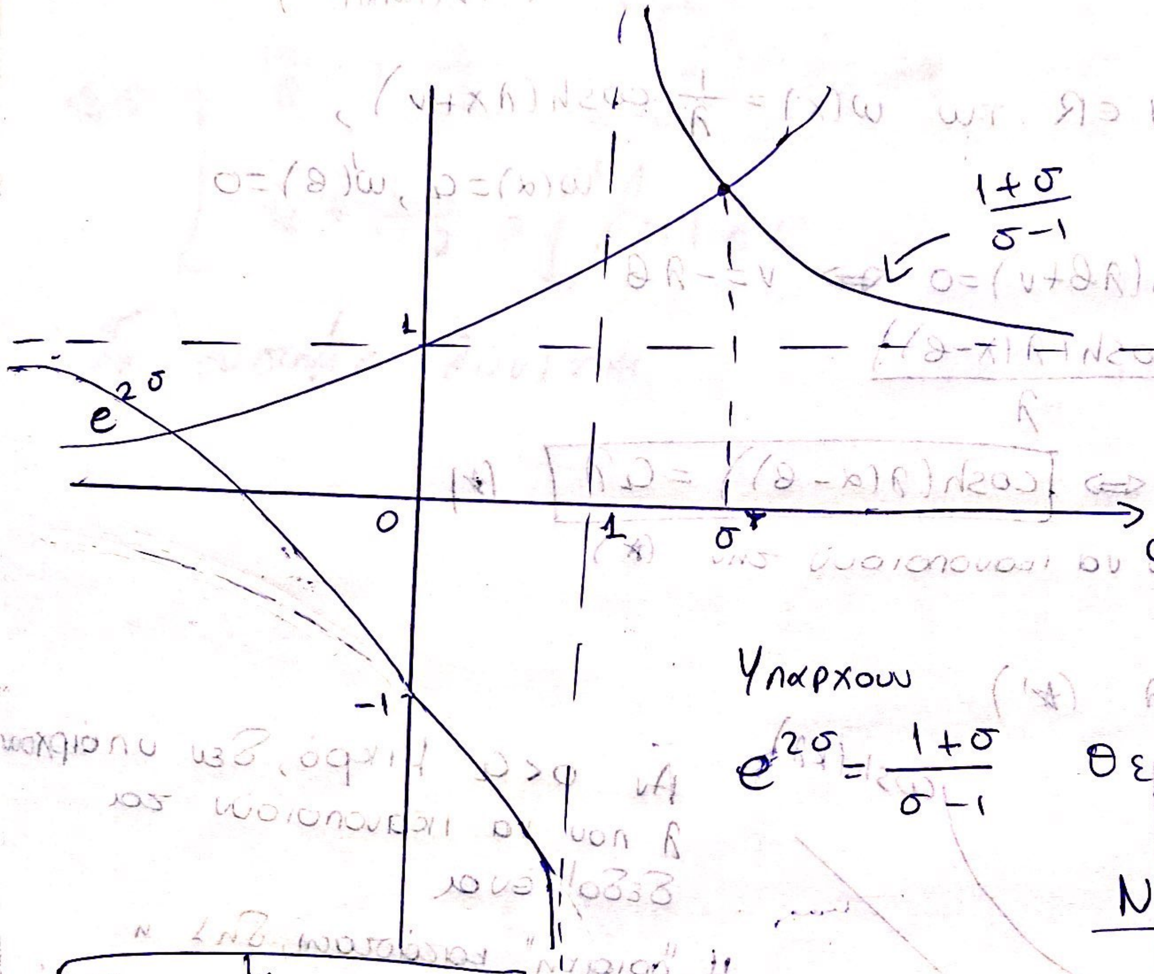
$\left.\begin{aligned} \cosh(k\xi) &= c_1\xi \\ k\sinh(k\xi) &= c_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cosh(k\xi) = k\xi\sinh(k\xi) \\ c_1 = k\sinh(k\xi) \end{cases}$

$$(b-a)\xi=\sigma^* \iff \begin{cases} \cosh(\sigma^*)=\sigma^*\sinh(\sigma^*) \\ c=k\sinh\sigma^* \end{cases}$$

Η εξίσωση $\cosh(\sigma)=\sigma\sinh(\sigma) \iff \frac{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}{2}=\sigma\frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{2}$

$$\iff e^{2\sigma}(\sigma-1)=1+\sigma \iff e^{2\sigma}=\frac{1+\sigma}{\sigma-1}$$




Υπάρχουν $e^{2\sigma}=\frac{1+\sigma}{\sigma-1}$ θετικές λύσεις?

$\underline{\sigma^*>1}$

$\underline{\text{Ναι}}$

$$\boxed{c=\overbrace{(b-a)}^{k}\sinh\sigma^*}$$

και τότε!

$w(\lambda)=\frac{\cosh(\lambda(x-b))}{\lambda}$

(i) $0<c<(b-a)\sinh\sigma^*$

δεν υπάρχει πιθανός ελαχιστοποιητής

(ii) $c\geq(b-a)\sinh\sigma^*$, τότε υπάρχουν πιθανοί ελαχιστοποιητές

## Πρόβλημα

Ελαχιστοποίηση $J(u)$, $u \in A$ με την δέσμευση $G(u)=0$

μη γραμμική

• Ελαχιστοποίηση $f(x,y)$ με την δέσμευση $G(x,y)=0$

Έστω $f, G \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Υπόθεση: $\exists$ σημεία $(x,y)$ τ.ω. $G(x,y)=0$

$$\nabla G(x,y) \neq 0$$

$\to$ Αν $(x_0,y_0)$ πιθανό σημείο ελαχιστοποίησης τότε

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y): G(x,y)=0$$

(Αναγκαστικό)? (Πολλαπλ. Lagrange) $\Longrightarrow$ $\exists$ $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω

Γιατί δουλεύει?

$$G(x_0,y_0)=0$$

Επίσης, $\nabla G(x_0,y_0) \neq 0$

Έστω $G_y(x_0,y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Θ. πεπλεγμένης συνάρτησης: $\exists$ $\delta>0$ τ.ω.

$y \in C^1[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $y(x_0)=y_0$ και τ.ω.

$G(x,y(x))=0$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\sigma'(x) = \frac{d}{dx} f(x,y(x))$$

$$= f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\, y'(x)$$

Επομένως $\Longrightarrow$ $f_x(x_0,y(x_0)) + f_y(x_0,y(x_0))\, y'(x_0) = 0$

$$f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\, y'(x_0) = 0$$

Όμως, $G(x,y(x))=0$

$|x-x_0|<\delta$

και επειδή

$$G_x(x,y(x)) + G_y(x,y(x))\,y'(x) = 0$$

$$\underbrace{G_x(x_0,y_0) + G_y(x_0,y_0)}_{\neq 0}\,y'(x_0) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{G_x(x_0,y_0)}{G_y(x_0,y_0)}$$

$$\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) =$$

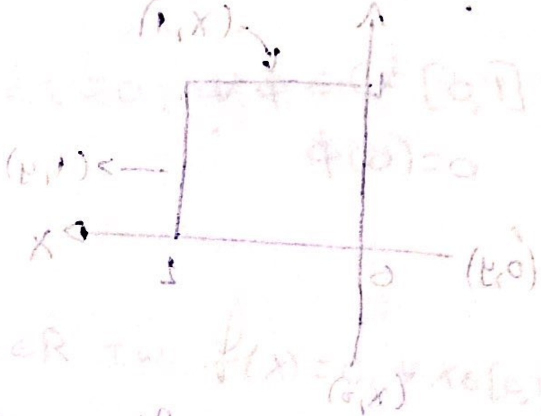
$$= (-f_y(x_0,y_0)\,y'(x_0), f_y(x_0,y_0))$$

$$= f_y(x_0,y_0)(-y'(x_0), 1)$$

$$= f_y(x_0,y_0)\left(\frac{G_x(x_0,y_0)}{G_y(x_0,y_0)}, 1\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{f_y(x_0,y_0)}{G_y(x_0,y_0)}}}_{= \lambda}(G_x(x_0,y_0), G_y(x_0,y_0))$$

## Λύσεις 1ου Φυλλαδίου



### Άσκηση 4

$f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\phi(x,y)\,dx\,dy = 0, \quad \forall \phi \in C$$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \text{ στο } [0,1]^2$$

**Λύση**

Επιλέγω $\phi = f \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 f^2(x,y)\,dx\,dy = 0$

Έστω $f^2(x_0,y_0) > 0$

Από συνέχεια της $f$ στο $(x_0,y_0) = x_0$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ τ.ω. $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{f^2(x_0)}{2} \Rightarrow |f^2(x) - f^2(x_0)| < \frac{f^2(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f^2(x_0)}{2} < f^2(x_0) - f^2(x_0) < \frac{f^2(x_0)}{2}$$

$$f^2(x) \geq f^2(x_0) - \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{f^2(x_0)}{2}, \quad |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \iint_{|x-x_0|<\frac{\delta}{2}} \frac{f^2(x_0)}{2}\,dx = \frac{f^2(x_0)}{2}\,\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

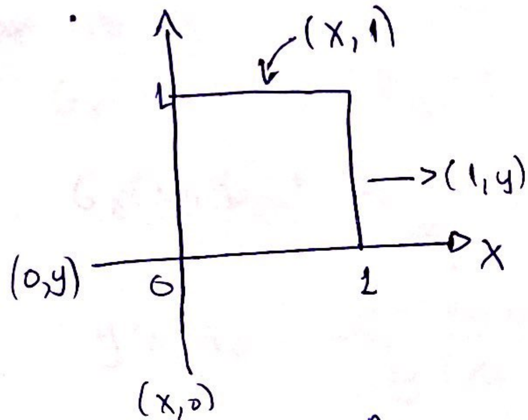
ΑΝΤΙΦΑΣΗ!

Διαφέρει λίγο από την 4' Το διαφορικό $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\phi(x,y)\,dx\,dy = 0$

$$\forall \phi \in C[0,1]^2 \text{ με } \phi|_{\partial[0,1]^2} = 0$$

Επιλέγουμε $\phi(x,y) = x$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 f^2(x,y)\,x(1-x)(1-y)\,y\,dx\,dy = 0$$




$$\Rightarrow f^2(x,y)\,x(1-x)\,y(1-y)=0$$

$$\left.\begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f^2(x,y)=0, \quad \begin{matrix} 0\leq x\leq 1 \\ 0<y<1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Λόγω συνέχειας της $f$

$$f(x,y)\equiv 0, \ \forall (x,y)\in[0,1]^2$$

## Άσκηση 1η

$f:[0,1]\to[0,+\infty)$ συνεχής $\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt=0$

$\Rightarrow f\equiv 0, \ [0,1]$

Λύση: (Διαφορετική)

Θεωρούμε $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, $x\in[0,1]$, τότε $F(1)=0$.

Επειδή η $f$ είναι συνεχής $\Rightarrow$ η $F$ είναι παρ/μη

$$\Rightarrow F'(x)=f(x)\geq 0, \ x\in[0,1]$$

$\Rightarrow F\uparrow, \ x\in[0,1]$

$$\underbrace{F(0)}_{0}\leq F(x)\leq \underbrace{F(1)}_{0}, \ \forall x\in[0,1]$$

$\Rightarrow F(x)\equiv 0, \ \forall x\in[0,1]$

$\Downarrow$

$f(x)=F'(x)\equiv 0 \Rightarrow f(x)\equiv 0, \ \forall x\in[0,1]$

## Άσκηση 2η

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\int_0^1 f(t)\phi'(t)\,dt = 0$, $\forall \phi \in C^1[0,1]$:
$\phi(0)=0$

$\Rightarrow f \equiv 0$ στο $[0,1]$

Λύση:

Αν επιπρόσθετα $\phi(1)=0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x)=c$, $\forall x \in [0,1]$

Επιλέγουμε $\phi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $\phi(0)=0$

(είναι δυνατή επιλογή) και τότε παίρνουμε

$$\int_0^1 f(t) f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow f^2(t) \equiv 0 \Rightarrow f(t) \equiv 0,\ [0,1]$$

## Άσκηση 3η

Να βρούμε όλες τις $f:[0,1]$ συνεχείς, που ικανοποιούν:

$$\int_0^1 f(t)\phi''(t)\,dt = 0,\ \forall \phi \in C^2[0,1],\ \phi(0)=\phi(1),\ \phi'(0)=\phi'(1)=0$$

$$\Rightarrow f = ?$$

Λύση:

Παρατηρώ ότι $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τότε

$$\int_0^1 (f(t) - c_1 - c_2 t)\phi''(t)\,dt = 0$$

$\forall \phi \in C^2$, $\phi(0)=\phi(1)$
$\phi'(0)=\phi'(1)=0$

Επιλέγουμε $\phi''(t) = f(t) - c_1 - c_2 t$

για κατάλληλες επιλογές των $c_1, c_2$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \int_0^t f(s)\,ds - c_1 t - c_2 \frac{t^2}{2},\quad \phi'(0)=0,\ \phi'(1)=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(s)\,ds - c_1 - \frac{c_2}{2} = 0$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2} = \int_0^1 f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\,ds\,dt - c_1\frac{x^2}{2} - c_2\frac{x^3}{6}$$

Θέλουμε $0=\phi(0)=\phi(1)$

$$\int_0^1\int_0^t f(s)\,ds\,dt - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{6} = \int_0^1\int_0^t f(s)\,ds\,dt \\ c_1 + \frac{c_2}{2} = \int_0^1 f(t)\,dt \end{cases}$$

Το σύστημα λύνεται.

8/3/2021

# Λογισμός Μεταβολών

## Προβλήματα Ελαχιστοποίησης με δεσμεύσεις

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια $C^1(\mathbb{R}^n)$ συνάρτηση

$G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $C^1(\mathbb{R}^n)$ συνάρτηση, η $G$ είναι τ.ω. η επιφάνεια σταθμης $G(x)=0$ έχει στοιχεία και είναι τ.ω. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, που ικανοποιούν $G(x)=0$ τότε $\nabla G(x) \neq 0$.

Τότε αν $x_0$ πιθανό σημείο τοπικού ακροτάτου της $f$ με την δέσμευση $G(x)=0$, τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0) \quad \text{και} \quad G(x_0)=0.$$

Επειδή $G(x_0)=0$, $\underset{\Leftrightarrow (G_{x_n}(x_0)\neq 0)}{\nabla G(x_0) \neq 0}$ από το Θ. Πεπλεγμένης Συνάρτ

$\exists\, g: B_\delta \to \mathbb{R}$

που είναι $C^1(B_\delta)$ και είναι τ.ω. $G(x', g(x'))=0$, $|x'-x_0'|<\delta$

$g(x_0')=x_0^n$

και τότε $f(x', g(x')) \geq f(x_0', x_0^n)$, $|x'-x_0'|<\delta$

και επομένως $Q(x') = f(x', g(x'))$, $|x'-x_0'|<\delta$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $x_0'$.

$$\Rightarrow \nabla_{x'} Q(x_0') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))\Big|_{x'=x_0'} = 0$$

$$f_{x_1}(x_0', g(x_0')) + f_{x_n}(x_0', g(x_0'))\, g_1(x_0') = 0$$

$$f_{x_2}(\quad) + f_{x_n}(\quad)\, g_{x_2}(\quad) = 0$$

$\vdots$

$$f_{x_{n-1}}(\quad) + f_{x_n}(\quad)\, g_{x_{n-1}}(x_0') = 0$$

$$\nabla f(x_0) = (\nabla_{x'} f(x_0), f_{x_n}(x_0))$$

$$= (-f_{x_n}(x_0)\, g_{x_1}(x_0'), -f_{x_n}(x_0)\, g_{x_2}(x_0'), \dots, -f_{x_n}(x_0)\, g_{x_{n-1}}(x_0'), f_{x_n}(x_0))$$

$$= -f_{x_n}(x_0)\, \Big(\underbrace{g_{x_1}(x_0')}_{-\frac{G_{x_1}(x_0)}{G_{x_n}(x_0)}}, g_{x_2}(x_0'), \dots, \underbrace{g_{x_{n-1}}(x_0')}_{-\frac{G_{x_{n-1}}(x_0)}{G_{x_n}(x_0)}}, -1\Big)$$

$G(x', g(x')) = 0$

$\Rightarrow G_{x_1}(x_0', g(x_0')) + G_{x_n}(x_0', g(x_0'))\cdot g_{x_1}(x_0') = 0$

$\vdots$

$G_{x_{n-1}}(x_0) + \overset{\neq 0}{\overline{G_{x_n}(x_0)}}\, g_{x_{n-1}}(x_0') = 0$

Καταλήγουμε στο ότι $\nabla f(x_0) = \underbrace{\dfrac{-f_{x_n}(x_0)}{G_{x_n}(x_0)}}_{\lambda} \nabla G(x_0)$

- Παραδείγματα προβλημάτων που μας ενδιαφέρουν στα πλαίσια του μαθήματος:

⇒ Εύρεση των πιθανών ελαχιστοποιητών του συναρτησοειδούς $J(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\, dx$ με συναρτήσεις ελέγχου

$u \in A = \{u \in C^1[0,1] \mid u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$

με την δέσμευση $G(u) = \int_0^1 u(x)\, dx - 1 = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω $u_0 \in A$ ελαχιστοποιητής, $G(u_0) = 0$

Αν $u \in A$, $G(u) = 0$, πχ παραδ. $u = u_0 + \varepsilon\phi$,

τότε θα πρέπει να έχουμε:

$u_\varepsilon \in A$, $\phi \in C^1[0,1]$,

$\left.\begin{array}{l} u_\varepsilon(0) = 0 \\ u_\varepsilon(1) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0(0) + \varepsilon\phi(0) = 0 \\ u_0(1) + \varepsilon\phi(1) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 0 \end{array}$

Θέλουμε επίσης $G(u_\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 u_\varepsilon(x)\, dx - 1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (u_0(x) + \varepsilon\phi(x))\, dx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\int_0^1 u_0(x)\, dx}_{=1} + \varepsilon\int_0^1 \phi(x)\, dx - 1 = 0$

πρέπει $\boxed{\int_0^1 \phi(x)\, dx = 0}$

για $\phi \in C^1[0,1]$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$ και $\int_0^1 \phi(x)\, dx = 0$

και επομένως τότε $J(u_\varepsilon) \geq J(u_0)$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sigma(\varepsilon) = \int_0^1 (u_\varepsilon'(x))^2\, dx = \int_0^1 (u_0'(x) + \varepsilon\phi'(x))^2\, dx =$

$$= \int_0^1 (u_0'(x))^2 + 2\varepsilon \int_0^1 u_0'(x)\phi'(x)\,dx + \varepsilon^2 \int_0^1 (\phi'(x))^2\,dx$$

Έχουμε

$$\sigma(\varepsilon) \geq \sigma(0) \Rightarrow \sigma'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\int_0^1 u_0'(x)\phi'(x)\,dx = 0}$$

Καταλήξαμε ότι πρέπει

$$\int_0^1 u_0'(x)\phi'(x)dx = 0 \quad , \forall \phi \in C^1[0,1] \ , \phi(0) = \phi(1) = 0$$
$$\forall \int_0^1 \phi(x)dx = 0$$

Ποιο είναι το συμπέρασμα?

## Λήμμα

Έστω $f \in C[\alpha,\beta]$ και $\forall \phi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$

και $\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx = 0$, ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot\phi'(x)dx = 0$

Τότε υπάρχουν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c_1 + c_2 x$, $x \in [\alpha, \beta]$

## Απόδειξη

Σκέψη: Ας υποθέσουμε η $f \in C^1$

$\Rightarrow$ ολοκλήρωση κατά μέρη έχω $\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx = 0$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 f'(x)\phi(x)\,dx + (f\phi)\Big|_0^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\,\phi(x)dx = 0 \ , \ \phi(0) = \phi(1) = 0$$

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx = 0$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

εσωτερικό γινόμενο

$$\langle 1, \phi \rangle = \int_0^1 \phi(x)\,dx = 0 \qquad , \phi \perp 1$$

$$\int_0^1 f'\phi\,dx = 0 \ , \ \langle f', \phi \rangle = 0 \ , \ \phi \perp f'$$

Γνώριμο πλαίσιο: Έχουμε διανυσμ. χώρο $V = n$ ($n$ = η διάσταση)

Ψάχνουμε να βρούμε το $\vec{x}$ τ.ω. $\dim W = n-1$

$$\vec{x} \perp W \leq V$$

Γνωρίζουμε $\vec{\alpha} \perp W$

$V = W \oplus \langle \vec{\alpha} \rangle$

↳ ευθύ άθροισμα με τον υπόχωρο που παράγει το $\vec{\alpha}$

$\Rightarrow \vec{x} = \lambda \vec{\alpha}$

$\Rightarrow f' = \lambda \cdot 1 \Rightarrow f(x) = \lambda x + c_1$

(Σκέψεις για το συμπέρασμα)

Σκέψεις για την Απόδειξη:

Να επιλέξουμε $\phi$ που να μοιάζει στο αποτέλεσμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1 (Λήμματος)

Επειδή έχουμε $\int_0^1 f(x)\phi'(x)dx = 0$ έχουμε για $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 (f(x) - c_1 x - c_2)\phi'(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 f\phi'(x)\,dx - c_1\int_0^1 x\phi'\,dx - c_2\int_0^1 \phi'(x)\,dx =$$

$$= 0 - c_1\Big[-\int_0^1 x'\phi(x)\,dx + \underbrace{(x\phi(x))\Big|_0^1}_{=0}\Big] - c_2\underbrace{\int_0^1 \phi(x)\,dx}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - c_1 x_1 - c_2)\phi'(x)\,dx = 0$$

Μήπως μπορώ να βρω $\phi$ ώστε $\boxed{\phi'(x) = f(x) - c_1 x - c_2}$

Αν μπορούσα θα είχαμε $\int_0^1 (f(x) - c_1 x - c_2)^2 dx = 0$

$\Rightarrow f(x) \equiv c_1 x + c_2$

Δοθείσης της $f \in C[0,1]$, $\exists\ \phi \in C^1[0,1]$ ώστε

$\phi(0) = \phi(1) = 0$ κ' $\int_0^1 \phi(x)\,dx = 0$ και $\phi'(x) = f(x) - c_1 x - c_2$

$\Rightarrow \exists\ c_0 \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \int_0^x f(s)\,ds - \frac{c_1}{2}x^2 - c_2 x + c_3$$

Όμως, $\phi(0) = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0$, $\phi(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{2} + c_2 = \int_0^1 f(t)\,dt$$

<u>Επίσης</u> $\int_0^1 \phi(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[ \int_0^x f(t)\,dt - \frac{c_1}{2}x^2 - c_2 x \right] dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left( \int_0^x f(t)\,dt \right) dx - \frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{6} + \frac{3c_2}{2} = 6\int_0^1 \int_0^x f(t)\,dt\,dx$$

Το σύστημα έχει λύση, δηλ. δοθείσης της $f$ $\exists\, c_1, c_2$ ώστε $\phi(x) = \int_0^x f(s)\,ds - \frac{c_1}{2}x^2 - c_2 X$, ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις που θέλαμε να ικανοποιεί η $\phi$.

~~αν επιλέξω τα $c_1, c_2$ αυτά που βρήκα πριν~~

και επομένως αν επιλέξω τα $c_1, c_2$ αυτά που βρήκα πριν

$$\int_0^1 (f(x) - c_1 x - c_2)\phi'(x)\,dx = 0$$

$$\phi'(x) = f(x) - c_1 X - c_2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f(x) - c_1 x - c_2)^2\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = c_1 X + c_2}$$

<u>Επιστροφή στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης</u>

Αν $u_0$ ο ελαχιστοποιητής τότε

$$\Rightarrow \int_0^1 u_0'(x)\phi'(x)\,dx = 0 \quad \forall \phi \in C^1[0,1],\ \phi(0) = \phi(1) = 0$$

$$\text{κ'} \int_0^1 \phi(x)\,dx = 0$$

Από το λήμμα $\Rightarrow$ $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $u_0'(x) = c_1 X + c_2,\ x \in [0,1]$

$$u_0(x) = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$$

$$u_0(0) = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0$$

$$u_0(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{c_1}{2} + c_2 = 1$$

$$\int_0^1 u_0(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left( \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 X \right) dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{6} = 1$$

$$c_1 + 2c_2 = 2 \quad c_1 + 3c_2 = -6 \iff c_1 = 4 \quad c_2 = -6$$

Άρα $u_0(x) = -3x^2 + 4x$, $x \in [0,1]$

Θα αποδείξουμε ότι όντως

$$J(u) \geq J(u_0) = \int_0^1 (-6x+4)^2 \, dx$$

$$= \frac{-(-6x+4)^3}{18} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{12}[8+64] = \frac{72}{18} = \frac{36}{2} = 4$$

Πράγματι έστω $u \in A$, $\int_0^1 u(x)\,dx = 1$

$$J(u) = \int_0^1 (\overbrace{u'(x) - u_0'(x)}^{\phi'} + u_0'(x))^2 \, dx$$

$$= \boxed{\int_0^1 (u_0'(x))^2 \, dx} + 2\underbrace{\int_0^1 u_0'(x)\phi'(x)\,dx}_{0} + \int_0^1 (\phi'(x))^2 \, dx \geq 4.$$

## Λογισμός Μεταβολών      10/03/2021

Πρόβλημα που μας απασχολεί:

Να βρούμε τοπικά ακρότατα συναρτησοειδούς $J(u)$, $u \in A$ με την δέσμευση $G(u)=0$.

---

Αρχικά είδαμε πως δούλευε το πρόβλημα εύρεσης πιθανών τοπικών ακρότατων (χωρίς δέσμευση) $J(u)$, $u \in A$.

Πήραμε αρχικά $\phi$ τ.ω. $u \in A$ ~~τέτοιο~~ ώστε $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $u+\varepsilon\phi \in A$

Αν $\omega \in A$ είναι τοπικό ελάχιστο (ακρότατο) του συναρτησοειδούς $J(u)$, τότε $J(\omega+\varepsilon\phi) \geq J(\omega)$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$

Αν $f(\varepsilon)=J(\omega+\varepsilon\phi)$, τοτε $f(\varepsilon) \geq f(0)$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$

και εαν γνωρίζουμε ότι παραγωγίζεται στο $\varepsilon=0$ προκύπτει τότε $f'(0)=0$.

Όμως $f(\varepsilon)=J(\omega+\varepsilon\phi)$ αν γνωρίζουμε $\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon-0}$

Υπόθεση: Το όριο αυτό θέλω να υπάρχει

$$\lim_{\theta\to\varepsilon} \frac{J(\omega+\theta\phi)-J(\omega+\varepsilon\phi)}{\theta-\varepsilon} = \delta J(\omega+\varepsilon\phi;\phi)$$

$\left( \forall\, u \in A,\ u+\varepsilon\phi \in A \right.$ θέλω να $\exists$ το

$$\left. \delta J(u;\phi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon\phi)-J(\ )}{\varepsilon} \right)$$

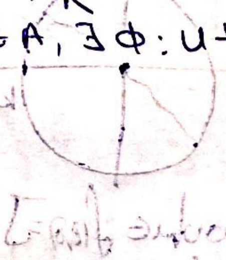
Πιθανά τοπικά ακρότατα $\omega \in A$ ικανοποιούν (Ασθενή Μορφή Euler-Lagrange)

$\Rightarrow \delta J(\omega;\phi)=0$, $\forall\, \phi$ τ.ω. $\omega+\varepsilon\phi \in A$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$

---

Υποθέτουμε ότι το συναρτησοειδές $J$, $J: A \to \mathbb{R}$

$\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{J(u+\varepsilon\phi)-J(u)}{\varepsilon} := \delta J(u;\phi)$   $u \in A$, $\exists\, \phi: u+\varepsilon\phi \in A$, $\forall\, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$



## ΘΕΩΡΗΜΑ

Εύρεση τοπικών ακροτάτων του $\underset{u\in A}{J(u)}$ με την δέσμευση $G(u)=0$ :

Υποθέσεις στο $J, G$. Θέλουμε να $\exists\ \delta J(u;\phi)$, $\delta G(u;\phi)$, $\forall u\in A$, $\forall \phi : u+\varepsilon\phi\in A, |\varepsilon|<\varepsilon_0$

όπως επίσης αν $u\in A$, $\boxed{G(u)=0}$, θέλουμε να $\exists\ \phi\neq 0$, $u+\varepsilon\phi\in A$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ και $\delta G(u;\phi_1)\neq 0$.

Τότε, αν $\omega\in A$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\left.\begin{array}{l}\delta J(\omega;\phi)=\lambda\,\delta G(\omega;\phi),\quad G(\omega)=0\\ \forall \phi \text{ τ.ω. } \omega+\varepsilon\phi\in A,\ |\varepsilon|<\varepsilon_0.\end{array}\right]\ \text{Ασθενής Μορφή Euler-Lagrange}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

$G(\omega)=0$ από το θεώρημα

Θα επιλέξουμε δύο συναρτήσεις, $\phi_1, \phi$ τυχαία ώστε $u\in A$, $u+\varepsilon\phi\in A$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$

Ορίζουμε $g(\varepsilon,\delta)=G(\omega+\varepsilon\phi_1+\delta\phi)$

και έχουμε ότι $g(0,0)=0$ $(=G(\omega)=0)$

Η $g$ παραγωγίζεται ως προς $\varepsilon,\delta$ και μάλιστα

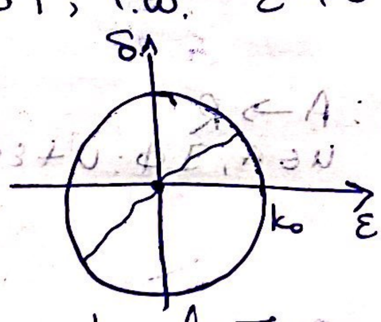
$$g_\varepsilon(\varepsilon,\delta)=\delta G(\omega+\varepsilon\phi_1+\delta\phi;\phi_1)$$

$$g_\delta(\varepsilon,\delta)=\delta G(\omega+\varepsilon\phi_1+\delta\phi;\underbrace{\phi}_{\text{κατεύθυνση που παίρνω την παράγωγο}})$$

Όμως, $\left(g_\varepsilon(0,0), g_\delta(0,0)\right)=\Big(\underbrace{\delta G(\omega;\phi_1)}_{\text{πρώτη μεταβολή του } G(\omega) \text{ στην κατεύθυνση } \phi_1}, \delta G(\omega;\phi)\Big)\neq 0$

και επομένως από Θ. Πεπλεγμένης συνάρτησης $\exists\ k_0>0$

$\exists\ (\varepsilon,\delta)$, τ.ω. $\varepsilon^2+\delta^2<k_0^2$ και $g(\varepsilon,\delta)=G(\omega+\varepsilon\phi_1+\delta\phi)=0$




Επίσης, έχουμε $f(\varepsilon,\delta)=J(\omega+\varepsilon\phi_1+\delta\phi)\geq J(\omega)$

$\Rightarrow f(\varepsilon,\delta)\geq f(0,0)$, $g(\varepsilon,\delta)=0$

$\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\quad(\nabla g(0,0)\neq(0,0))$

$\nabla f(0,0)=\lambda\nabla g(0,0)$

...ότε έχουμε $f_\varepsilon(0,0)=\lambda g_\varepsilon(0,0)$

$\iff \boxed{\delta J(\omega;\phi_1)=\lambda G(\omega;\phi_1)}$

και $f_\delta(0,0)=\lambda g_\delta(0,0) \iff \boxed{\begin{matrix}\delta J(\omega;\phi)=\lambda G(\omega;\phi)\\ G(\omega)=0\end{matrix}}$

$\forall \phi : \omega+\varepsilon\phi \in A, \ |\varepsilon|<\varepsilon_0$

## ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

**Άσκηση 3η**

$f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\phi_x(x,y)\,dx\,dy=0$

$\forall\ \phi \in A=\{u\in C^1[0,1]^2,\ u(0,y)=u(1,y)=0,\ 0\le y\le 1\}$

$\Longrightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\ \forall (x,y)\in[0,1]^2$

**Λύση:**

Θέτουμε $\phi_x(x,y)=f(x,y)-\int_0^1 f(t,y)\,dt$

$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x f(t,y)\,dt - x\int_0^1 f(t,y)\,dt\right)$

$\iff \frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x,y)-\int_0^x f(t,y)\,dt+x\int_0^1 f(t,y)\,dt\right]=0$

$\overset{\exists g \text{ τω.}}{\iff} \phi(x,y)-\int_0^x f(t,y)\,dt+x\int_0^1 f(t,y)\,dt=g(y)$

$\iff \phi(x,y)=g(y)+\int_0^x f(t,y)\,dt - x\int_0^1 f(t,y)\,dt$

Όμως πρέπει $\phi(0,y)=0 \iff g(y)\equiv 0$

και επίσης θέλουμε $\phi(1,y)=0 \iff \int_0^1 f(t,y)\,dt-\int_0^1 f(t,y)\,dt=0$

και τότε επειδή $\iint\left(f(x,y)-\int_0^1 f(t,y)\,dt\right)\phi_x(x,y)\,dx\,dy=$

$=\underbrace{\iint f(t,y)\phi_x(x,y)\,dx\,dy}_{0} - \int_0^1\int_0^1\left[\int_0^1 f(t,y)\,dt\,\phi_x(x,y)\right]dx\,dy$

$=-\int_0^1\left(\left(\int_0^1 f(t,y)\,dt\right)\int_0^1\phi_x(x,y)\,dx\right)dy=0$

αφού $\int \phi_x(x,y)\,dx = \phi(1,y) - \phi(0,y) = 0.$

Θέτουμε $\phi(x,y) = \int_0^x f(t,y)\,dt - x\int_0^1 f(t,y)\,dt$

$\Longrightarrow \phi_x(x,y) = f(x,y) - \int_0^1 f(t,y)\,dt$

$\overset{\text{Σχέση}}{\Longrightarrow} \int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y) - \int_0^1 f(t,y)\,dt\right)^2 dx\,dy = 0$

$\Longrightarrow f(x,y) = \int_0^1 f(t,y)\,dt$

$\Longrightarrow f_x(x,y) = 0.$

## Άσκηση 4η

$f, g \in C[0,1]^2$;

$\int_0^1\int_0^1 [f\phi + g\phi_x]\,dx\,dy = 0, \ \forall \phi \in C^1[0,1]^2$

$\phi(0,y) = \phi(1,y) = 0, \ \forall y \in [0,1].$

Ν.δ.ο $\Longrightarrow \exists \ \frac{\partial g}{\partial x}$ και μάλιστα $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y), \ \forall (x,y) \in [0,1]^2.$

Λύση:

Θέτουμε $F(x,y) = \int_0^x f(t,y)\,dt$,

η $F$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$F_x(x,y) = f(x,y), \ \forall (x,y) \in [0,1]^2$

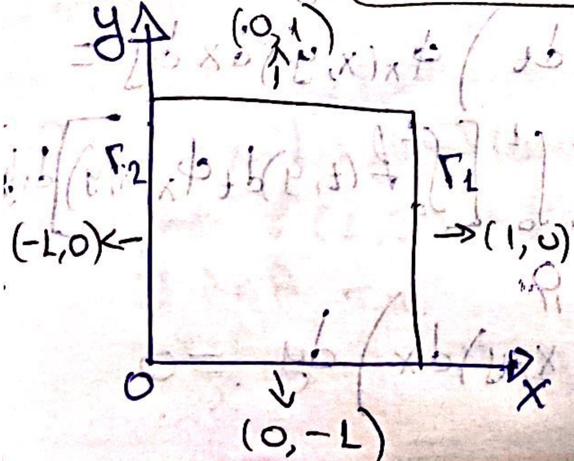
και το ολοκλήρωμα γράφεται:

$\iint (fg + g\phi_x)\,dx\,dy = 0 \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 [F_x\phi + g\phi_x]\,dx\,dy = 0$

και τότε $\int_0^1 \boxed{\int_0^1 F_x(x,y)\phi(x,y)\,dx}\,dy = -\int_0^1\int_0^1 F(x,y)\phi_x(x,y)\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega} F\phi\, v_1$

$\hookrightarrow v = (v_1, v_2)$

$\underset{\overset{||}{0}}{\int_0^1 F\phi\,dy - \int_0^1 F\phi\,dy}$



και επομένως παίρνουμε $\int_0^1\int_0^1 \underbrace{[g(x,y)-F(x,y)]}_{\text{παίρνουμε συνεχή}}\phi_x(x,y)\,dx\,dy = \ldots$

(Άσκηση 3) $\Rightarrow$ η $x \mapsto g(x,y)-\int_0^x f(t,y)\,dt$ παραγωγίζεται ως προς $x$ και μάλιστα $\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y)-\int_0^x f(t,y)\,dt\right)=0$

και επειδή η $\int_0^x f(t,y)\,dt$ παραγωγίζεται ως προς $y$ προκύπτει ότι και η $g$ παραγωγίζεται και μάλιστα αν παρω παίρνουμε

$$g_x(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(t,y)\,dt=0$$

$$\Leftrightarrow g_x(x,y)=f(x,y),\ \forall (x,y)\in[0,1]^2$$

$$\iint_\Omega f_x(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy = -\iint_\Omega f\,g\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega} f\,g\,\nu_1\,ds$$

## Άσκηση 2η

Να βρεθεί η πιθανή ελαχιστοποίηση του προβλήματος

$$J(u)=\int_0^1\left(2e^x u(x)+(u'(x))^2\right)dx$$

$$u\in A=\{u\in C^1[0,1],\ u(0)=0,\ u(1)=1\}$$

Να βρεθεί με απόδειξη η ελάχιστη τιμή.

Λύση:

$F(x,y,z)=2e^x y+z^2$ είναι $C^1$ και

$\phi\in C^1[0,1],\ \phi(0)=\phi(1)=0.$

τα πιθανά τοπικά ακρότατα ως $A$, ικανοποιούν

$$\delta J(w;\phi)=0,\ \forall\,\phi\in C^1[0,1],\ \phi(0)=\phi(1)=0$$

$$\delta J(w;\phi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(w+\varepsilon\phi)-J(w)}{\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}J(w+\varepsilon\phi)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$J(\omega+\varepsilon\phi)=\int_0^1\left(2e^x(\omega(x)+\varepsilon\phi(x))+(\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x))^2\right)dx$$

$$=\int_0^1 2e^x\omega(x)\,dx+\varepsilon\int_0^1 2e^x\phi(x)+\int_0^1(\omega'(x))^2dx+$$

$$+2\varepsilon\int_0^1\omega'(x)\phi'(x)\,dx+\varepsilon^2\int_0^1(\phi'(x))^2dx$$

$$\Rightarrow\frac{dJ}{d\varepsilon}(\omega+\varepsilon\phi)=\int_0^1 2e^x\phi+2\int_0^1\omega'\phi'+2\varepsilon\int_0^1(\phi'(x))^2dx$$

$$\Rightarrow\delta J(\omega;\phi)=0\Leftrightarrow\int_0^1(2e^x\phi(x)+2\phi'(x)\omega'(x))\,dx=0$$

$$\forall\phi\in C^1[0,1],\ \phi(0)=\phi(1)=0$$

Λήμμα $\Rightarrow$ η $2\omega'(x)$ παρ/ται και $(2\phi'(x))'=2e^x$

$$\Rightarrow 2\omega'(x)=2e^x+c_1$$

$$\Rightarrow 2\omega(x)=2e^x+c_1x+c_2$$

$$\Rightarrow \omega(x)=e^x+\frac{c_1}{2}x+\frac{c_2}{2}$$

- $\omega(0)=0\Leftrightarrow 1+\frac{c_2}{2}=0$
  $\Leftrightarrow\frac{c_2}{2}=-1$
- $\omega(1)=1\Leftrightarrow e+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}=1\Leftrightarrow\frac{c_1}{2}=2-e$

Επομένως,

$$\omega(x)=e^x+(2-e)x-1,\quad x\in[0,1]$$

$\longrightarrow$ ο πιθανός ελαχιστοποιητής

$\omega'(x)=e^x+2-e$

$$J(\omega)=\int_0^1(2e^x\omega+(\omega')^2)\,dx=\int_0^1\Big(2e^x(e^x+(2-e)x-1)+(e^x+2-e)^2\Big)dx$$

$$=\ldots\ldots$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν $f(x,y,z)$ είναι κυρτή ως προς $(y,z)\Rightarrow u\in A$, $\omega$ ελαχιστοποιητής

$$\Rightarrow J(u)=\int_0^1 f(x,u(x),u'(x))\,dx\geq J(\omega)$$

Στην περίπτωση μας $f(x,y,z)=2e^xy+z^2$

Αρκεί ο πίνακας $\begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$ να είναι θετικά ορισμένος

$f_y = 2e^x$, $f_{yy} = 0$

$f_z = 2z$, $f_{zz} = 2$

$f_{zy} = 0 = f_{yz}$

Άρα, ο πίνακας μου γίνεται

$$\begin{pmatrix} \xi \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ n \end{pmatrix} = 2n^2 \geq 0$$

<u>Εναλλακτικά</u>

$u \in A$, $w$ η λύση. $\phi = u - w \in C^1[0,1]$, $\phi(0) = \phi(1) = 0$

$$J(u) = J(w + \overbrace{u-w}^{\phi}) = \int_0^1 \left(2e^x(w+\phi) + (w' + \phi')^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 2e^x w\, dx + \int_0^1 2e^x \phi\, dx + \int_0^1 (w')^2 dx + 2\int_0^1 w'\phi' dx + \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx$$

$$\Rightarrow J(u) = J(w) + 2\underbrace{\int_0^1 [2e^x\phi + w'\phi']\, dx}_{\substack{\text{Euler-Lagrange} \\ \parallel \\ 0}} + \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx$$

$\Rightarrow J(u) \geq J(w)$, $\forall u \in A$

# Λογισμός Μεταβολών

17/03/2021

Ποιο ήταν το πρόβλημα μας?

Να βρούμε πιθανά τοπικά ακρότατα $J(u)$, $u \in A$ με δέσμευση $G(u)=0$.

Αν $u \in A$ τ.ω. $G(u)=0$ θα πρέπει:

$\exists\ \delta J(u;\phi)$, $\exists\ \delta G(u;\phi)$

$u \in A$, $u+\varepsilon\phi \in A$, $\forall\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$

$\exists\ \phi_1$ τ.ω. $\delta G(u;\phi_1) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists\ \lambda \in R$ τ.ω. να ισχύουν:

- Αν $u$ τοπικό ακρότατο $\Rightarrow \delta J(u;\phi) = \lambda G(u;\phi)$, $\forall\ \phi$ τ.ω. $u+\varepsilon\phi \in A$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $F:[\alpha,\beta]\times R^2 \to R$ είναι $C^1$ συνάρτηση και $g:[\alpha,\beta]\times R \to R$ είναι $C^1$ συνάρτηση

Το πρόβλημα? ελαχιστοποίησης του (δοθέντων των $c_1, c_2 \in R$)

$$J(u) = \int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\,dx,$$

$$u \in A = \{u \in C^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$$

με την δέσμευση

$$G(u) = \int_\alpha^\beta g(x,u(x))\,dx = 0$$

Αν $w \in A$ είναι πιθανός ελαχιστοποιητής, υποθέτουμε ότι $\exists\ \phi_1 \in C^1[\alpha,\beta]$ με $\phi_1(\alpha)=\phi_1(\beta)=0$ ικανοποιεί $G(w)=0$ και το $\phi_1$ είναι τέτοιο ώστε ο

$$\delta G(w;\phi_1) = \int_\alpha^\beta g_u(x,w(x))\,\phi_1(x)\,dx \neq 0$$

τότε $\exists\ \lambda \in R$ τ.ω. να ισχύουν $\delta J(w;\phi) = \lambda\,\delta G(w;\phi)$, $\forall\ \phi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$

$G(w)=0$

$$\Longleftrightarrow \int_\alpha^\beta \left(F_u(x,w(x),w'(x))\,\phi(x) + F_{u'}(x,w(x),w'(x))\,\phi'(x)\right)dx =$$

$$= \lambda \int_\alpha^\beta g_u(x,w(x))\,\phi(x)\,dx.$$

Άρα,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)+F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\right]dx=$$

$$=\lambda\int_{a}^{\beta} g_u(x,\omega(x))\phi(x)\,dx$$

και ικανοποιείται

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x,\omega(x))\,dx=0.$$

Αν είχαμε $J(u)=\int_{\alpha}^{\beta}F(x,u(x),u'(x))dx$

$$G(u)=\int_{\alpha}^{\beta} g(x,u(x)\,u'(x))\,dx$$

και

$$\omega\in A=\{u\in C^1[\alpha,\beta]\mid u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$$

$\exists\ \omega\in A,\ \phi_1\in C^1[\alpha,\beta]$ με $\phi_1(\alpha)=\phi_1(\beta)=0$

τ.ω.

$$G(\omega)=0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(x,\omega(x),\omega'(x))\,dx=0$$

(μεταβολή)

κ' $\delta G(\omega;\phi_1)\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[g_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi_1(x)+g_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi_1'(x)\right]dx\neq 0$$

Τότε αυτό $\omega\in A$ είναι τοπικό ακρότατο, ικανοποιεί την σχέση $\forall\ \phi\in C^1[\alpha,\beta],\ \phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)+F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\right]dx=$$

$$=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}\left[g_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)+g_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\right]dx$$

## Ισχυρή Μορφή:

Η συνάρτηση

$$F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) - \lambda g_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{d}{dx}\left[F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) - \lambda g_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\right] =$$

$$= F_u(x,\omega(x),\omega'(x)) - \lambda g_u(x,\omega(x),\omega'(x)), \quad \forall x\in[a,b]$$

//

Αντίστοιχα, αν είχαμε το πρόβλημα $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$I(u)=\int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$$

$$u\in A=\{u\in C^1(\bar\Omega),\ u(x)=h(x),\ \forall x\in\partial\Omega\}$$

Με την δέσμευση

$$J(u)=\int_\Omega g(x,u(x))\,dx=0$$

όπου η συνάρτηση $F:\bar\Omega\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ είναι $C^1$,

$g:\bar\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $C^1$ και αν $\omega\in A$ είναι τοπικό ακρότατο του προβλήματος ώστε

$$J(\omega)=\int_\Omega g(x,\omega(x))\,dx=0 \quad \text{και}$$

$\exists\ \phi_1\in C^1(\bar\Omega),\ \phi_1(x)=0,\ x\in\partial\Omega$.

και τέτοια ώστε

$$\delta J(\omega;\phi_1)=\int_\Omega g_u(x,\omega(x))\phi_1(x)\,dx\neq 0,$$

τότε $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιούν:

$$\delta I[\omega;\phi] = \lambda\, \delta J(\omega;\phi)$$

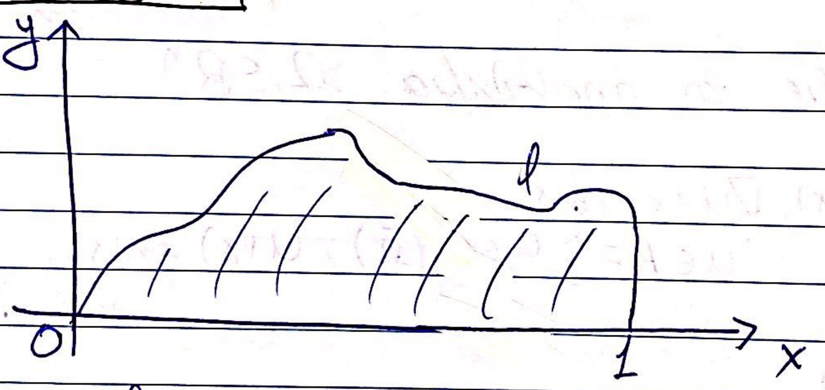
$$\int_\Omega \left[ F_u(x,\omega(x),\nabla\omega(x))\phi(x) + \nabla_\phi F(x,\omega(x),\nabla\omega(x))\cdot\nabla\phi(x) \right] dx$$

$$= \lambda \int_\Omega g_u(x,\omega(x))\phi(x)\,dx \quad , \quad \forall\, \phi \in C^1(\bar\Omega) \, , \quad \phi = 0|_{\partial\Omega}$$

και $\displaystyle\int_\Omega g(x,\omega(x))\,dx = 0$

//

<u>Παράδειγμα</u> (Πρόβλημα Dido)



Έστω $l > 1$, να βρεθούν συναρτήσεις $y \in C^1[0,1]$, $y(0) = y(1) = 0$ τέτοιες ώστε να μεγιστοποιείται το εμβαδόν:

$$E(y) = \int_0^1 y(x)\,dx$$

με την δέσμευση το σχοινί να έχει μήκος $l$.

$$L(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = l$$

Παρατήρηση

(Παραμετρικοποίηση καμπύλης
$$\sigma(x)=(x,y(x)),\quad x\in[0,1]$$
$$\sigma'(x)=(1,y'(x))$$
$\Rightarrow$ Μήκος Καμπύλης $= \int_0^1 |\sigma'(x)|\,dx$
$$=\int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \quad )$$

Θέλουμε
$$\max \mathcal{L}(y)=\int_0^1 y(x)\,dx$$
$$y\in A=\{y\in C^1[0,1],\ y(0)=y(1)=0\}$$
και τη δέσμευση:
$$L(y)=\ell=\int_0^1\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$
Οπότε, αν $\omega\in A$ μεγιστοποιεί την $\mathcal{E}$ θα πρέπει αρχικά $\int_0^1\sqrt{1+(\omega'(x))^2}\,dx=\ell$ και έπειτα $\exists\ \phi_1\in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi_1(\alpha)=\phi_1(\beta)=0$

και $\delta L(\omega;\phi_1)\neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\phi_1'(x)\,dx}_{\delta L(\omega;\phi_1)}\neq 0$

Υπάρχει $\phi_1$? Ισχυριζόμαστε ότι $\phi_1=\omega$ δουλεύει διότι
$$\delta L(\omega;\omega)=\int_0^1\frac{(\omega'(x))^2}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\,dx$$
αν είχαμε $\int_0^1 \frac{(\omega'(x))^2}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\,dx=0 \Leftrightarrow \omega'(x)=0$, $[0,1]$

$\exists c\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow \omega(x)=c$, όμως $\omega(0)=0 \Leftrightarrow c=0$. Άρα, $\omega(x)=0$.

Όμως το μήκος της ταυτοτικής συνάρτησης είναι $1 \neq \ell$

Δηλ.
$$L(0) = \int_0^1 \sqrt{1+(0')^2}\, dx = 1 \quad , \text{ αδύνατον.}$$
αφού $L(\omega) = \ell > 1$

και τότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε,

$$\delta E(\omega;\phi) = \lambda L(\omega;\phi) \quad , \forall \phi \in C^1[0,1],$$
$$\phi(0) = \phi(1) = 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+(\omega'(x))^2}\, dx = \ell.$$

(Θα ολοκληρωθεί την Δευτέρα !).

## 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

**Άσκηση 1η | Φυλ.2**

(1) $f, g : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{\frac{1+y^2}{x}}$ , $g(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \lambda y^2}$

Αποδείξτε ότι η $f$ δεν είναι κυρτή, ενώ η $g$ είναι κυρτή συνάρτηση.

Απόδειξη

(Αν η $F \in C^2$, η $F$ είναι κυρτή αν και μόνο αν $D^2 F \geq 0$ (θετικά ορισμένος πίνακας)).

Η συνάρτηση $f(x,y) = x^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}$ , $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

(Για να είναι $C^2$ θα πρέπει όλες οι μερικές παράγωγοι έως και 2ης τάξης να υπάρχουν και να είναι συνεχείς συναρτήσεις.)

είναι $C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ , και μάλιστα

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}(1+y^2)^{1/2}$$

$$f_y(x,y) = x^{-1/2} y (1+y^2)^{1/2 - 1} = x^{-1/2} y (1+y^2)^{-1/2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{3}{4} x^{-5/2} (1+y^2)^{+1/2}$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} y (1+y^2)^{-1/2} = f_{yx}(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) = x^{-1/2} \left( y (1+y^2)^{-1/2} \right)_y = x^{-1/2} \left( (1+y^2)^{-1/2} - y^2 (1+y^2)^{-3/2} \right)$$

$$= x^{-1/2} (1+y^2)^{-3/2} (1+y^2-y^2)$$

$$= x^{-1/2} (1+y^2)^{-3/2}$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} x^{-5/2} (1+y^2)^{1/2} & -\frac{1}{2} x^{-3/2} y (1+y^2)^{-1/2} \\ -\frac{1}{2} x^{-3/2} y (1+y^2)^{-1/2} & x^{-1/2} (1+y^2)^{-3/2} \end{pmatrix}$$

Είναι θετικά ορισμένος όταν οι δύο υποορίζουσες του είναι θετικές $\geq 0$

Θα πρέπει $\frac{3}{4} x^{-5/2} (1+y^2)^{1/2} \geq 0$

κ) $$\underbrace{\frac{3}{4} x^{-3} (1+y^2)^{-1} - \frac{1}{4} x^{-3} (1+y^2)^{-1}}_{\parallel} y^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{4} x^{-3} (1+y^2)^{-1} [3-y^2] \geq 0$$

Δεν είναι σωστό, καθώς αλλάζει πρόσημο.

Είναι $>0$ αν $y^2 < 3$

και είναι $<0$ αν $y^2 > 3$

Από την άλλη,

$$g(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \lambda y^2}, \quad \lambda > 0, \ x > 0, \ y \in \mathbb{R}$$

$$= \left( \frac{1}{x^2} + \lambda y^2 \right)^{1/2}$$

$$g_x(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)_x$$

$$= -\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2}$$

$$g_y(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2} \cdot 2\lambda y = \lambda y\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2}$$

$$g_{xy}(x,y) = -\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2} 2\lambda y =$$

$$= -\frac{2\lambda y}{x^3}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}$$

$$g_{xx}(x,y) = \frac{3}{x^4}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{3}{x^4}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{x^6}\left(\quad\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}}{x^6}\left[3x^2\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right) - 1\right]$$

$$g_{xx}(x,y) = \frac{\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}}{x^6}\left(2 + 3\lambda \cancel{x^2} y^2\right)$$

$$g_{yy}(x,y) = \left(\lambda y\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2}\right)_y$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{2}\lambda y\, 2\lambda y\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}\left[\frac{1}{x^2} + \lambda y^2 - \lambda y^2\right]$$

$$= \frac{\lambda}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}$$

Άρα ο πίνακας του Χες είναι:

$$D^2g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{1}{x^2}+\lambda y^2\right)^{-3/2}}{x^6}(2+3\lambda x^2y^2) & \frac{-2\lambda y}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}+\lambda y^2\right)^{-3/2} \\ \frac{-2\lambda y}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}+\lambda y^2\right)^{-3/2} & \frac{\lambda}{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+\lambda y^2\right)^{-3/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x^2}+\lambda y^2\right)^{-3/2}}{x^6}\begin{pmatrix} 2+3\lambda x^2y^2 & -2\lambda x^3y \\ -2\lambda x^3 y & \lambda x^4 \end{pmatrix}$$

Το να είναι θετικά ορισμένος προϋποθέτει ο πίνακας $\Gamma$ να είναι θετικά ορισμένος. Δηλ, οι υποορίζουσες του να είναι θετικές.

Δηλ.

$$2+3\lambda x^2y^2 > 0 \quad \kappa'$$

$$\lambda x^4(2+3\lambda x^2y^2) - 4\lambda^2 x^6 y^2 \geq 0.$$

(ΜΑΛΛΟΝ ΛΑΘΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ)

Φυλλάδιο 3ο, Άσκηση 1η

Θεωρούμε το συναρτησοειδές

$$J(u)=\int_0^{\pi/6}\left(\left(\cancel{u'(x)} - w_x\right)^2 + \cancel{a u(x)}\right) dx$$

αρχικά $u\in A=\{u\in C^1[0,\pi/6],\ u(0)=0,\ u(\pi/6)=1/2\}$

και μετά

$$u\in B=\{u\in C^1[0,\pi/6],\ u(\pi/6)=1/2\}.$$

Προσδιορίστε αρχικά τον πιθανό ελαχιστοποιητή και στην συνέχεια βρείτε με απόδειξη την ελάχιστη τιμή του $J$ στην πρώτη και δεύτερη περίπτωση.

Λύση:

Τα πιθανά τοπικά ακρότατα $w$ του $J$ ικανοποιούν

$$\delta J(w;\phi)=0 \iff \int_0^{\pi/6}\left[4\phi(x)-2(w'(x)-\cos x)\phi'(x)\right]dx=0$$

οπότε η αρχική $2(w'(x)-\cos x)$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$2(w''(x)+\sin x)=-4 \iff w''(x)+\sin x=-2$$

$$\Rightarrow w'(x)=\cos x+2c_1$$

$$\Rightarrow w(x)=\sin x+2c_1x+c_2$$

Λογισμός Μεταβολών 22/3/2021

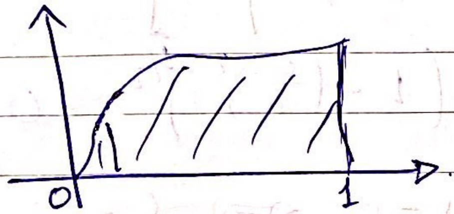
## Πρόβλημα

Μεγιστοποίηση του $E(y) = \int_0^1 y(x)\,dx$

$y \in A = \{ y \in C^1[0,1] \mid y(0) = y(1) = 0 \}$.

με την δέσμευση

$$L(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \ell \quad \text{όπου } \ell > 1.$$



Αν $w \in A$ πιθανός μεγιστοποιητής, τότε είδαμε ότι $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda \delta L(w;\phi) = \delta E(w;\phi)$, $\forall \phi \in A$.

$$\int_0^1 \sqrt{1+(w')^2}\,dx = \ell$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x)\,dx = \lambda \int_0^1 \frac{w'(x)}{\sqrt{1+(w'(x))^2}}\phi'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\frac{w'(x)}{\sqrt{1+(w'(x))^2}}\right)' = -1, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{w'(x)}{\sqrt{1+(w'(x))^2}} = -x + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{w'(x)}{\sqrt{1+(w'(x))^2}} = \frac{c-x}{\lambda}$$

$$\left( \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to (-1,1) \\ f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow f(w'(x)) = \frac{c-x}{\lambda}$$

$$\Rightarrow w'(x) = f^{-1}\left(\frac{c-x}{\lambda}\right) = \frac{\frac{c-x}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow w'(x) = \left[\lambda\left(1-\left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2}\right]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(x) = \lambda\left(1-\left(\frac{c-\lambda}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} + c_1$$

$w \in A$, $w(0)=0$, $w(1)=0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda\left(1-\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} + c_1 = 0$

$$c_1 = -\lambda\left(1-\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$w(x) = \lambda\left[\left(1-\left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} - \left(1-\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2}\right]$$

$$w(1)=0 \Leftrightarrow \left(1-\left(\frac{c-1}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} - \left(1-\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2 = c^2 \Leftrightarrow -2c+1=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow w(x) = \lambda\left[\left(1-\left(\frac{\frac{1}{2}-x}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} - \left(1-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\right)^{1/2}\right], \quad x\in[0,1]$$

Η δέσμευση είναι $w'(x) = \dfrac{\frac{1/2-x}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(\frac{1/2-x}{\lambda}\right)^2}}$

$$\int_0^1 \sqrt{1+(w'(x))^2}\,dx = \ell \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{1/2-x}{\lambda}\right)^2}} = \ell$$

Κάνω αλλαγή μεταβλητής $y = \dfrac{1/2-x}{\lambda} \Rightarrow dy = -dx$

$x=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2\lambda}$

$x=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2\lambda}$.

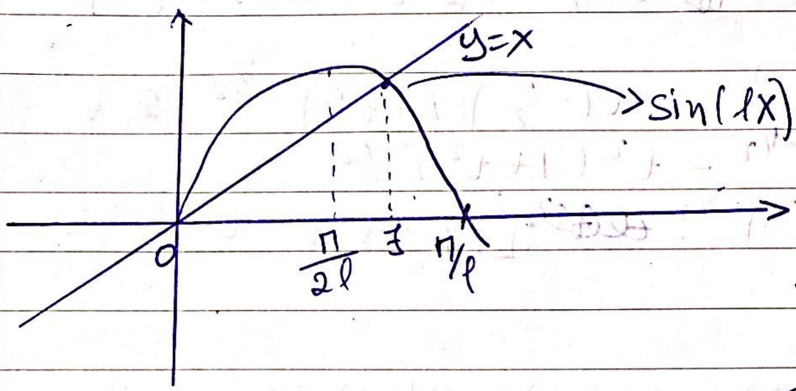
$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2\lambda}}^{-1/2\lambda} \frac{-\lambda\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \ell \Leftrightarrow \lambda\int_{-1/2\lambda}^{1/2\lambda} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \ell$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda\int_0^{1/2\lambda} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \ell \Leftrightarrow 2\lambda(\arcsin y)\Big|_0^{1/2\lambda} = \ell$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda \arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = \ell \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = \frac{\ell}{2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\lambda} = \sin\left(\frac{\ell}{2\lambda}\right)$$

$\frac{1}{2\lambda} = x$ , Μας ενδιαφέρει να λύσουμε την εξίσωση $x = \sin(\ell x)$




$\frac{\pi}{\ell} > \xi > \frac{\pi}{2\ell}$

$\iff \frac{\pi}{2\ell} < 1$

$\iff \ell > \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (0, \frac{\pi}{\ell})$ , $\xi = \sin(\ell \xi)$ και τότε $\frac{1}{2\lambda} = \xi$

$\iff \lambda = \frac{1}{2\xi}$

Βρίσκαμε έναν πιθανό μεγιστοποιητή

$$w(x) = \lambda\left(\left(1-\left(\frac{1/2 - x}{\lambda}\right)^2\right)^{1/2} - \left(1-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\right)^{1/2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\lambda} = \sin\left(\frac{\ell}{2\ell}\right)}$$

Το επόμενο ερώτημα είναι αν η $w$ μεγιστοποιεί το εμβαδό

Δηλ. $\forall\, y \in A$ $\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \ell$

$\Rightarrow E(y) \leq E(w)$

Πρόχειρο:

Αν $F(x,u,u')$ κυρτή ως προς $(u,u')$

$\Rightarrow$ Η $J(u)$ στα κρίσιμα σημεία παίρνει ελάχιστη τιμή, $u \in A$

$F(x,u(x),u'(x)) \geq F(x,u(x),u'(x)) + F_u(x,w(x),w'(x))(u-w)$
$+ F_{u'}(\quad)(u'-w')$

$$E(y) = \int_0^1 y(x)\, dx$$

$$L(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

Επιστημία $g(t) = \sqrt{1+t^2} = (1+t^2)^{1/2}$

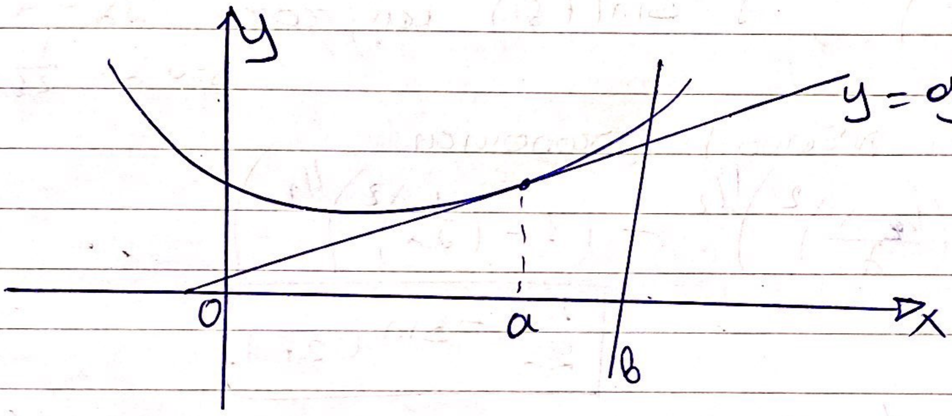
Έχουμε

$$g'(t) = \frac{1}{2}(1+t^2)^{-1/2} \cdot 2t = t(1+t^2)^{-1/2}$$

$$g''(t) = (1+t^2)^{-1/2} + t\left(-\frac{1}{2}\right)(1+t^2)^{-3/2} \cdot 2t$$
$$= (1+t^2)^{-1/2} - t^2(1+t^2)^{-3/2}$$
$$= (1+t^2)^{-3/2} \cdot \left[(1+t^2) - t^2\right] > 0$$

Άρα, η $g$ είναι κυρτή.

$g$ κυρτή $\Rightarrow$ $g(\beta) \geq g(\alpha) + g'(\alpha)(\beta - \alpha)$




$$\underbrace{y'}_{\beta} \qquad \underbrace{\omega'}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow g(y'(x)) \geq g(\omega'(x)) + g'(\omega'(x))(y'(x) - \omega'(x))$$

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} \geq \sqrt{1+(\omega'(x))^2} + \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}(y'(x) - \omega'(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}_{= \ell} \geq \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+(\omega'(x))^2}}_{= \ell} + \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}(y(x) - \omega(x))'\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}(y(x) - \omega(x))'\,dx \leq 0 \quad (1)$$

Έχουμε $\delta E(\omega;\phi) = \lambda \delta L(\omega;\phi)$, $\forall \phi \in A$

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx = \lambda \int_0^1 \left( \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega')^2(x)}} \phi'(x)\,dx \right)$$

$\left( \frac{1}{2\lambda} = \sin\left(\frac{\ell}{2\lambda}\right) \right)$

$\Rightarrow \phi(x) = y(x) - \omega(x)$

$\Rightarrow \omega$ είναι ο μεγιστοποιητής του εμβαδού. //

## ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

(Συνοριακές συνθήκες με ελεύθερο σύνορο)

Τοπικά ακρότατα του συναρτησιακού.

$$J(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\,dx,$$

$$u \in A = \{ u \in C^1[a,b] \mid u(a) = c_1 \}$$

Έχουμε δει αν $\omega \in A$ είναι ελαχιστοποιητής τότε $\delta J(\omega;\phi) = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b \left( F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) + F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x) \right) dx = 0$$

$$\forall \phi \in C^1[a,b],\ \phi(a) = 0$$

$\Rightarrow$ Αν ήταν $\phi(b) = 0 \Rightarrow$ η $F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη και $\frac{d}{dx} F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = F_u(x,\omega(x),\omega'(x))$

Αν $\phi(b) \neq 0 \Rightarrow$ με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

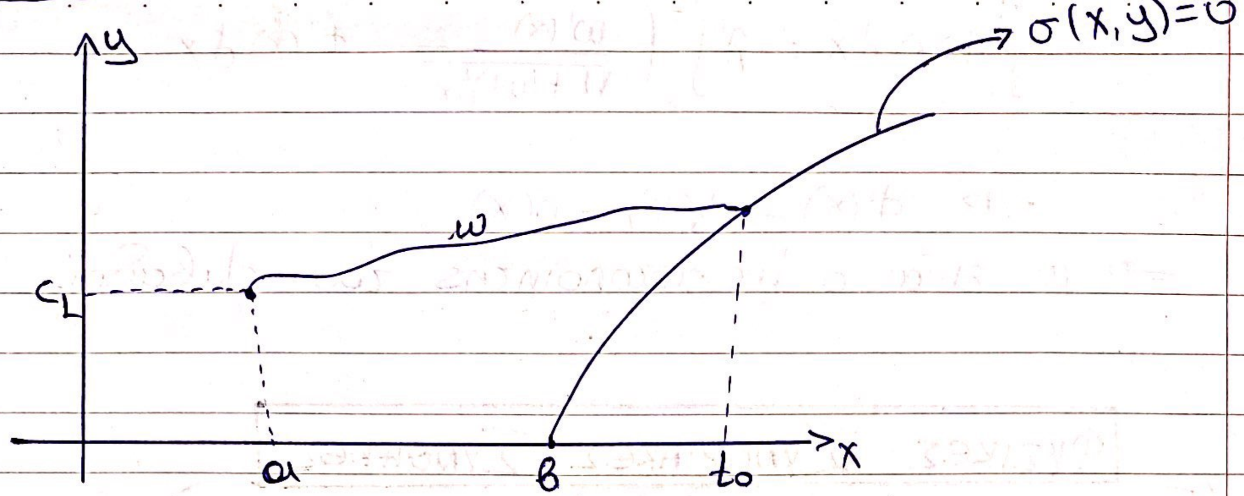
$$\int_a^b \left[ F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) - \frac{d}{dx} F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) \right] dx +$$

$$+ \left( F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) \right) \Big|_a^b = 0$$

$\Rightarrow F_{u'}(b,\omega(b),\omega'(b))\phi(b) = 0$, αν $\phi(b) \neq 0$

$\Rightarrow F_{u'}(b,\omega(b),\omega'(b)) = 0$

## Ερώτημα - Πρόβλημα:




Εύρεση τοπικών ακροτάτων του $J(y) = \int_a^t F(x, y(x), y'(x))\, dx$

$A_t = \{ y \in C^1[a,\gamma] \mid \sigma(t, y(t)) = 0 \}$

όπου: $\sigma \in C^1$, $\nabla\sigma \neq 0$

(αν $\sigma(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla\sigma(x,y) \neq (0,0)$)

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $F \in C^1([a,+\infty) \times \mathbb{R}^2)$, $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^2)$ τέτοια ώστε αν $\sigma(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla\sigma(x,y) \neq (0,0)$ και θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης τοπικών ακροτάτων του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_a^t F(x, u(x), u'(x))\, dx,$$

$$u \in A_t = \{ u \in C^1([\alpha,+\infty)),\ u(\alpha) = c_1,\ \sigma(t, u(t)) = 0 \}$$

Αν $(w, t_0) \in (A_{t_0}, \mathbb{R})$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου, τότε θα έχουμε:

(i) η συνάρτηση $F_{u'}(x, w(x), w'(x))$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα ισχύει

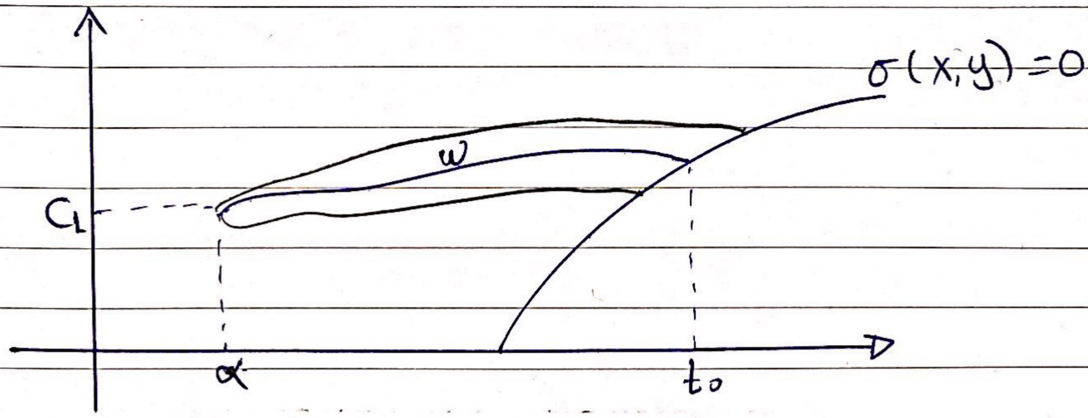
$$\frac{d}{dx} F_{u'}(x, w(x), w'(x)) = F_u(x, w(x), w'(x)), \quad a < x < t_0$$

(ii) $\sigma_y(t_0, w(t_0))\, F(t_0, w(t_0), w'(t_0)) =$

$$= F_{u'}(t_0, w(t_0), w'(t_0)) \{ \sigma_x(t_0, w(t_0)) + \sigma_y(t_0, w(t_0))\, w'(t_0) \}$$

και $\sigma(t_0, w(t_0)) = 0$

Ανάλυση του προβλήματος:




$\phi(\alpha)=0$ , $f\neq 0$

$\omega+\varepsilon\phi$

$t_0+\delta f$ ⟶ τυχαίο σημείο

Θέλουμε $\sigma(t_0+\delta f, \omega(t_0+\delta f+\varepsilon\phi(t_0+\delta f)))=0$

$\exists$ $\varepsilon, \delta$ τ.ω. $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ , $|\delta|<\delta_0$.

Έχουμε $\sigma(t_0, \omega(t_0))=0$ και γνωρίζουμε ότι $\nabla\sigma(t_0,\omega(t_0))\neq(0,0)$

Θέτουμε $g(\varepsilon,\delta)=\sigma(t_0+\delta f, \omega(t_0+\delta f)+\varepsilon\phi(t_0+\delta f))$

$$\Rightarrow g_\varepsilon(0,0)=\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\phi(t_0)$$

Αντίστοιχα,

$$g_\delta(0,0)=\sigma_x(t_0,\omega(t_0))\cdot f+\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\omega'(t_0)\cdot f$$

και

$$g_\varepsilon(0,0)=\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\phi(t_0)$$

Επίσης,

$$\sigma(t_0,\omega(t_0))=0 \Rightarrow \nabla\sigma(t_0,\omega(t_0))\neq(0,0)$$

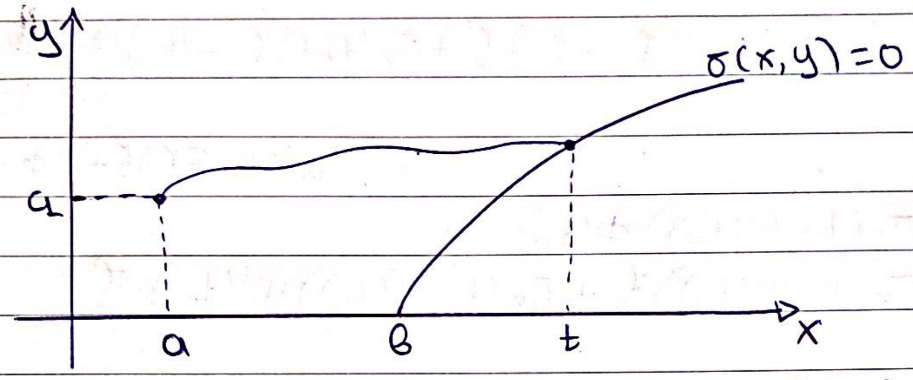
Άρα, $\nabla g(0,0)\neq(0,0)$.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ 24/03/2021

Εύρεση κρίσιμων σημείων του συναρτησιακού

$$J(u)=\int_a^t F(x,u(x),u'(x))\,dx$$

με $u\in A=\{u\in C^1[a,+\infty),\ u(a)=c_1,\ \sigma(t,u(t))=0\}$




$F,\sigma\in C^1$, αν $\sigma(x,y)=0 \Rightarrow \nabla\sigma(x,y)\neq(0,0)$

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Εαν $(w,t_0)$ είναι τοπικό ακρότατο του συναρτησοειδούς $J$,

$$J(u)=\int_a^t F(x,u(x),u'(x))\,dx$$

με $u\in A=\{u\in C^1[\alpha,+\infty),\ u(a)=c_1,\ \sigma(t,u(t))=0\}$

τότε θα ισχύουν:

(i) $\frac{d}{dx}F_{u'}(x,w(x),w'(x))=F_u(x,w(x),w'(x))$, $a\le x\le t_0$

(ii) $\sigma_\eta(t_0,w(t_0))F(t_0,w(t_0),w'(t_0))=$
$=F_{u'}(t_0,w(t_0),w'(t_0))\cdot\{\sigma_x(t_0,w(t_0))+\sigma_y(t_0,w(t_0))w'(t_0)\}$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επιλέγουμε $(\phi,\xi)\in C^1[\alpha,+\infty)\times\mathbb{R}$, $\phi(a)=0$

ώστε $(w+\varepsilon\phi,\ \underbrace{t_0+\delta\xi}_{t})\in A$

και θα πρέπει στο άλλο άκρο να ισχύει

$\sigma(t_0+\delta\xi,(w+\varepsilon\phi)(t_0+\delta\xi))=0$, $|\delta|<\delta_0$,
$|\varepsilon|<\varepsilon_0$

Για $\xi \neq 0$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(\varepsilon,\delta) = \sigma(t_0+\delta\xi,\ (\omega+\varepsilon\phi)(t_0+\delta\xi))$$

με $g(0,0) = \sigma(t_0, \omega(t_0)) = 0$

Έχουμε,

$$g_\varepsilon(\varepsilon,\delta) = \sigma_y(t_0+\delta\xi, \omega(t_0+\delta\xi)+\varepsilon\cdot\phi(t_0+\delta\xi))\cdot\phi(t_0+\delta\xi)$$

και

$$g_\delta(\varepsilon,\delta) = \sigma_x(t_0+\delta\xi, -\!\!/\!\!/\!\!-)\xi + \sigma_y(t_0+\delta\xi, -\!\!/\!\!/\!\!-)\underbrace{\frac{\partial}{\partial\delta}(\omega(t_0+\delta\xi)+\varepsilon\phi(t_0+\delta\xi))}_{\omega'(t_0+\delta\xi)\xi+\varepsilon\phi'(t_0+\delta\xi)\xi}$$

$\Rightarrow$ • $g_\varepsilon(0,0) = \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\phi(t_0)$

• $g_\delta(0,0) = \sigma_x(t_0,\omega(t_0))\xi + \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\omega'(t_0)\cdot\xi$

$\Rightarrow \nabla g(0,0) \neq (0,0)$

Έχουμε, $f(\varepsilon,\delta) = \displaystyle\int_a^{t_0+\delta\xi} F(x,\omega+\varepsilon\phi, \omega'+\varepsilon\phi'(x))\,dx$

$$f_\varepsilon(\varepsilon,\delta) = \int_a^{t_0+\delta}\left[F_u(x,\omega+\varepsilon\phi,\omega'+\varepsilon\phi')\phi(x) + F_{u'}(x,\omega+\varepsilon\phi,\omega'+\varepsilon\phi')\phi'(x)\right]dx$$

και

$$f_\delta(\varepsilon,\delta) = F(t_0+\delta\xi, (\omega+\varepsilon\phi)(t_0+\delta\xi), (\omega'+\varepsilon\phi')(t_0+\delta\xi))\xi$$

Έστω ότι το $(\omega, t_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο

$\Rightarrow f(\varepsilon,\delta) \geq f(0,0)$, $g(\varepsilon,\delta) = 0$

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(0,0) = \lambda\nabla g(0,0)$

$g(0,0) = 0 \Leftrightarrow \sigma(t_0,\omega(t_0)) = 0$

Άρα,

$$f_\varepsilon(0,0) = \int_a^{t_0}\left[F_u(x,\omega,\omega')\phi(x) + F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\right]dx$$

$f_\delta(0,0) = F(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))$

$g_\varepsilon(0,0) = \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\phi(t_0)$

$g_\delta(0,0) = (\sigma_x(t_0,\omega(t_0)) + \sigma_y(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))\xi$

Επομένως με αντικατάσταση έχουμε:

$$(1)\ \int_a^{t_0}\left[F_u(x,\omega,\omega')\phi + F_{u'}(x,\omega,\omega')\right]dx = \lambda\,\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\phi(t_0)$$

$$(2)\ F(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))\,\xi = \lambda\left(\sigma_x(t_0,\omega(t_0)) + \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\omega'(t_0)\right)\xi$$

Αν αρχικά υποθέσουμε $\phi(t_0)=0$, τότε από γνωστό λήμμα η συνάρτηση $F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{d}{dx}F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = F_u(x,\omega(x),\omega'(x)), \quad x\in[a,t_0].$$

Αν τώρα $\phi(t_0)\neq 0$, η σχέση (1) δίνει

$$\int_a^{t_0}(F_u\phi + F_{u'}\phi')\,dx = \lambda\,\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\phi(t_0)$$

$$\int_a^{t_0}\Big(F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\,\phi(x) - \underbrace{\tfrac{d}{dx}F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))}_{\parallel}\,\phi(x)\Big)dx \;\; (=0)$$

$$+\left(F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\,\phi(x)\right)\Big|_a^{t_0} = \lambda\,\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\phi(t_0)$$

$$F_{u'}(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))\,\phi(t_0) - F_{u'}(-\text{ιι}-)\,\underbrace{\phi(a)}_{=0} = \lambda\,\sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\phi(t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{u'}(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0)) = \lambda\,\sigma_y(t_0,\omega(t_0))} \quad (3)$$

Από την σχέση (2) έχουμε:

$$F(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))\,\cancel{\xi} = \lambda\left(\sigma_x(t_0,\omega(t_0)) + \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\omega'(t_0)\right)\cancel{\xi}$$

$$F_{u'}(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0)) = \lambda\,\sigma_y(t_0,\omega(t_0))$$

Επειδή $\nabla\sigma(t_0,\omega(t_0))\neq(0,0)$

$$\Rightarrow \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,F(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0)) = F_{u'}(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))\cdot$$

$$\cdot\left(\sigma_x(t_0,\omega(t_0)) + \sigma_y(t_0,\omega(t_0))\,\omega'(t_0)\right)$$

Φυσική Συνοριακή Συνθήκη στο $t_0$

Αν $\sigma(x,y) = b - x \Rightarrow \sigma_y = 0$
$\sigma_x = -1$

$\Rightarrow 0 = -F_{u'}(t_0, \omega(t_0), \omega'(t_0))$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΕΙΣ}}$

Φυλλάδιο 2, άσκηση (1 b) διόρθωση

Η $g(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \lambda y^2}$, $\lambda > 0$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ κυρτή.

$$g_x(x,y) = -\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2}$$

$$g_{xx}(x,y) = \frac{3}{x^4}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2} - \frac{-1/2}{x^3}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{3}{x^4}(\quad)^{-1/2} - \frac{1}{x^6}(\quad)^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{x^6}(\quad)^{-3/2}\left[3x^2\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{x^6}(\quad)^{-3/2}\left[2 + 3\lambda x^2 y^2\right]$$

$$g_{xy}(x,y) = \frac{\lambda y}{x^3}(\quad)^{-3/2}$$

$$g_y(x,y) = \lambda y\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-1/2}$$

$$g_{yy}(x,y) = \lambda\cdot(\quad)^{-1/2} + \lambda y(\quad)^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\lambda y\right)$$

$$= \lambda(\quad)^{-1/2} - \lambda^2 y^2(\quad)^{-3/2}$$

$$= \lambda(\quad)^{-3/2}\left[\frac{1}{x^2} + \lambda y^2 - \lambda y^2\right] = \frac{\lambda}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + \lambda y^2\right)^{-3/2}$$

Οπότε ο πίνακας είναι

$$D^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2+3\lambda x^2y^2}{x^6}(\quad)^{-3/2} & \frac{\lambda y}{x^2}(\quad)^{-3/2} \\ \frac{\lambda y}{x^3}(\quad)^{-3/2} & \frac{\lambda}{x^2}(\quad)^{-3/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x^2}+\lambda y^2\right)^{-3/2}}{x^6} \begin{pmatrix} 2+3\lambda x^2y^2 & \lambda x^3 y \\ \lambda x^3 y & \lambda x^4 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $D^2 g(x,y) \geq 0$ αν ισχύουν $2+3\lambda x^2y^2 > 0$
και $\lambda x^4(2+3\lambda x^2y^2) - \lambda^2 x^6 y^2$

$\parallel$

$\lambda x^4[2+3\lambda x^2y^2 - \lambda x^2y^2] = \lambda x^4(2+2\lambda x^2y^2) > 0$

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3ο

**Άσκηση 1η:**

$$J(u) = \int_0^{\pi/6} [(u'(x) - \cos x)^2 + 4u(x)]\, dx$$

$u \in A = \{u \in C^1[0,\frac{\pi}{6}],\ u(0)=0,\ u(\frac{\pi}{6}) = 1/2\}$

$u \in B = \{u \in C^1[0,\pi/6],\ u(\pi/6) = 1/2\}$

Να βρεθεί ο πιθανός ελαχιστοποιητής και να βρεθεί με απόδειξη η ελάχιστη τιμή.

**Λύση:** (Συνέχεια από προηγούμενη φορά)

Και στις 2 περιπτώσεις θα πρέπει αν $\phi(0)=0$

$\Rightarrow \delta J(\omega;\phi) = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} [2(\omega'(x) - \cos x)\phi'(x) + 4\phi(x)]\, dx = 0$$

και επομένως αν είχαμε πάρει $\phi(\frac{\pi}{6}) = 0$

$\Rightarrow$ Η $2(\omega'(x) - \cos x)$ παραγωγίζεται και ισχύει

$$2(w'(x)-\cos x)' = 4 \iff (w(x)-\sin x)'' = 2$$

$$w(x)-\sin x = x^2 + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow w(x) = \sin x + x^2 + c_1 x + c_2$$

<u>1η Περίπτωση:</u>

Αν $w \in A$, $w(0)=0$, $w\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c_2 = 0$, $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + c_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow c_1 = -\pi/6$, $c_2 = 0$

$$\Rightarrow w_A(x) = \sin x + x^2 - \frac{\pi}{6}x$$

<u>2η Περίπτωση:</u>

Αν $w \in B$, $w\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Θα βρούμε την φυσική συνοριακή συνθήκη $f_{u'}(0,w(0),w'(0))=0$

$$\int_0^{\pi/6}\left[2(w'(x)-\cos x)\phi'(x) + 4w(x)\right]dx = 0$$

$$\|$$

$$\int_0^{\pi/6}\left[-2(w'(x)-\cos x)' + 4\right]\phi(x)\,dx + \left(2(w'(x)-\cos(x)\phi(x))\right)\Big|_0^{\pi/6} = 0$$

$$\iff 2\left(w'\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-\cos\tfrac{\pi}{6}\right)\overset{=0}{\phi\left(\tfrac{\pi}{6}\right)} - 2(w'(0)-\cos 0)\phi(0) = 0$$

Εαν $\phi(0) \neq 0 \Rightarrow w'(0) = 1$

Η εύρεση των σταθερών είναι τότε $w(x) = \sin x + x^2 + c_1 x + c_2$

$w'(x) = \cos x + 2x + c_1$

$$\left.\begin{matrix} w\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1/2 \\ w'(0) = 1 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} \sin\frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + c_1\frac{\pi}{6} + c_2 = \frac{1}{2} \\ \cos 0 + 2\cdot 0 + c_1 = 1 \end{matrix}\right. \iff c_1 = 0$$

$$\iff \begin{matrix} c_2 = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \\ c_1 = 0 \end{matrix}$$

Άρα, ο πιθανός ελαχιστοποιητής είναι:

$$w_B(x) = \sin x + x^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

Τότε $J(w_A) = \int_0^{\pi/6} \cdots = 4 - 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3$

$$J(w_B) = 4 - 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3$$

Γιατί είναι οι $w_A, w_B$ ελαχιστοποιητές;

$\Rightarrow$ γιατί η $F(x,u,u') = (u' - \cos x)^2 + 4u$ είναι κυρτή ως προς $u, u'$;

Έχουμε
$$F_{u'} = 2(u' - \cos)$$
$$F_{u'u} = 0$$
$$F_{u'u'} = 2$$
$$F_u = 4$$
$$F_{uu} = 0$$

Άρα, ο πίνακας
$$D^2F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
είναι θετικά ορισμένος

Στην περίπτωση B:

$u \in B$ $\quad [u \in C^1(0, \frac{\pi}{6}]$, $u(\frac{\pi}{6}) = 1/2]$

$\xRightarrow{\text{θα αποδείξουμε}}$ $J(u) \geq J(w_B)$

Έχουμε, (θεωρώ $u - w = \phi$)

$$J(u) = J(w_B + u - w_B)$$
$$= \int_0^{\pi/6} \left[(w' + u' - w' - \cos x)^2 + 4(w + u - w)\right] dx$$
$$= \int_0^{\pi/6} \left[(w' - \cos x - \phi')^2 + 4(w + \phi)\right] dx$$
$$= \int_0^{\pi/6} \left[(w' - \cos x)^2 + 2(w' - \cos x)\phi' + (\phi')^2 + 4w + 4\phi\right] dx$$
$$= J(w) = \underbrace{\int_0^{\pi/6} \left[2(w' - \cos x)\phi' + 4\phi\right] dx}_{= 0} + \int_0^{\pi/6} (\phi')^2 dx$$

$\phi = u - w$

$\phi(\frac{\pi}{6}) = u(\frac{\pi}{6}) - w(\frac{\pi}{6}) = 0$

$$\Rightarrow J(u) = J(w) + \int_0^{\pi/6} (\phi'(x))^2 dx \geq J(w)$$

Λογισμός Μεταβολών 29/03/2021

Πρόβλημα

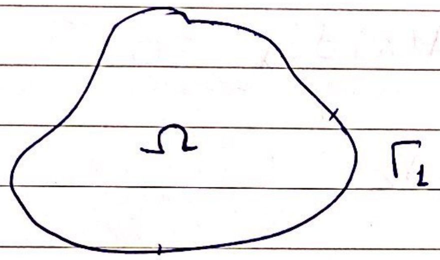
Εύρεση ελαχιστοποιητή του προβλήματος

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

$$u \in A_g = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \mid u(x) = g(x),\ x \in \Gamma_1 \subset \partial\Omega\}$$

Ερώτημα:

Ποια είναι η φυσική συνοριακή συνθήκη στο $\partial\Omega - \Gamma_1$




Αν $\omega \in A_g$ είναι ελαχιστοποιητής του προβλήματος $\phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ και είναι τ.ω. $\phi|_{\Gamma_1} = 0$ τότε $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\omega + \varepsilon\phi \in A_g$ και επομένως

$$f(\varepsilon) = I[\omega + \varepsilon\phi] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\omega + \varepsilon\nabla\phi|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\omega + \varepsilon\nabla\phi)(\nabla\omega + \varepsilon\nabla\phi)\, dx$$

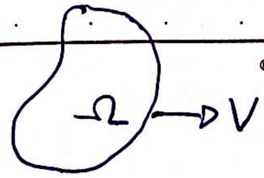
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left((\nabla\omega)^2 + 2\varepsilon\nabla\omega\nabla\phi + \varepsilon^2(\nabla\phi)^2\right) dx$$

και επομένως $f'(0) = 0$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla\omega\nabla\phi\, dx = 0, \quad \forall\, \phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}),\ \phi|_{\Gamma_1} = 0$$

|| ταυτότητα Green

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\nabla\omega)\phi\, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla\omega \cdot \nu\, \phi(x)\, ds = 0$$



Αρχικά σου είχαμε επιδέξει $\phi|_{\gamma_0} = 0$

$$\Rightarrow -d\omega(\nabla \omega(x)) = 0 \Leftrightarrow -\Delta \omega(x) = 0 \quad , x \in \Omega$$

και επειδή $\nabla \omega(x) \cdot \gamma = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}(x)$

$$-\int_\Omega \underbrace{\Delta \omega(x)}_{=0} \phi(x)\, dx + \int_{\gamma_0} \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}(x)\phi(x)\, dS_x = 0$$

Αν $\phi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Gamma_2 = \frac{\partial \Omega}{\Gamma_1}$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}(x)\phi(x)\, dS_x + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}(x)\phi(x)\, dS_x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}(x) = 0, \ \forall x \in \Gamma_2$$

Φυσική συνοριακή συνθήκη. //.

## Πρόβλημα

Εύρεση ελαχιστοποιητή και ελάχιστης τιμής του

$$J(u) = \int_{-1}^{1} u^2(x)(\sqrt{3} - u'(x))^2\, dx.$$

$$u \in A = \{u \in C^1[-1,1],\ u(-1) = 0,\ u(1) = 1\}.$$

Αν $\omega \in A$ πιθανός ελαχιστοποιητής, τότε επειδή

$$F(x,u,u') = u^2(\sqrt{3} - u')^2$$

$F_u(x,u,u') = 2u(\sqrt{3} - u')^2$ κ' $F_{u'}(x,u,u') = -2u^2(\sqrt{3} - u')$

$\Rightarrow$ η συνάρτηση $-2u^2(x)(\sqrt{3} - \omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη

και μάλιστα $\frac{d}{dx}\left(-2\omega^2(x)(\sqrt{3} - \omega'(x))\right) = 2\omega(x)(\sqrt{3} - \omega'(x))^2$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x,\omega(x),\omega'(x)) - \omega(x)F_{\omega'}(x,\omega(x),\omega'(x))\Big) =$$

$$= \underset{\overset{\parallel}{0}}{F_x} + F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\,\omega'(x) + \cancel{F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\,\omega''(x)}$$

$$- \cancel{\omega''(x)F_{\omega'}(x,\omega(x),\omega'(x))} - \omega'(x)\frac{d}{dx}F_{\omega'}(x,\omega(x),\omega'(x))$$

$$= \omega'(x)\left[F_u(x,\omega(x),\omega'(x)) - \frac{d}{dx}F_{\omega'}(x,\omega(x),\omega'(x))\right] = 0$$

$$\Rightarrow \exists \quad c\in\mathbb{R} \quad \text{ώστε } F(x,\omega(x),\omega'(x)) - \omega'(x)F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = c$$

Στην περίπτωση μας.

$$\omega^2(x)(\sqrt{3}-\omega'(x))^2 - \omega'(x)\left[-2\omega^2(x)(\sqrt{3}-\omega'(x))\right] = 0$$

$$\omega^2(x)(\sqrt{3}-\omega'(x))\left[\sqrt{3}-\omega'(x)+2\omega'(x)\right] = c$$

$$\Leftrightarrow \omega^2(x)(\sqrt{3}-\omega'(x))(\sqrt{3}+\omega'(x)) = c$$

Όμως $\omega(-1)=0 \Rightarrow c=0$ και επομένως

$$\omega^2(x)(\sqrt{3}-\omega'(x))(\sqrt{3}+\omega'(x)) = 0, \quad \forall x\in[-1,1]$$

και επειδή $\omega(1)=1$, από συνέχεια της $\omega$ κοντά στο $a=1$, έχουμε $\omega(x)>0$ κοντά στο $1$.

Έστω ότι $\omega(x)>0$, $x\in(k,1]$ το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα όπου η $\omega$ είναι θετική.

Όμως $\omega^2(x)(\sqrt{3}-\omega'(x))(\sqrt{3}+\omega'(x)) = 0$

Ερώτημα:

Μπορεί να $\exists$ $x_1, x_2 \in (k,1]$ ώστε $\omega'(x_1)=\sqrt{3}$ και $\omega'(x_2) = -\sqrt{3}$ ;;

Απάντηση:

Δεν μπορεί να συμβεί (λόγω συνέχειας της $\omega'$ θα έπρεπε να παίρνει και την ενδιάμεση τιμή μηδέν, που δεν μπορεί).

Και επομένως είτε $\omega'(x)=\sqrt{3}$, $\forall x\in(k,1]$ (I)

είτε $\omega'(x)=-\sqrt{3}$, $\forall x\in(k,1]$ (II)

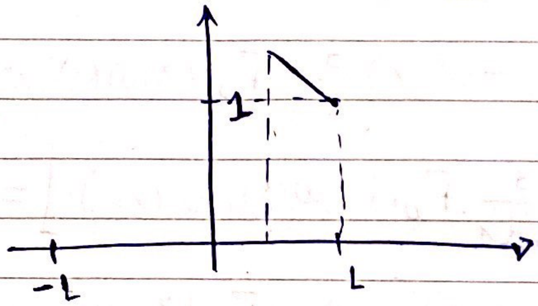
$\Downarrow$

Αν συνέβαινε το (II)

$\omega(x)=-\sqrt{3}x+c$

$\omega(1)=1 \Leftrightarrow 1=-\sqrt{3}+c$

$\Leftrightarrow c=1+\sqrt{3}$




$\Rightarrow \omega(x)\geq 1$, $\forall x\leq 1$. $\Rightarrow \omega(-1)\geq 1$, αδύνατο.

(I) $\omega'(x)=\sqrt{3}$, $x\in(k,1]$

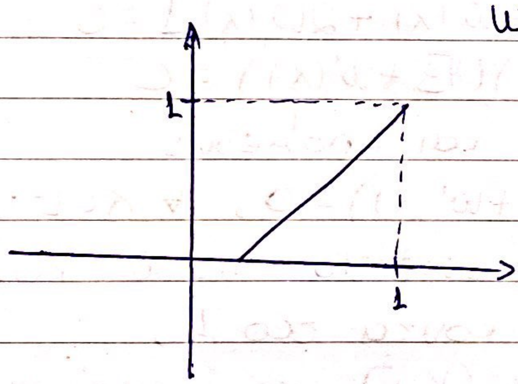
$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \omega(x)=\sqrt{3}x+c\\ \omega(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1=\sqrt{3}+c \Leftrightarrow c=1-\sqrt{3}$

$\omega(x)=\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1$

$\omega(k)=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}k-\sqrt{3}+1=0$

$k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}>0$




Έχουμε $\omega'(x)=\sqrt{3} \xrightarrow[\text{της } \omega']{\text{από συνέχεια}} \omega'(k)=\sqrt{3}$, $\omega(k)=0$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\omega(x)-\omega(k)}{x-k}=\sqrt{3}$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τ.ω. για $0<|x-k|<\delta$ ισχύει

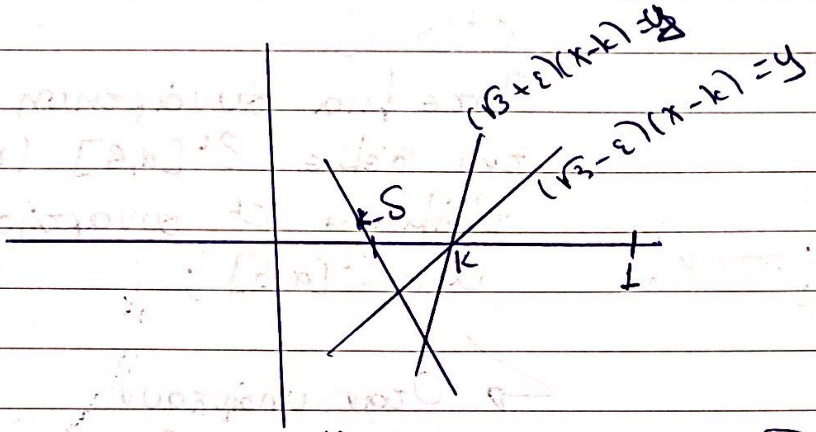
$$\left|\frac{\omega(x)-\omega(k)}{x-k}-\sqrt{3}\right|<\varepsilon$$

$k-\delta < x < k$

$$-\varepsilon < \frac{\omega(x)}{x-k} - \sqrt{3} < \varepsilon$$

$$\sqrt{3} - \varepsilon < \frac{\omega(x)}{x-k} < \sqrt{3} + \varepsilon$$

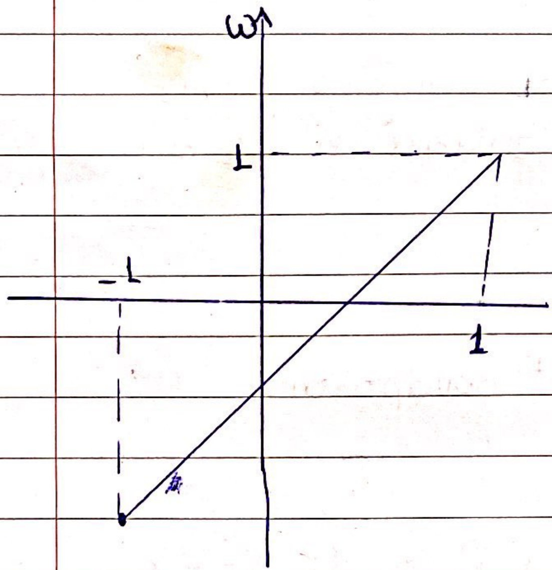
$$(\sqrt{3}-\varepsilon)(x-k) > \omega(x) > (\sqrt{3}+\varepsilon)(x-k)$$




Άρα, $\omega(x)<0$ , $k-\delta<x<k$

$\Rightarrow \omega'(x)=\sqrt{3}$

$\omega'(x)=\sqrt{3}$ , $k-\delta<x<k$




$\Rightarrow \omega(-1)<0$ ΑΔΥΝΑΤΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$C^1$ ελαχιστοποιητής δεν υπάρχει

Στο R θα περίμενε κάποιος

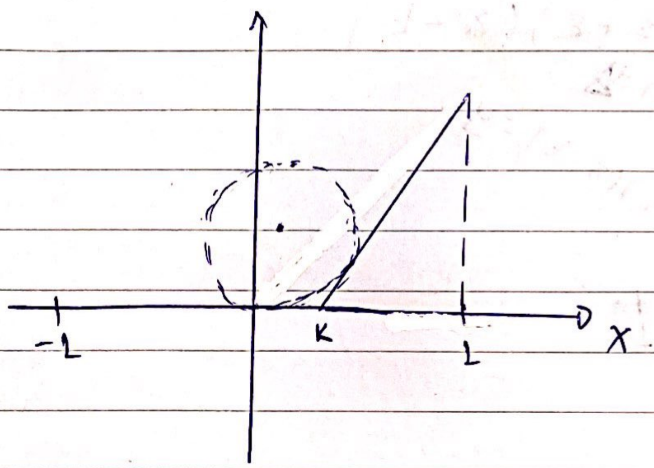
$$\hat{\omega}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(x-k), & k \le x \le 1 \\ 0, & -1 \le x < k \end{cases}$$

$$\sqrt{3}(1-k)=1 \Leftrightarrow 1-k=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$J(\hat{\omega}) = \int_{-1}^{1} \hat{\omega}^2(x)\left(L\hat{\omega}'(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{k} \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\hat{\omega}^2(x)}\left(L\hat{\omega}'(x)\right)^2 dx + \int_{k}^{1} \hat{\omega}^2(x)\left(L\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\hat{\omega}'}\right)^2 dx$$

Θα βρούμε $w_\varepsilon \in C^1[-1,1]$ και τέτοια ώστε $w_\varepsilon(-1)=0$, $w_\varepsilon(1)=1$ και $\lim_{\varepsilon\to 0} J(w_\varepsilon)=0$

Τι είναι η $w_\varepsilon$ ?




$\hat{C}^1[\alpha,b]$

Πότε μια συνάρτηση θα την λέμε $\hat{C}^1[\alpha,\beta]$ (κατά τμήματα $C^1$ συναρτήσεις).

$u \in \hat{C}^1[\alpha,b]$ ;

$\Leftarrow$ Όταν υπάρχουν

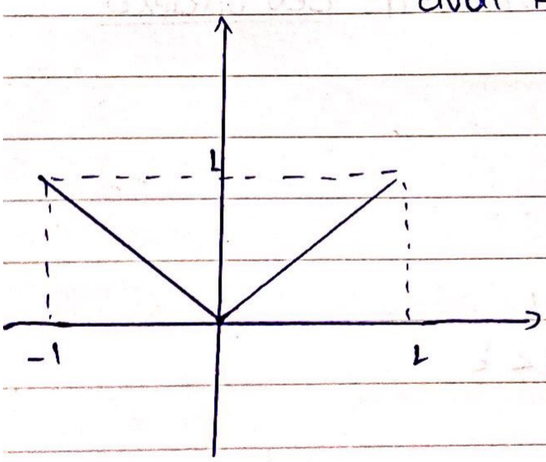
$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = \beta$$

τ.ω. $u \in C^1[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\dots,k$

$\Rightarrow u \in C[\alpha,\beta]$

Στα $x_i$, υπάρχουν η πλευρικές παράγωγοι και δεν είναι απαραίτητα ίσες. Σε όλα τα υπόλοιπα σημεία η $u$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Για παράδειγμα: $u(x)=|x|$, $x \in [-1,1]$ είναι κατά τμήματα $C^1$ συνάρτηση.




Τότε στο $[-1,0]$ η $u(x)=-x$ και είναι παρ/μη με πλευρική παράγωγο στο μηδέν, $u'(0^-)=-1$

Λίγα λόγια για την $\hat{C}^1[\alpha,\beta]$

(κατά τμήματα $\hat{C}$ συναρτήσεις)

**Λήμμα**

Έστω $\hat{u} \in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει

$$\hat{u}(x) = \hat{u}(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} \hat{u}'(\xi)\, d\xi \quad , \forall x \in [\alpha,\beta].$$

## Λογισμός Μεταβολών   31/03/2021

Αρχικά ορίζουμε της κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις $\hat{C}[\alpha,\beta]$. (κατά τμήματα συνεχής)

Ορισμός: ⇒ $u \in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$, αν μπορώ να διασπάσω το διάστημα

$c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_{n-1} \quad c_n$
$a \qquad\qquad b$

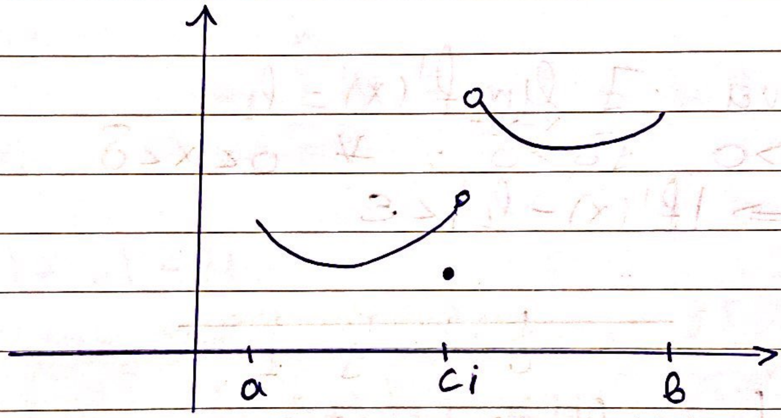
$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < c_n = b$$

ώστε $u \in C(c_{i-1} - c_i)$ (συνεχής σε κάθε σημείο του $(c_{i-1}, c_i)$, $i = 1, \dots, n$)

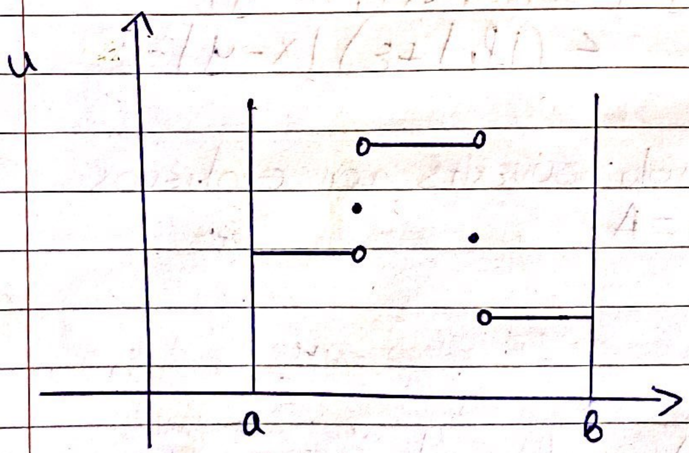
ώστε να υπάρχουν τα πλευρικά όρια.

$\exists \lim_{x \to c_{i-1}^+} u(x)$

$\exists \lim_{x \to c_i^-} u(x)$




Η $u|_{[c_{i-1}, c_i]}$ είναι συνεχής στο $(c_{i-1}, c_i)$.




Η u είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση.

## Ορισμός

$u \in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$ κατά τμήματα $C^1$ συνάρτηση θα πρέπει $\exists$ διάστημα


ώστε η $u|_{[c_{i-1},c_i)}$ η $u$ παραγωγίζεται και μάλιστα $u'(x)$, $x \in (c_{i-1}, c_i)$ είναι συνεχής συνάρτηση, $\forall\, i=1,2,\dots,n$ με την ιδιότητα ότι $\exists \lim\limits_{x\to c_{i-1}^+} u'(x)$, $\lim\limits_{x\to c_i^-} u'(x)$.

**Ερώτημα:**

$f:(-1,1)\to \mathbb{R}$, $f\in C^1(-1,0)$, $f \in C^1(0,1)$, $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$

$\Rightarrow f$ είναι συνεχής στο $0$

Τι σημαίνει: $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \ell_1$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 : \forall\ 0<x<\delta$

$\Rightarrow |f'(x)-\ell_1|<\varepsilon$

Έστω


$$f(x)-f(y)=f'(\xi_x)(x-y)$$

$$x,y\in(0,\delta) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le |f'(\xi_x)|\,|x-y| \le (|\ell_1|+\varepsilon)|x-y|$$

Αν $\varepsilon=1$ $\xRightarrow{\text{στο } (0,\delta) \text{ η } f}$ είναι ομοιόμ. συνεχής και επομένως θα $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = A$

$$f(x)-A = f'(\xi_x)(x-0)$$

$\exists \varepsilon>0, \exists\delta>0 : \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| < \varepsilon$

$0<|x-y|<\delta$

$\Rightarrow$ Η $f$ είναι συνεχής στο $0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x f'(\xi_x)$$

Έστω $f$ κατά τμήματα $C$ συνάρτηση.
Τι μπορούμε να πούμε για το ολοκλήρωμα αυτής
$f \in [\alpha,\beta]$ και είναι κατά τμήματα συνεχής.

$$\exists \int_\alpha^\beta f(x)dx \ ?$$

Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη τότε η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ $P$ διάστημα ώστε
$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$$M_i = \sup_{x\in[c_{i-1},c_i]} f(x) \qquad \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(\xi_i-\xi_{i-1}) < \varepsilon$$

$$m_i = \inf_{x\in[c_{i-1},c_i]} f(x)$$

τότε η $F$, $|f(x)|\le M$

(i) είναι συνεχής συνάρτηση, μάλιστα

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le M|y-x|$$

(η $F$ είναι ομοιόμορφα συνεχής)

(ii) Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$

$\Rightarrow$ η $F$ είναι παράγωγη στο $x_0$

και μάλιστα $\underline{F'(x_0) = f(x_0)}$

Αν η $f$ είναι κατά τμήματα συνεχής

$\Rightarrow F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία εκτός των σημείων $c_i$

Τι ακριβώς συμβαίνει στα $c_i$?

Τότε $\lim_{x\to c_i^+} \frac{F(x)-F(c_i)}{x-c_i} = \lim_{t\to c_i^+} f(t)$ , $x>c_i$

και $\lim_{x\to c_i^-} \frac{F(x)-F(c_i)}{x-c_i} = \lim_{t\to c_i^-} f(t)$.

Έστω $\lim_{t\to \xi^+} f(t) = \ell$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ τ.ω.

$\xi < x < \xi+\delta \Rightarrow |f(t)-\ell|<\varepsilon$

$\xi+\delta > x > \xi$

$-\varepsilon+\ell < f(t) < \ell+\varepsilon$ , $\xi < t < \xi+\delta$

$F(x)-F(\xi) = \int_\xi^x f(t)dt$

$(-\varepsilon+\ell)(x-\xi) = (-\varepsilon+\ell)\int_\xi^x f(t)dt < \int_\xi^x (\ell+\varepsilon)dt = (\ell+\varepsilon)(x-\xi)$

$\Rightarrow -\varepsilon+\ell < \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} < \ell+\varepsilon$ //

$u\in \hat{C}[\alpha,\beta]$ : $\exists\ \alpha=c_0<c_1<\ldots<c_n=\beta$

τότε $u\in C(c_{i-1},c_i)$ κ' $\exists \lim_{t\to c_i^-} u(t)$, $\lim_{t\to c_{i-1}^+} u(t)$, $\forall i=1,2,\ldots,n$

$u\in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$, αν $u\in C[\alpha,\beta]$ και

$\exists\ \alpha=c_0<c_1<\ldots<c_n=\beta$ ώστε

η $u\in C^1(c_{i-1},c_i)$ κ' $\exists \lim_{x\to c_i^-} u'(x)$, $\lim_{x\to c_{i-1}^+} u'(x)$

<u>Λήμμα</u>

(i) Έστω $u\in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$, τότε $u(x)=u(\alpha)+\int_\alpha^x u'(t)dt$ , $x,y\in[\alpha,\beta]$

(ii) Αν $u,v\in \hat{C}^1[\alpha,\beta] \Rightarrow$

$$-\int_x^y u(t)v'(t)dt + (uv)\Big|_x^y = -\int_x^y u(t)v'(t)dt + \lim_{t\to y^-} u(t)v(t) - \lim_{t\to x^+} u(t)v(t)$$

# Λογισμός Μεταβολών 05/04/2021

## Ασκήσεις Φυλλαδίων 3 κ' 4

**Φυλλάδιο 3, άσκηση 3**

$f, g, h : \overline{B_1} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τ.ω.

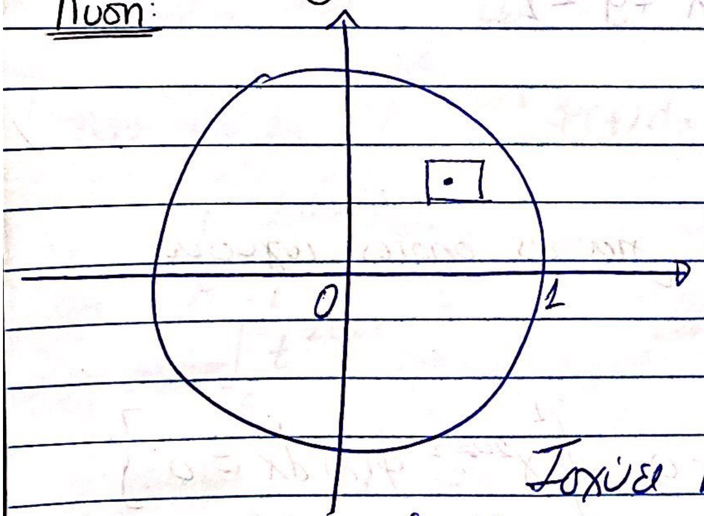
$$\iint_{B_1} (f\phi + g\phi_x(x,y))\,dx\,dy = 0, \quad \forall \phi \in A.$$

$$A = \{ u \in C^1(\overline{B_1}) \mid u(x,y) = h(x,y),\ |x^2+y^2| = 1 \}$$

$\Rightarrow$ η $g$ παραγωγίζεται ως προς $x$ και μάλιστα

$$g_x(x,y) = f(x,y) \quad , \quad x^2+y^2 < 1.$$

Λύση:



Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο μοναδιαίος δίσκος σε όλα τα εσωτερικά σημεία είναι παραγωγίσιμη ως προς την μεταβλητή $x$.

Ισχύει η σχέση:

$$\iint_{B_1} \big(f(x,y)\phi(x,y) + g(x,y)\phi_x(x,y)\big)\,dx\,dy = 0$$

Απλοποιούμε την άσκηση. $h \equiv 0$ $\partial B_1$.

Βρίσκουμε ορθογώνιο ώστε και παίρνουμε $\phi$ ώστε εκτός του ορθογωνίου η $\phi$ είναι μηδέν.

$$\Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [f(x,y)\phi(x,y) + g(x,y)\phi_x(x,y)]\,dx\,dy = 0$$

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt \quad , \quad x_0-\delta \le x \le x_0+\delta$$
$$y_0 - \delta \le y \le y_0 + \delta$$

τότε $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$, $\quad x_0-\delta \le x \le x_0+\delta$
$y_0-\delta \le y \le y_0+\delta$

Οπότε,
$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\phi(x,y) + g(x,y)\,\phi_x(x,y)\right) dx\,dy = 0$$
$$\parallel$$
$$+\iint_D \left(-F(x,y)\,\phi_x(x,y) + g(x,y)\,\phi_x(x,y)\right) dx\,dy + \int_{\partial D} \underbrace{F(x,y)\,\phi(x,y)}_{=0}\, dS$$

$\Rightarrow$ προκύπτει η παραγώγιση της $g$ και μάλιστα $(x,y)$ στο εσωτερικό του τετραγώνου

$\Rightarrow g_x(x,y) = f(x,y), \quad \forall (x,y), \quad x^2+y^2<1.$

**Φυλλάδιο 4º, Άσκηση 1η**

Προσδιορίστε όλες τις $f\in C[0,1]$ για τις οποίες ισχύουν:
$$\int_0^1 f(t)\phi(t)\,dt = 0, \quad \forall \phi\in A.$$
$$A = \left\{u\in C[0,1] \;\middle|\; \int_0^1 x\,u(x)\,dx = 0, \int_0^1 x^{2021}\phi(x)\,dx = 0\right\}$$

**Απόδειξη:**

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι $f(x) = c_1 x + c_2 x^{2021}$, $x\in\mathbb{R}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι:
$$\int_0^1 (f(t) - c_1 t - c_2 t^{2021})\phi(t)\,dt = \int_0^1 f\phi - c_1\int_0^1 t\phi\,dt - c_2\int_0^1 t^{2021}\phi\,dt = 0$$

Πρόχειρο:
$$(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$$
$f \perp \phi$
$x \perp \phi$
$x^{2021} \perp \phi$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f(t)-c_1 t - c_2 t^{2021})\,\phi(t)\,dt = 0, \quad \forall \phi \in A$$

Θα επιλέξουμε $\phi(t) = f(t) - c_1 t - c_2 t^{2021}$

Για να είναι αποδεκτή η επιλογή της $\phi$

$\phi \in C[0,1]$ που ισχύει,

$$\int_0^1 t\phi(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 t\,(f(t) - c_1 t - c_2 t^{2021})\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 \int_0^1 t^2\,dt + c_2 \int_0^1 t^{2021}\,dt = \int_0^1 t f(t)\,dt$$

$$\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2023} = \int_0^1 t f(t)\,dt$$

όπως επίσης $\int_0^1 t^{2021}\phi(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 t^{2021}(f(t) - c_1 t - c_2 t^{2021})\,dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$c_1 \int_0^1 t^{2021}\,dt + c_2 \int_0^1 t^{4042}\,dt = \int_0^1 t^{2021} f(t)\,dt$$

$$\frac{c_1}{2023} + \frac{c_2}{4043} = \int_0^1 t^{2021} f(t)\,dt \qquad (2)$$

(Το ζήτημα είναι αν αυτό το σύστημα επιλύεται.)

Το σύστημα επιλύεται αν έχει ορίζουσα μη μηδενική.

$$\det\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2023 \\ \frac{1}{2023} & \frac{1}{4043} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4043} - \left(\frac{1}{2023}\right)^2 > 0$$

$\Rightarrow \exists!$ $c_1, c_2$ με την ιδιότητα που θέλουμε

$\phi = f - c_1 t - c_2 t^{2021}$

(Υπάρχει ακριβώς)

Scanned with CamScanner

$$\int_0^1 \left(f(t) - c_1 t - c_2 t^{2021}\right)^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = c_1 t + c_2 t^{2021}, \quad t\in[0,1]$$

Παρατηρούμε ότι η επιλογή $f(t) = \alpha t + \beta t^{2021}$ ικανοποιεί τις

$$\int_0^1 (\alpha t + \beta t^{2021})\,\phi(t)\,dt = 0$$

διότι

$$\alpha\int_0^1 t\phi(t)\,dt + \beta\int_0^1 t^{2021}\phi(t)\,dt = 0$$

## Άσκηση 2 (Φυλλάδιο 4)

Προσδιορίστε όλες τις $f\in C[0,1]$ για τις οποίες ισχύουν

$$\int_0^1 f(t)\phi''(t)\,dt, \quad \forall \phi\in B = \left\{\phi\in C^2[0,1],\ \phi(0)=\phi(1)=0,\ \phi'(0)=\phi'(1)=0,\ \int_0^1 x\phi(x)\,dx = 0\right\}$$

**Λύση:**

Αν $\int_0^1 f(t)\phi''(t)\,dt = 0, \ \forall\phi\in B$

Για τυχαία $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(f(t) - c_1 - c_2 t - c_3 t^3\right)\phi''(t)\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f(t)\phi''(t)\,dt}_{0} - \int_0^1 (c_1 + c_2 t + c_3 t^3)\phi''(t)\,dt$$

$$= +\int_0^1 (c_1 + c_2 t + c_3 t^3)'\phi'(t)\,dt - \Big[\cancel{(c_1 + c_2 t + c_3 t^3)\phi'(t)}\Big]_0^1 =$$

$$= \int_0^1 (c_2 + 3c_3 t^2)\,\phi'(t)\,dt =$$

**Πρόχειρο:**

Ας υποθέσουμε ότι η $f$ είναι $C^2$.

Τότε με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$0 = \int_0^1 f(t)\phi''(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 f'(t)\phi'(t)\,dt + \big[f\phi'\big]_0^1$$

$$= -\int_0^1 f'(t)\phi'(t)\,dt + f(1)\cancel{\phi'(1)} - f(0)\cancel{\phi'(0)}$$

$$= +\int_0^1 f''(t)\phi(t)\,dt - \Big[f'(t)\cancel{\phi(t)}\Big]_0^1$$

Θέλουμε: $\int_0^1 x\phi(x)\,dx = 0$

$$= -\int_0^1 6C_3 t\phi(t)dt + \left[(C_2+3C_3t^2)\phi(t)\right]_0^1$$

$$= -6C_3\int_0^1 t\phi(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f(t)-C_1-C_2t-C_3t^3)\phi''(t)dt = 0, \quad \forall \phi\in A.$$

Περιμένουμε

$f''(x) = \lambda x \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{\lambda x^2}{2} + c_1$

$\boxed{f(x) = \frac{\lambda x^3}{6} + c_1 x + c_2}$

$\Rightarrow f(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^3$

Μπορώ να κάνω την επιλογή

- $\phi''(t) = f(t) - C_1 - C_2 t - C_3 t^3$ ?

$$\Rightarrow \phi'(t) = \int_0^t f(s)ds - C_2 t - \frac{C_2}{2}t^2 - \frac{C_3}{4}t^4 + C_4$$

Όμως $\phi'(0)=0 \Rightarrow C_4 = 0$

$$\phi'(t) = \int_0^t f(s)ds - C_1 t - \frac{C_2}{2}t^2 - C_3\frac{t^4}{4}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \int_0^t\int_0^\ell f(s)ds\,d\ell - \frac{C_1t^2}{2} - \frac{C_2t^3}{6} - C_3\frac{t^5}{20} + C_5$$

Όμως, επειδή $\phi(0)=0 \Rightarrow C_5 = 0$

Επομένως,

$$\phi(t) = \int_0^t\int_0^\ell f(s)ds\,d\ell - \frac{C_1t^2}{2} - \frac{C_2t^3}{6} - \frac{C_3}{20}t^5$$

Πρέπει επίσης,

$$\phi(1)=0, \ \phi'(1)=0, \ \int_0^1 t\phi(t)dt = 0.$$

- $\phi(1)=0 \Leftrightarrow \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_3}{20} = \int_0^1\int_0^\ell f(s)ds\,d\ell$ (1)
- $\phi'(1)=0 \Leftrightarrow C_1 + \frac{C_2}{2} + \frac{C_3}{4} = \int_0^1 f(s)ds$ (2)

$$\int_0^1 t\phi(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 t\left(\frac{C_1}{2}t^2 + \frac{C_2}{6}t^3 + \frac{C_3}{20}t^5\right)dt = \int_0^1 tQ(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{8}+\frac{c_2}{30}+\frac{c_3}{140}=\int_0^1 t\,Q(t)\,dt \quad (3)$$

(Το ζητούμενο είναι το σύστημα να επιλύεται)

Το σύστημα επιλύεται αν η ορίζουσα δεν είναι μηδέν. (H(ω))

Οπότε τότε η επιλογή

$$\phi(t)=\int_0^t\int_0^{f} f(s)\,ds\,df-\frac{c_1}{2}t^2-\frac{c_2}{6}t^3-\frac{c_3}{20}t^5.$$

$$\Rightarrow \phi'(t)=\int_0^t f(s)\,ds-c_1t-\frac{c_2}{2}t^2-\frac{c_3}{4}t^4$$

$$\Rightarrow \phi''(t)=f(t)-c_1-c_2t-c_3t^3$$

και επομένως,

$$\int_0^1 (f(t)-c_1-c_2t-c_3t^3)^2\,dt=0$$

$$\Rightarrow f(t)=c_1+c_2t+c_3t^3.$$

(Για τυχαία $c_1,c_2,c_3 \Rightarrow$)

Για τυχαία $c_1,c_2,c_3$ η $f(t)=c_1+c_2t+c_3t^3$, ικανοποιεί $\int_0^1 (c_1+c_2t+c_3t^3)\,\phi''(t)\,dt=0$, $\forall\, \phi\in A$.

//

Άσκηση 3, Φυλλάδιο 4

Βρείτε αρχικά τους ελαχιστοποιητές του

$$J(u)=\int_0^1 (u'(x))^2 dx \quad , \quad u\in A.,$$

$$A=\{u\in C^1[0,1] \, , \, u(0)=0, \; u(1)=0\}$$

και τη δέσμευση

$$G(u)=\int_0^1 x u(x) dx = -\sqrt{5}.$$

Στην συνέχεια προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή με απόδειξη.

Λύση

Έστω $\omega\in A$ ελαχιστοποιητής.

Παρατηρούμε ότι $G(\omega)=-\sqrt{5} \iff \int_0^1 x\omega(x) dx = -\sqrt{5}$

Πότε $\phi$ θα ισχύει $G(\omega+\varepsilon\phi)=-\sqrt{5}$ ? $\iff$

$$\iff \int_0^1 x(\omega(x)+\varepsilon\phi(x)) dx = -\sqrt{5} \iff$$

$$\iff \underbrace{\int_0^1 x\omega(x) dx}_{=-\sqrt{5}} + \varepsilon\int_0^1 x\phi(x) dx = -\sqrt{5}$$

Επιλέγουμε τη $\phi$ ώστε $\boxed{\int_0^1 x\phi(x) dx = 0}$

και επομένως έχουμε $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}$

$$J(\omega+\varepsilon\phi) \geq J(\omega) \iff$$

$$\int_0^1 (\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x))^2 dx \geq \int_0^1 (\omega'(x))^2 dx \iff$$

$$\cancel{\int_0^1 (\omega'(x))^2 dx} + 2\varepsilon\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x) dx + \varepsilon^2\int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \geq \cancel{\int_0^1 (\omega'(x))^2 dx}$$

Για $\varepsilon>0$:

$$2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x) dx + \varepsilon\int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \geq 0$$

και επομένως $\quad 2\int^1 \omega'(x)\phi'(x)dx \geq 0 \qquad (1)$

επομένως, αν πάρουμε $\varepsilon<0$, παίρνουμε:

$$2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx + \varepsilon\int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \leq 0$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx \leq 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx = 0$$

και έτσι έχουμε

$$\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx = 0, \quad \forall \phi\in A,$$

$$\phi(0)=0, \phi(1)=0 \text{ κ' } \int_0^1 x\phi(x)dx=0$$

Παρατηρούμε ότι για $c_1, c_2 \in R$:

$$\int_0^1 (\omega'(x) - c_1 - c_2x^2)\phi'(x)dx =$$

$$\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)dx - \int_0^1 (c_1+c_2x^2)\phi'(x)dx$$

$$\int_0^1 2c_2 x\phi(x)dx = 0$$

και επομένως:

$$\int_0^1 (\omega'(x) - c_1 - c_2x^2)\phi'(x)dx = 0$$

Επιλέγουμε τα $c_1, c_2$ ώστε $\phi'(x) = \omega'(x) - c_1 - c_2x^2$ για κατάλληλες επιλογές των $c_1, c_2$?

Πρόχειρο:

Τι να επιδιώξουμε?

$\omega'(x) = c_1x + c_2$

$\Rightarrow \int_0^1 \boxed{\omega''(x)}\phi(x)dx = 0$

Αυτό θα έπρεπε να είναι παράλληλο του $x$.

και άρα

$\omega''(x) = \lambda x$

$\Rightarrow \boxed{\omega'(x) = \frac{\lambda x^2}{2} + c_1}$

$\Rightarrow \omega(x) = \frac{\lambda x^3}{6} + c_1x + c_2$

$\omega(x) = c_1x + c_2 + c_3x^3$

$\Rightarrow \boxed{\omega'(x) = c_1 + 3c_3x^2}$

(Θα ολοκληρωθεί αργότερα).

! Σχόλιο:

Αν η δέσμευση δεν ήταν γραμμική $G(u)=\int_0^1 u^2(x)\,dx=1$.
έχουμε πρόβλημα να βάλουμε $\omega+\varepsilon\phi$.

$$G(\omega+\varepsilon\phi)=1 \iff \cancel{\int_0^1 \omega^2(x)} + 2\varepsilon\int_0^1 \omega\phi + \varepsilon^2\int_0^1 \phi^2 = \cancel{1}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \omega\phi + \varepsilon\int_0^1 \phi^2 = 0$$

Αν μου δώσουν ελευθερία στην $\phi$, αυτό που δίνει ακριβώς μια επιλογή της $\varepsilon$. Δεν μου δίνει ένα συνεχές σημείο $\varepsilon$, το οποίο είναι απαραίτητο. Οπότε δεν το πάμε με μια $\phi$, πάμε με δύο, $\phi$ κ' $\psi$.

Τότε, επιλέγουμε $\phi, \psi$ ώστε και

$$G(\omega+\varepsilon\phi+\delta\psi)=1$$

$$\iff 2\varepsilon\int_0^1 \omega(x)\phi(x)\,dx + 2\delta\int_0^1 \omega(x)\psi(x)\,dx +$$

$$+\varepsilon^2\int_0^1 \phi^2 + \delta^2\int_0^1 \psi^2 + 2\varepsilon\delta\int \phi(x)\psi(x)\,dx = 0$$

$\delta=\delta(\varepsilon)$ $\qquad$ $\omega+\varepsilon\phi+\delta(\varepsilon)\psi$

$\delta(0)=0$

## Λογισμός Μεταβολών  07/04/2021

$\hat{C}^1[\alpha,\beta]$ κατά τμήματα $C^1$ συναρτήσεις

$c_0=\alpha \quad c_1 \quad c_2 \quad c_{n-1} \quad \beta=c_n$  $\qquad u\in C^1[c_{i-1},c_i]$

Είδαμε: Το Θεμελιώδες Θεώρημα, $u\in\hat{C}^1[\alpha,\beta]$

$$u(x)=u(\alpha)+\int_\alpha^x u'(t)\,dt, \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$$

Αντίστοιχα $u,v\in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta u'(x)v(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta u(x)v'(x) + (u(x)v(x))\Big|_\alpha^\beta$$

Εαν $u\in\hat{C}^1[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta (u'(t))^2\,dt=0 \Rightarrow u'(t)=0, \forall t\in[\alpha,\beta]$

$$\Rightarrow u(t)=u(\alpha), \quad \forall t\in[\alpha,\beta]$$

**Λήμμα**

Εαν $f,g\in \hat{C}[\alpha,\beta]$ κατά τμήματα συνεχείς και τέτοιες ώστε

$$\int_\alpha^\beta (f(x)\phi(x)+g(x)\phi'(x))\,dx=0, \quad \forall \phi\in\hat{C}^1[\alpha,\beta]$$

με $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$

Τότε η $g\in\hat{C}^1[\alpha,\beta]$ είναι κατά τμήματα ~~συνεχ~~ $C^1$ και μάλιστα

$$g(x)=g(\alpha)+\int_\alpha^x f(s)\,ds$$

Αν $c\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\lim_{x\to c^+}f(x)\neq\lim_{x\to c^-}f(x)$ τότε $\exists$ πλευρικές παράγωγοι της $g$ στο $c$ και μάλιστα $g'(c^+)=\lim_{x\to c^+}f(x)$, και $g'(c^-)=\lim_{x\to c^-}f(x)$

Στόχος είναι η μελέτη (εύρεση) πιθανών τοπικών ελαχίστων του $J(u)=\int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\,dx$ όταν $F\in C^1([\alpha,\beta]\times R^2)$

και $u\in A=\{u\in\hat{C}^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$

Αν $\phi \in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$, (η κορυφή της $\phi$ να είναι η κορυφή των πιθανών ελαχίστων ποσότητας $\omega$) ; $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$

$\Rightarrow J(\omega+\varepsilon\phi) \geq J(\omega)$

Ερώτημα αν $\exists\ J(\omega;\phi)$?

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(\omega+\varepsilon\phi)-J(\omega)}{\varepsilon}$$

Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές είναι τα σημεία $c_i$, $i=0,\dots,n$, $c_0=\alpha$, $c_n=\beta$

$$\frac{J(\omega+\varepsilon\phi)-J(\omega)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\alpha^\beta F(x,\omega(x)+\varepsilon\phi(x),\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x))dx - \int_\alpha^\beta F(x,\omega(x)+\omega'(x))dx\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} F(x,\omega(x)+\varepsilon\phi(x),\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x))dx - \int_{c_{i-1}}^{c_i} F(x,\omega(x),\omega'(x))dx\right]$$

$$\Rightarrow \exists \lim\frac{J(\omega+\varepsilon\phi)-J(\omega)}{\varepsilon} := \delta J(\omega;\phi)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_i}\big(F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)+F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\big)dx$$

$$=\int_a^b\big(F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)+F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\big)dx$$

Euler-Lagrange $\delta J(\omega;\phi)=0$

$$\Rightarrow \int_a^b[F_u\phi+F_{u'}\phi']dx=0 \quad , \forall \phi\in\hat{C}^1[\alpha,\beta]$$

Οι $F_u(x,\omega(x),\omega'(x))$ , $F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις. Δηλ. στα σημεία $c_i$ $\exists$.

$\longrightarrow$

$$\lim_{x\to a^+} F_{u'}(x,w(x),w'(x)) = F_{u'}(a,w(a),w'(a^+))$$

$$\lim_{x\to a^-} F_{u'}(x,w(x),w'(x)) = F_{u'}(a,w(a),w'(a^-))$$

όπως επίσης:

$$\lim_{x\to a^+} F_u(x,w(x),w'(x)) = F_u(a,w(a),w'(a^+))$$

$$\lim_{x\to a^-} F_u(x,w(t),w'(t)) = F_u(a,w(a),w'(a^-))$$

Επομένως, από το Λήμμα η συνάρτηση $x \mapsto F_{u'}(x,w(x),w'(x))$ είναι κατά τμήματα $C^1$ (με πιθανά σημεία μη παραγωγισιμότητας τα $a$).

$$\Rightarrow F_{u'}(x,w(x),w'(x)) = c + \int_a^x F_u(s,w(s),w'(s))\,ds$$

δηλαδή:

$$F_{u'}(x,w(x),w'(x)) = F_{u'}(\alpha,w(\alpha),w'(\alpha)) + \int_\alpha^x F_u(s,w(s),w'(s))\,ds$$

<u>Παράδειγμα</u>

Ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J(u)=\int_{-1}^{1} u^2(x)(1-u'(x))^2\,dx$

$u\in A=\{u\in \hat{C}^1[-1,1],\ u(-1)=0,\ u(1)=1\}$ με συναρτήσεις ελέγχου.

Παίρνουμε $w(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 0, & x\in[-1,0) \end{cases}$

τότε $w\in A$ και $J(w)=\int_{-1}^{0} \overset{=0}{} + \int_{0}^{1} \overset{=0}{} = 0$

Πως προέκυψε η $w$? ($T(u)=\int_{-1}^{1}$

Αν εφαρμόσουμε την θεωρία, έχουμε $f(x,u,u')=u^2(1-u')^2$

η $F_{u'}(x,u,u') = -2u^2(1-u')$

$F_u(x,u,u') = 2u(1-u')^2$

Euler-Lagrange
$\Longrightarrow$

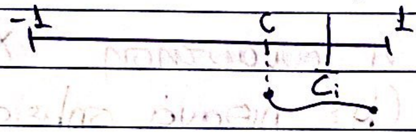
$$F_{u'}(x,w(x),w'(x)) = c + \int_{-1}^{x} F_u(s,w(s),w'(s))\,ds$$

$$-2w^2(x)(1-w'(x)) = c + \int_{-1}^{x} 2w(s)(1-w'(s))^2\,ds$$

Από την σχέση προκύπτει $w(-1)=0 \Longrightarrow c=0$
και επομένως έχουμε:

$$-\cancel{2}w^2(x)(1-w'(x)) = \int_{-1}^{x} \cancel{2}w(s)(1-w'(s))^2\,ds, \quad x\in[-1,1]$$

$w(1)=1$



$\Longrightarrow x\in[c,1]$ η συνάρτηση $w^2(x)(1-w'(x))$ είναι παρ/μη.
Τότε στο $(\bar{c},1]$ $w(x)>0$

$\Longrightarrow 1-w'(x)$ παραγωγίσιμη $\Longrightarrow w'$ παραγωγ.

$\Longrightarrow -\left(2w(x)w'(x)(1-w'(x)) - w^2(x)w''(x)\right) = w(x)(1-w'(x))^2$

Βολικότερο:

$$\begin{aligned}
(F(w(x),w'(x)) - w'(x)F_{u'}(w(x),w'(x)) &= \\
&= w^2(x)(1-w'(x))^2 - w'(x)\left(-2w^2(x)(1-w'(x))\right) \\
&= w^2(x)(1-w'(x))^2 + 2w^2(x)w'(x)(1-w'(x)) \\
&= w^2(x)(1-w'(x))(1-w'(x)+2w'(x)) = \\
&= w^2(x)(1-w'(x))(1+w'(x)), \quad x\in[\bar{c},1]
\end{aligned}$$

είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο μηδέν.

$\Longrightarrow w^2(x)(1-w'(x))(1+w'(x)) = c.$

Ισχύει:
αν $w\in C^2$, $\frac{d}{dx}F_{u'}(x,w,w') = F_u(x,w(x),w'(x))$

$\frac{d}{dx}\left(F(x,w(x),w'(x)) - u'(x)F_{u'}(x,w(x),w'(x))\right)$

$= F_x(x,w(x),w'(x)) \overset{\text{αν } F_x=0}{=} 0$

Σχόλιο:
Έστω $F(u,u')$ και $w\in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$
που ικανοποιεί

$$F_{u'}(w(x),w'(x)) = c + \int_{\alpha}^{x} F_u(w(s),w'(s))\,ds$$

Εάν επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι η $w\in \hat{C}^2[\alpha,\beta]$
Τότε

$F(w(x),w'(x)) - w'(x)F_{u'}(w(x),w'(x))$ : είναι σταθερή συνάρτηση.

Μάλιστα αν $x \neq c_i$ τότε $\frac{d}{dx}\left(F(\omega(x),\omega'(x)) - \omega'(x) F_{u'}(\omega(x),\omega'(x))\right) = 0$

και επομένως

$$F(x,\omega(x),\omega'(x)) - \omega'(x) F_{u'}(\omega(x),\omega'(x)) = C \quad , \forall x \in [\alpha,\beta].$$

Στις κορυφές $c_i$ θα έχουμε

$$F(\omega(c_i),\omega'(c_i^+)) - \omega'(c_i^+) F_{u'}(\omega(c_i),\omega'(c_i^+))$$
$$= F(\omega(c_i),\omega'(c_i^-)) - \omega'(c_i^-) F_{u'}(\omega(c_i),\omega'(c_i^-))$$

//.

Παράδειγμα

Ελαχιστοποίηση $J(u) = \int_\alpha^\beta F(x,u,u')\,dx$,

$u \in A = \{u \in d[\alpha,\beta],\ u(\alpha) = c_1,\ u(\beta) = c_2\}$

αν $\omega$ πιθανοί ελαχιστοποιητές και $F \in C^1$.

Euler-Lagrange $\Longrightarrow$ $\frac{d}{dt} F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = F_u(x,\omega(x),\omega'(x))$

Συνθήκη ώστε κάθε ~~λ~~λύση της Euler-Lagrange να ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές

Η συνθήκη στην $F(x,y,z)$ να είναι κυρτή ως προς $(y,z)$ και μάλιστα θέλουμε $F(x,y,z) \geq F(x,u,v) + F_y(x,u,v)\cdot(y-u) + F_z(x,u,v)(z-v)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\omega \in \hat{C}^1[\alpha,\beta]$, λύση της Euler-Lagrange του συναρτησοειδούς

$J(u) = \int_\alpha^\beta F(x,u,u'(x))\,dx$, $u \in A = \{u \in \hat{C}^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha) = c_1,\ u(\beta) = c_2\}$

δηλ. $F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = C + \int_\alpha^x F_u(s,\omega(s),\omega'(s))\,ds$

και έχουμε την $F = F(x,y,z)$ κυρτή ως προς τις μεταβλητές $(y,z)$ τότε ισχύει: $J(u) \geq J(\omega)$, $\forall u \in A$.

Ερώτημα:

Έχουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίηση με $F$ ομαλή συνάρτηση

~~$J(u) = \int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\,dx$~~ , $u \in A = \{u \in \hat{C}^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha) = c_1,\ u(\beta) = c_2\}$

και γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα έχει ελαχιστοποιητή, τότε αναγκαστικά η $F$ ικανοποιεί:

$$F(x,y,w) \geq F(x,y,z) - F_z(x,y,z)(w-z)$$

Scanned with CamScanner

# Λογισμός Μεταβολών  12/04/2021

## Αναγκαίες Συνθήκες για τοπικά Ελάχιστα

Έστω $J(u)=\int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx$ όπου $F\in C^1([a,b]\times R^2)$

με συνάρτηση ελέγχου $\hat{A}=\{u\in \hat{C}^1[a,b]\ ;\ u(a)=c_1,\ u(b)=c_2\}$

**ΘΕΩΡΗΜΑ** (Συνθήκη Weastrass)

Έστω $\omega$ ελαχιστοποιητής του συναρτησιακού $J$ στο $\hat{A}$, τότε ισχύει $\mathcal{E}(x,\omega(x),\omega'(x),k)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall k\in R$

όπου

$$\mathcal{E}(x,\omega(x),\omega'(x),k)=F(x,\omega(x),\omega'(x)+k)-F(x,\omega(x),\omega'(x))-F_z(x,\omega(x),\omega'(x))k$$

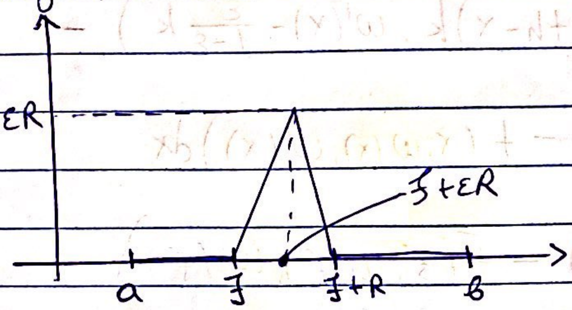
**Σχόλια**

Αν θέλαμε συνθήκη ανεξαρτήτως της επιλογής του $\omega$ η συνθήκη είναι $F(x,y,z+k)-F(x,y,z)\geq F_z(x,y,z)k$

Η οποία είναι συνθήκη $\big(F(x,y,\omega)-F(x,y,z)\geq F_z(x,y,z)(\omega-z)\big)$ κυρτότητας $F$ ως προς την τρίτη μεταβλητή.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Επιλέγουμε $\xi\in[a,b]$. Αν $0<R$




όπου
$$\phi_{\varepsilon,R}(x)=\begin{cases}(x-\xi)k, & \xi\leq x\leq \xi+\varepsilon R\\ \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\xi+h-x)k, & \xi+\varepsilon h\leq x\leq \xi+h\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$
(Δηλ. $x\in[a,b]\setminus[\xi,\xi+h]$)

Τότε επειδή η $\omega$ είναι ελαχιστοποιητής του $J$

$$0\leq J(\omega+\phi_{\varepsilon,h})-J(\omega)=$$

$$=\int_a^b F(x,\omega(x)+\phi_{\varepsilon,h}(x),\omega'(x)+\phi_{\varepsilon,h}'(x))\,dx-\int_a^b F(x,\omega(x),\omega'(x))\,dx$$

$$=\int_a^\xi+\int_\xi^{\xi+h}+\underbrace{\int_{\xi+h}^b}_{=0}=\int_\xi^{\xi+h}\Big(F(x,\omega(x)+\phi_{\varepsilon,h}(x),\omega'(x)+\phi_{\varepsilon,h}'(x))-$$

$$-F(x,\omega(x),\omega'(x))\Big)\,dx=$$

$$= \underbrace{\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon h}}_{A^0} + \underbrace{\int_{\xi+\varepsilon h}^{\xi+h}}_{B^0}$$

όπου

$$A^0 = \int_{\xi}^{\xi+h\varepsilon} \left[F(x,w(x)+(x-\xi)k,\, w'(x)+k) - F(x,w(x),w'(x))\right]dx$$

$$B^0 = \int_{\xi+\varepsilon h}^{\xi+h} \left[F\left(x,w(x)+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(h+\xi-x)k,\, w'(x)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k\right) - F(x,w(x),w'(x))\right]dx$$

και επομένως διαιρώντας με $\frac{1}{h}>0$ έχουμε

$$\frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon h}\left[F(x,w(x)+(x-\xi)k,\, w'(x)+k) - F(x,w(x),w'(x))\right]dx$$

$$+ \frac{1}{h}\int_{\xi+\varepsilon h}^{\xi+h}\left[F\left(x,w(x)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\xi+h-x)k,\, w'(x)-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}k\right) - F(x,w(x),w'(x))\right]dx \geq 0$$

Παρατηρώ ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}A^0 = \varepsilon\left[F(\xi,w(\xi),w'(\xi)+k) - F(\xi,w(\xi),w'(\xi))\right]$$

Παρόμοια,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}B^0 = \lim_{h\to 0}\left(\int_{\xi+\varepsilon h}^{\xi+h}\left(F\left(x,w(x)+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\xi+h-x)k,\, w'(x)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k\right) - F(x,w(x),w'(x))\right)dx\right.$$

$$= F\left(\xi,w(\xi),w'(\xi)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k\right) - F(\xi,w(\xi),w'(\xi)) -$$

$$- \varepsilon\left[F\left(\xi,w(\xi),w'(\xi)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k\right) - F(\xi,w(\xi),w'(\xi))\right]$$

$$= (1-\varepsilon)\left[F\left(\xi,w(\xi),w'(\xi)-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}k\right) - F(\xi,w(\xi),w'(\xi))\right]$$

Μαζεύοντας και τους 2 όρους μαζί θα πάρουμε:

$$\varepsilon\left[F(\xi,w(\xi),w'(\xi)+k)-F(\xi,w(\xi),w'(\xi))\right]+$$

$$+(1-\varepsilon)\left[F\left(\xi,w(\xi),w'(\xi)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k\right)-F(\xi,w(\xi),w'(\xi))\right]\geq 0$$

Με διαίρεση $\varepsilon>0$ έχουμε

$$F(\xi,w(\xi),w'(\xi)+h)-F(\xi,w(\xi),w'(\xi))+$$

$$+\frac{F\left(\xi,w(\xi),w'(\xi)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k\right)-F(\xi,w(\xi),w'(\xi))}{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\geq 0$$

Οπότε,

$$F(\xi,w(\xi),w'(\xi)+k)-F(\xi,w(\xi),w'(\xi))-F_z(\xi,w(\xi),w'(\xi))k\geq 0.$$

Αν η $F\in C^2$ $\Longrightarrow$ $F_{zz}(\xi,w(\xi),w'(\xi))\geq 0$ //

## Κυρτά Συναρτησοειδή

Το $J(u)$, $u\in A$

το $A$ είναι τέτοιο ώστε $\phi|_{\partial\Omega}=0$ (π.χ. $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$),

$\forall u\in A$, $u+\phi\in A$

Το $J$ είναι κυρτό συναρτησοειδές αν

$$J(u+\phi)-J(u)\geq \delta J(u;\phi),$$

$\forall u\in A$, $\forall\phi$

Αν $J(u)=\int_a^b F(x,u(x),u'(x))dx$ με $F\in C^1([\alpha,\beta]\times R^2)$

και $u\in A=\{u\in C^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$

$\phi\in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=0$, $\phi(\beta)=0$

$\Longrightarrow$ $u+\phi\in A$ και τότε

$$\delta J(u;\phi) = \int_a^b \left[ F_u(x,u(x),u'(x))\,\phi(x) + F_{u'}(x,u(x),u'(x))\,\phi'(x) \right] dx$$

Οπότε, η συνθήκη $J(u+\phi) - J(u) \geq \delta J(u;\phi) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b F(x,u(x)+\phi(x),u'(x)+\phi'(x)) - \int_a^b F(x,u(x),u'(x)) \geq$$

$$\geq \int_a^b \left[ F_u(x,u(x),u'(x))\phi(x) + F_{u'}(x,u(x),u'(x))\phi'(x) \right] dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b \Big[ F(x,u(x)+\phi(x),u'(x)+\phi'(x)) - F(x,u(x),u'(x)) -$$

$$- F_u(x,u(x),u'(x))\phi(x) - F_{u'}(x,u(x),u'(x))\phi'(x) \Big] dx \geq 0,$$

$$\forall \phi \in C_0^1[\alpha,\beta]$$

Μια τέτοια συνθήκη είναι η $F$ κυρτή ως προς τις μεταβλητές $(y,z)$.

Δηλ. $F(x,y+u,z+v) - F(x,y,z) = F_y(x,y,z)u - F_z(x,y,z)v \geq 0$

Τότε κάθε ελαχιστοποιητής, ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό. //

Έστω $w$ λύση της Euler-Lagrange.

Στο παράδειγμα
$$J(u) = \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx,$$
$$u \in A = \{u \in C^1[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=c_1,\ u(\beta)=c_2\}$$

Αυτό σημαίνει ότι
$$\frac{d}{dx} F_{u'}(x,w(x),w'(x)) = F_u(x,w(x),w'(x))$$

όπως επίσης
$$\delta J(w;\phi) = \int_a^b \left( F_u(x,w(x),w'(x))\phi(x) + F_{u'}(x,w(x),w'(x)) \right) \phi'(x)\, dx = 0$$

$$\forall \phi \in C^1[\alpha,\beta],\ \phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$$

ω ελαχιστοποιητής

Αν ορίσουμε $g(\varepsilon) = J(\omega+\varepsilon\phi)$ τότε έχουμε $g(\varepsilon) \geq g(0)$
και $g$ είναι παραγωγίσιμη, $g'(0)=0$

$$g'(\varepsilon) = \lim_{\delta\to 0} \frac{J(\omega+(\varepsilon+\delta)\phi) - J(\omega+\varepsilon\phi)}{\delta}$$
$$= \delta J(\omega+\varepsilon\phi;\phi).$$

Εαν επιπρόσθετα η $f \in C^2([a,b]\times R^2)$ τότε $g$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη

$$g''(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta J(\omega+\varepsilon\phi;\phi) - \delta J(\omega;\phi)}{\varepsilon}$$

Αναγκαία συνθήκη για $g(\varepsilon)\geq g(0)$ $\Rightarrow$ $g''(0)\geq 0$

Ικανή συνθήκη $g''(0)>0$ $\Rightarrow$ το 0 είναι τοπικό ελάχιστο της $g$.

Πάμε να υπολογίσουμε:

$$\delta J(\omega+\varepsilon\phi;\phi) = \int_a^b \left( f_u(x,\omega+\varepsilon\phi,\omega'+\varepsilon\phi')\phi(x) + f_{u'}(x,\omega+\varepsilon\phi,\omega'+\varepsilon\phi')\phi'(x) \right) dx$$

$$\delta^2 J(\omega;\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta J(\omega+\varepsilon\phi;\phi) - \delta J(\omega,\phi)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[ \int_a^b \left( f_u(x,\omega+\varepsilon\phi,\omega'+\varepsilon\phi')\phi + f_{u'}(x,\omega+\varepsilon\phi,\omega'+\varepsilon\phi')\phi'(x) \right) \right.$$
$$\left. - \int_a^b \left( f_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) + f_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x) \right) dx \right.$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[ \int_a^b \left[ f_u(x,\omega(x)+\varepsilon\phi(x),\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x)) - f_u(x,\omega(x),\omega'(x)) \right]\phi(x) \right.$$
$$+ \int_a^b \left[ f_{u'}(x,\omega(x)+\varepsilon\phi(x),\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x)) - f_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) \right]\phi'(x)\, dx$$

$$=\int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0}\left[F_u(x,w(x)+\varepsilon\phi(x),w'(x)+\varepsilon\phi'(x))-F_u(x,w(x),w'(x))\right]\phi(x)\,dx$$

$$+\int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0}\left[F_{u'}(x,w(x)+\varepsilon\phi(x),w'(x)+\varepsilon\phi'(x))-F_{u'}(x,w(x),w'(x))\right]\phi'(x)\,dx$$

$$=\int_a^b\left[F_{uu}(x,w(x),w'(x))\phi(x)+F_{uu'}(x,w(x),w'(x))\phi'(x)\right]\phi(x)\,dx\ +$$

$$+\int_a^b\left[F_{u'u}(x,w(x),w'(x))\phi(x)+F_{u'u'}(x,w(x),w'(x))\phi'(x)\right]\phi'(x)\,dx$$

$$=\int_a^b\left[F_{uu}(x,w(x),w'(x))\phi^2+2F_{uu'}(x,w(x),w'(x))\phi'(x)\phi(x)\ +\right.$$

$$\left.+\ F_{u'u'}(x,w(x),w'(x))(\phi'(x))^2\right]dx\ ,\ \geq 0$$

$$\forall\phi\in C^1[\alpha,\beta],$$

$$\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$$

Με επιλογές στην $\phi$ προκύπτει ότι

$F_{u'u'}(x,w(x),w'(x))\geq 0\ ,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$

Λογισμός Μεταβολών 14/04/2021

Από την προηγούμενη φορά θέλαμε να βρούμε ελαχιστοποιητή για το $J(u)$, $u \in A$.

Αν $\omega$ ελαχιστοποιητής έχουμε την συνάρτηση

$$g(\varepsilon) = J(\omega + \varepsilon\phi) \quad , u+\varepsilon\phi \in A \ , \forall \varepsilon > 0$$

Ισχύει $g(\varepsilon) \geq g(0)$.

Αν $g$ είναι δύο φορές παραγωγ. στο μηδέν

$$\Rightarrow g'(0) = 0$$
$$g''(0) \geq 0$$

$$g'(0) = \delta J(\omega;\phi)$$
$$g''(0) = \delta^2 J(\omega;\phi) \geq 0$$

Αν $J(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\,dx \qquad F \in C^2$

$$u \in A = \{u \in C^1[\alpha,\beta] \ ; \ u(\alpha) = c_1, \ u(\beta) = c_2\}$$

$$\underbrace{\delta^2 J(\omega;\phi) \geq 0}_{\text{θέλω να κρατάει πρόσημο}}$$

$$\delta J(\omega;\phi) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \left(F_u(x,\omega,\omega')\phi + F_{u'}(x,\omega,\omega')\phi'\right)dx = 0$$

$$0 \leq \int_a^b \Big[ F_{uu}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi^2(x) + 2F_{uu'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)\phi'(x) +$$
$$+ F_{u'u'}(x,\omega(x),\omega'(x))(\phi')^2 \Big]dx$$

Αναγκαία συνθήκη για αυτό είναι:
$$F_{u'u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) \geq 0 \ , \forall x \in [\alpha,\beta]$$

Εαν γνωρίζουμε επιπρόσθετα ότι η συνάρτηση $F_{uu'}(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς $x$, τότε έχουμε:

$$\int_a^b F_{uu'}(x,\omega(x),\omega'(x))(\phi^2(x))'\,dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{uu'}(x,\omega(x),\omega'(x))\right)\phi^2(x)\,dx$$

και επομένως τότε $\delta^2 J(\omega;\phi) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_a^b \Big[ F_{u'u'}(x,\omega(x),\omega'(x))(\phi'(x))^2 + \Big(F_{uu}(x,\omega(x),\omega'(x)) - \frac{d}{dx}F_{uu'}(\quad)\Big)\phi^2(x)\,dx$$
$$= 0$$

Το ενδιαφέρον μας θα εστιαστεί στο πότε

$$\int_{a}^{b}\left(P(x)(\phi'(x))^2+Q(x)\phi^2(x)\right)dx \geq 0 \quad , \forall\, \phi \in C^1[\alpha,\beta]$$

$$\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$$

Είχαμε: $P(x) \geq 0$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της θετικής παραμέτρου $c$ ώστε

$$\int_0^1 (u'(x))^2 \geq c\int_0^1 u^2(x)\,dx \quad , \forall\, \phi \in C^1[0,1] \quad , \phi(0)=\phi(1)=0$$

Θα δώσει απάντηση στο πότε έχουμε (για ποιες τιμές του $\lambda$)

$$\int_0^1\left((u'(x))^2-\lambda u^2(x)\right)dx \geq 0 \quad , \forall\, u\in C^1[0,1] \quad , u(0)=u(1)=0$$

Απάντηση

$A=\{u\in C^1[0,1] \, , u(0)=0=u(1)\}$

και θέτουμε $\quad G(u)=\int_0^1 u^2(x)\,dx=1$

Τότε το ζητούμενο είναι: $\quad J(u)=\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$

$$\int_0^1 (u'(x))^2\,dx \geq c\underbrace{\int_0^1 u^2(x)\,dx}_{1} \Leftrightarrow$$

να βρούμε το $c$, ώστε $J(u)\geq c$, $G(u)=1$

και έτσι το πρόβλημα είναι η εύρεση της ελάχιστης τιμής του $J(u)$, $u\in A$ με την δέσμευση $G(u)=1$.

Δηλ. $\min\limits_{u\in A} J(u)$, $G(u)=1$

$1^{\text{ος}}$ Στόχος είναι η εύρεση των πιθανών ελαχιστοποιητών.

$2^{\text{ος}}$ Στόχος η απόδειξη ότι αν $\omega\in A$ ελαχιστοποιητής, τότε $u\in A$

$$J(u)\geq J(\omega) \text{ με την δέσμευση } G(\omega)=1$$

$$G(u)=1$$

Υλοποίηση του 1ου Στόχου (J, G παραγωγίσιμες)

$$f(x,u,u') = (u')^2 \in C^1$$
$$G(x,u,u') = u^2 \in C^1$$

όπου

$$J(u) = \int_0^1 f(x,u(x),u'(x))\,dx$$

$$G(u) = \int_0^1 g(x,u(x),u'(x))\,dx$$

Αν ω πιθανός ελαχιστοποιητής, θα θέλαμε να $\exists\, \phi \in C^1[0,1]$, ώστε $\delta G(\omega;\phi) \neq 0$.

Οπότε αν $\omega \in A$ ελαχιστοποιητής

$$G(\omega) = 1 \iff \int_0^1 \omega^2(x)\,dx = 1$$

τότε
$$\delta G(\omega;\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(\omega+\varepsilon\phi) - G(\omega)}{\varepsilon} = 2\int_0^1 \omega(x)\phi(x)\,dx$$

Εδώ μπορούμε να επιλέξουμε $\phi = \omega \in C^1[0,1]$

και τότε $\delta G(\omega;\omega) = 2\int_0^1 \omega^2(x)\,dx = 2 \neq 0$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα και έχουμε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\delta J(\omega;\phi) = \lambda\, \delta G(\omega;\phi) \quad , \forall \phi \in C^1[0,1], \quad \phi(0) = \phi(1) = 0$$
με $G(\omega) = 1$

και επομένως

$$2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx = 2\lambda \int_0^1 \omega(x)\phi(x)\,dx \quad , \forall \phi \in C^1[0,1],\ \phi(0)=\phi(1)=0$$

κ' $\int_0^1 \omega^2(x)\,dx = 1$

$$(*) \quad \int_0^1 \left[\omega'(x)\phi'(x) - \lambda\omega(x)\phi(x)\right]dx = 0, \quad \forall \phi \in C^1[0,1], \quad \phi(0) = \phi(1) = 0$$

κ' $\int_0^1 \omega^2(x)\,dx = 1$

(★) $\xrightarrow{\text{Λήμμα}}$ η $w'$ είναι $C^1$ και μάλιστα

$$(w'(x))' = -\lambda w(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$$\Leftrightarrow w''(x) + \lambda w(x) = 0, \quad w(0) = w(1) = 0$$

Θέλουμε να βρούμε λύσεις $w$ του

$$\begin{cases} w''(x) + \lambda w(x) = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

Περιπτώσεις για το $\lambda$: (χαρακτ. $p^2 + \lambda = 0$)

(i) $\lambda = 0$

$$w''(x) = 0 \Rightarrow w(x) = c_1 + c_2 x$$

Αν $w(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Rightarrow w(x) \equiv 0$

$w(1) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$ απορρίπτεται διότι θέλουμε $\int_0^1 w^2(x)\,dx = 1$

(ii) $\lambda < 0$, $p^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow p^2 = -\lambda > 0$

$$\Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$w(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad x \in [0,1]$$

$w(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1$

$w(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$

$$\Leftrightarrow c_1\left(e^{+\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Leftrightarrow c_1 \underbrace{\left(e^{2\sqrt{-\lambda}} - 1\right)}_{\overset{?}{=} 0} = 0$$

$\Rightarrow$ Όχι διότι $e^x > 1, \forall x > 0$

$\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow w(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]$

απορρίπτεται όπως προηγουμένως.

(iii) $\lambda > 0$, $p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\lambda}\, i$, $e^{\sqrt{\lambda} i x}$, $e^{-\sqrt{\lambda} i x}$

$\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$w(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$w(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

$w(1) = 0 \Leftrightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad c_2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda})=0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}=k\pi, \ k\in\mathbb{N}$

$\lambda_k=(k\pi)^2, \ k\in\mathbb{N}$

Άρα, $\omega_k(x)=c_k\sin(k\pi x)$

Θέλουμε επίσης $\int_0^1 \omega^2(x)dx=1$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 c_k^2\sin^2(k\pi x)dx=1$$

$$\Leftrightarrow c_k^2\int_0^1 \frac{1-\cos(2k\pi x)}{2}dx=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_k^2}{2}=1 \Leftrightarrow c_k=\pm\sqrt{2}$$

$\lambda_k=(k\pi)^2$ και τότε $\omega_k(x)=\pm\sqrt{2}\sin(k\pi x)$

$$\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx=\lambda\int_0^1 \omega(x)\phi(x)\,dx \quad, \forall \phi\in C^1[0,1] \quad, \phi(0)=\phi(1)=0$$

Επιλέγουμε $\phi=\omega$

$$\int_0^1 (\omega'(x))^2dx=\lambda\int_0^1 \omega^2(x)dx=\lambda$$

$$\Rightarrow J(\omega_k)=\int_0^1 (\omega_k'(x))^2dx=\lambda_k=(k\pi)^2, \ k\in\mathbb{N}$$

και επομένως η μικρότερη δυνατή τιμή είναι αν επιλέξουμε $k=1$.

$\omega_1(x)=\pm\sqrt{2}\sin(\pi x)$

$$\Rightarrow J(\omega_1)=\pi^2 \quad, \omega_1(x)=\sqrt{2}\sin(\pi x)$$

Επόμενος Στόχος (2ος) $\quad u\in A \quad, G(u)=1$

$$\Rightarrow J(u)\geq J(\omega_1)=\pi^2$$

και επομένως να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^1 (u'(x))^2dx\geq \pi^2\int_0^1 u^2(x)dx \quad, \forall u\in C^1[0,1] \quad, u(0)=u(1)=0$$

$w_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x)$ , $w>0$ $x\in(0,1)$

$w''(x) + \pi^2 w(x) = 0$

$w(0) = w(1) = 0$

Θέτουμε $u \in C^1[0,1]$

$u(x) = \sin(\pi x)\, v(x)$

$\Rightarrow u'(x) = \pi\cos(\pi x)v(x) + \sin(\pi x)v'(x)$

Θα αποδείξουμε ότι όντως έχουμε

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2(x)\,dx$$

Πράγματι, $\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \int_0^1 \left(\pi\cos(\pi x)V(x) + \sin(\pi x)v'(x)\right)^2 dx$

$$= \int_0^1 \sin^2(\pi x)(v'(x))^2 dx + 2\pi \int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)v(x)v'(x)\, dx + \pi^2 \int_0^1 \cos^2(\pi x)v^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sin^2(\pi x)(v'(x))^2 dx + 2\pi \underbrace{\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)v(x)v'(x)\,dx}_{k} + \pi^2 \int_0^1 \cos^2(\pi x)v^2(x)\,dx$$

$$k = \pi \int_0^1 \underbrace{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}_{\frac{\sin(2\pi x)}{2}}(v^2(x))'dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^1 (\sin(2\pi x))' v^2(x)\,dx + 0$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^1 [\cos(2\pi x)2\pi]\, v^2(x)\,dx =$$

$$= -\pi^2 \int_0^1 \cos(2\pi x)v^2(x)\,dx$$

Οπότε, $\int_0^1 (u'(x))^2 dx$

$$= \int_0^1 \sin^2(nx)(v'(x))^2 dx - n^2 \int_0^1 \cos(2nx) v^2(x) + n^2 \int_0^1 \cos^2(nx) v^2(x)$$

$$= \int_0^1 \sin^2(nx)(v'(x))^2 dx + n^2 \int_0^1 \underbrace{(\cos^2(nx) - \cos(2nx))}_{\sin^2(nx)} v^2(x) dx$$

$$= \int_0^1 \sin^2(nx)(v'(x))^2 + n^2 \int_0^1 \sin^2(nx) \cdot v^2(x) dx$$

Καταδείξαμε λοιπόν στο ότι $u(x) = \sin(nx)\omega(x)$

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \int_0^1 \sin^2(nx)(\sigma'(x))^2 + n^2 \int_0^1 u^2(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (u'(x))^2 dx - n^2 \int_0^1 u^2(x) dx = \int_0^1 \sin^2(nx)(\sigma'(x))^2 dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq n^2 \int_0^1 u^2(x) dx$$

## Αντίστοιχο Πρόβλημα στις 2 μεταβλητές

Εύρεση ελάχιστης τιμής του $c > 0$ ώστε να ισχύει:

$$\int_0^1 \int_0^1 (u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)) dx dy \geq c \int_0^1 \int_0^1 u^2(x,y) dx dy$$

Επιλέξτε $u \in C^2([0,1]^2)$

$u \in C^1([0,1]^2)$ και $u(x,0) = u(x,1) = 0$

$u(0,y) = u(1,y) = 0, \ \forall y \in [0,1]$

Οπότε το $J(u)$ θα είναι:

$$J(u) = \int_0^1 \int_0^1 (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

κ' $G(u)=\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy=1$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \exists\, \lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\delta J(\omega;\phi)=\lambda\,\delta G(\omega,\phi)$

$$2\int_0^1\int_0^1(\omega_x\phi_x+\omega_y\phi_y)\,dx\,dy=2\lambda\int_0^1\int_0^1\omega\phi\,dx\,dy$$

κ' $\int_0^1\int_0^1\omega^2(x,y)\,dx\,dy=1$

Το όλο πρόβλημα ανάγεται στο

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε

$\omega_{xx}(x,y)+\omega_{yy}(x,y)+\lambda\,\omega(x,y)=0$

$\omega(x,0)=\omega(x,1)=0,\quad x\in[0,1]$

$\omega(0,y)=\omega(1,y)=0,\quad y\in[0,1]$

$$\int_0^1\int_0^1\omega^2(x,y)\,dx\,dy=1$$

Ψάχνουμε για λύση $\omega(x,y)=A(x)B(y)$

# Λογισμός Μεταβολών

19/04/2021.

## Πρόβλημα

Για τις διάφορες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ θέλουμε να δούμε πότε, $\forall u \in C^1[0,1]$, $u(0)=u(1)=0$

$$\int_0^1 \left[(u'(x))^2 - c u^2(x)\right] dx \geq 0$$

Είδαμε ότι έχουμε την ανισότητα

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2(x)\, dx \quad , \quad \forall u \in C^1[0,1], \; u(0)=u(1)=0$$

Μάλιστα, αν πάρουμε $\phi(x) = \sin(\pi x)$, τότε

$$\int_0^1 (\phi')^2 dx = \pi^2 \int_0^1 \phi^2(x) dx$$

Τότε αν $c \leq \pi^2$, έχουμε

$$\underbrace{\int_0^1 (u'(x))^2 dx - \pi^2 \int_0^1 u^2(x)}_{\geq 0} + \underbrace{(-c+\pi^2)}_{\geq 0} \int_0^1 u^2(x)\, dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[(u'(x))^2 \geq c u^2(x)\right] dx \geq 0, \quad \forall u \in C^1[0,1], \; u(0)=u(1)=0$$

Τι γίνεται αν επιλέξουμε το $c > \pi^2$?

Τότε, έχουμε επιλέγοντας

$$u(x) = \sin(\pi x) = \phi \Rightarrow \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx = \pi^2 \int_0^1 \phi^2(x) dx$$

Οπότε, $$\int_0^1 \left[(\phi'(x))^2 - c\phi^2(x)\right] dx = \pi^2 \int_0^1 \phi^2(x) dx - c \int_0^1 \phi^2(x) dx =$$

$$= (\pi^2 - c) \int_0^1 \phi^2(x) dx < 0$$

//

## Πρόβλημα

Για τις τιμές της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$ να δούμε πότε έχουμε

$$\int_0^1\int_0^1 \left(u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y) - k u^2(x,y)\right) dx\,dy \geq 0,$$

$$\forall u \in C^2([0,1]^2), \quad u(x,0)=u(x,1)=0, \ \forall x \in [0,1]$$
$$u(0,y)=u(1,y)=0, \ \forall y \in [0,1]$$

Υποπρόβλημα:

Να βρούμε τη βέλτιστη σταθερά $c$ ώστε να ισχύει

$$\int_0^1\int_0^1 (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy \geq c\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\forall u \in C^2([0,1]^2), \quad u\big|_{\partial[0,1]^2}=0.$$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $\quad J(u)=\int_0^1\int_0^1 (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$

με τη δέσμευση

$$G(u)=\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

με $u \in A = \{u \in C^2[0,1]^2, \ u\big|_{\partial[0,1]^2}=0\}$

Γιατί δουλεύει η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange?

Αν ω ελαχιστοποιητής

Θέλουμε $\exists \ \phi \in C^2[0,1]^2, \ \phi\big|_{\partial[0,1]^2}=0$

ώστε

$$\delta G(\omega;\phi) \neq 0 \quad \text{και τότε}$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο $\omega$ να ικανοποιεί

$$\delta J(\omega;\psi) = \lambda\,\delta G(\omega;\psi), \quad \forall \psi \in A$$

κ' $\quad G(\omega)=1$

Τότε $\delta G(\omega;\psi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{G(\omega+\varepsilon\psi)-G(\omega)}{\varepsilon}$

$\psi\in A$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1\int_0^1 \left[(\omega+\varepsilon\psi)^2-\omega^2\right] dxdy\right.$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\int_0^1 \left[2\varepsilon\omega\psi+\varepsilon^2\psi^2\right] dX^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1\int_0^1 (2\omega\psi+\varepsilon\psi^2)\, dxdy$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 (\omega\psi)\, dxdy.$$

Αντίστοιχα, $\delta J(\omega;\psi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{J(\omega+\varepsilon\psi)-J(\omega)}{\varepsilon}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\int_0^1 \left[(\omega_x+\varepsilon\psi_x)^2+(\omega_y+\varepsilon\psi_y)^2 - \omega_x^2-\omega_y^2\right] dxdy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\int_0^1 \left[2\varepsilon\omega_x\psi_x+\varepsilon^2\psi_x^2+2\varepsilon\omega_y\psi_y+\varepsilon^2\psi_y^2\right] dxdy$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 \left[\omega_x\phi_x+\omega_y\phi_y\right] dxdy$$

Αν επιλέξουμε $\phi=\omega$, τότε $\delta G(\omega;\omega) = 2\int_0^1\int_0^1 \omega^2\, dxdy =$

$= 2 \neq 0$

και επομένως $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το $\omega\in A$ να ικανοποιεί:

$\delta J(\omega;\psi) = \lambda\,\delta G(\omega;\psi)$, $\forall \psi\in A$.

$$\Rightarrow 2\int_0^1\int_0^1 \left[\omega_x\psi_x+\omega_y\psi_y\right] dxdy = \lambda\cdot 2\int_0^1\int_0^1 \omega\psi\, dxdy$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 [\omega_x \psi_x + \omega_y \psi_y - \lambda \omega \psi]\, dx dy = 0, \quad \forall \psi \in A.$$

Επειδή $\omega \in C^2$, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\int_0^1\int_0^1 [-\omega_{xx}\psi - \omega_{yy}\psi - \lambda\omega\psi]\, dx dy +$$
$$+ \left(\int_0^1 \omega_x(x,y)\psi(x,y)\, dy\right)\Big]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 (\omega_y \psi)\, dy \Big]_{y=0}^{y=1} = 0$$

Οπότε:

$$-\int_0^1\int_0^1 (\omega_{xx} + \omega_{yy} + \lambda\omega)\psi\, dx dy + \int_0^1 \omega_x(1,y)\underbrace{\psi(1,y)}_{=0} dy -$$
$$\int_0^1 \omega_x(0,y)\underbrace{\psi(0,y)}_{=0} dy + \int_0^1 \omega_y(x,1)\underbrace{\psi(x,1)}_{=0} dx - \int_0^1 \omega_y(x,0)\underbrace{\psi(x,0)}_{=0} dx = 0$$

Άρα,

$$-\int_0^1\int_0^1 [\omega_{xx} + \omega_{yy} + \lambda\omega]\psi\, dx dy = 0, \quad \forall \psi \in A$$

$$\Rightarrow \omega_{xx}(x,y) + \omega_{yy}(x,y) + \lambda\omega(x,y) = 0, \quad x\in[0,1],\ y\in[0,1]$$
$$\omega(x,1) = \omega(x,0) = 0, \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\omega(0,y) = \omega(1,y) = 0, \quad \forall y \in [0,1]$$

(Άρα, το θέμα μας είναι να λύσουμε αυτό το πρόβλημα)

Ψάχνουμε για λύσεις στην μορφή $\omega(x,y) = A(x)B(y)$

Από την συνοριακή συνθήκη, πρέπει

- $\omega(0,y) = 0 \iff A(0)B(y) = 0 \Rightarrow A(0) = 0$,

επειδή η $B(y)$ δεν μηδενίζεται σε κάποιο σημείο

$$= \pi^2 \iint \cos^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, v^2 + \iint \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, v_x^2(x,y)\,dx\,dy$$

$$+ 2\pi \int_0^1\int_0^1 \overbrace{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}^{\frac{\sin(2\pi x)}{2}} \sin^2(\pi y)\, u u_x \,dx\,dy .$$

$$2uu_x = (u^2)_x$$

$$\frac{\pi}{2}\iint \sin(2\pi x)\sin^2(\pi y)\,(v^2)_x\,dx\,dy$$

Επομένως,

$$= \int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, v_x^2(x,y)\,dx\,dy - \pi^2 \int_0^1\int_0^1 \cos(2\pi x)\sin^2(\pi y)\, v^2$$

$$+ \pi^2 \int_0^1\int_0^1 \cos^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, v^2(x,y)\,dx\,dy$$

$$\left(\cos^2(\pi x) - \cos(2\pi x) = \sin^2(\pi x)\right)$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, u_x^2(x,y)^2\,dx\,dy \; +$$

$$+ \underbrace{\pi^2 \int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, v^2(x,y)\,dx\,dy}_{\pi^2\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy}$$

Αντίστοιχα, έχουμε

$$\int_0^1\int_0^1 u_y^2(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\, v_y^2\,dx\,dy \; +$$

$$+ \pi^2 \int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)\,(v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy$$

$$+ 2\pi^2 \int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy \geq 2\pi^2 \int_0^1\int_0^1 u^2\,dx\,dy$$

Άρα, αποδείξαμε την ανισότητα:

$$\int_0^1\int_0^1 (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy \geq 2\pi^2 \int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\forall u \in C^1([0,1]^2),\quad u|_{\partial[0,1]^2}=0$$

Εύκολα έχουμε, $u\in C^1([0,1]^2)$, $u|_{\partial[0,1]^2}=0$

$$\int_0^1\int_0^1 (u_x^2+u_y^2-ku^2)\,dx\,dy \geq 0, \quad \text{αν } k\leq 2\pi^2.$$

όπως επίσης αν επιλέξουμε
$u(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)=\phi$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 (\phi_x^2+\phi_y^2-k\phi^2)\,dx\,dy=(2\pi^2-k)\int_0^1\int_0^1 \phi^2(x,y)\,dx\,dy < 0$$

αν $k>2\pi^2$

//

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής:
Πότε έχουμε

$$(\star)\quad \int_0^1 \left(P(x)(\phi'(x))^2+Q(x)\phi^2(x)\right)dx\geq 0,$$

$$\forall \phi\in C^1[0,1],\quad \phi(0)=\phi(1)=0$$

όπου $P, Q\in C[\alpha,\beta]$

Λήμμα (Αναγκαία Συνθήκη)
Αν $(\star)$ ισχύει $\forall \phi\in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$
τότε $P(x)\geq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη (Με απαγωγή σε άτοπο)

• $\omega(1,y)=0 \Rightarrow A(1)=0$

• $\omega(x,0)=0 \Leftrightarrow A(x)B(0)=0, \quad \forall x\in[0,1]$
$$\Rightarrow B(0)=0.$$

• $\omega(x,1)=0 \Rightarrow B(1)=0$

και τότε: $u_x(x,y)=A'(x)B(y)$
$$u_{xx}(x,y)=A''(x)B(y)$$

Αντίστοιχα,
$$u_{yy}(x,y)=A(x)B''(y)$$

και η Δ.Ε. γράφεται:
$$A''(x)B(y)+A(x)B''(y)+\lambda A(x)B(y)=0, \quad \forall x\in[0,1], \forall y\in[0,1]$$

$$\Rightarrow \frac{A''(x)}{A(x)}+\frac{B''(y)}{B(y)}+\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$\exists\, \mu\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\frac{A''(x)}{A(x)}=-\mu \Leftrightarrow A''(x)+\mu A(x)=0, \quad \forall x\in[0,1]$
$$A(0)=A(1)=0$$

$$-\mu+\frac{B''(y)}{B(y)}+\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow B''(y)+\overbrace{(\lambda-\mu)}^{\sigma}B(y)=0, \quad \forall y\in[0,1]$$
$$B(0)=B(1)=0$$

Άρα, για το πρόβλημα:
$$A''(x)+\mu A(x)=0,$$
$$A(0)=A(1)=0, \quad x\in[0,1]$$
$$\Rightarrow \mu_k=+(k\pi)^2,$$
$$A_k(x)=\sin(k\pi x), \quad x\in[0,1], \quad k\in\mathbb{N}$$

Αντίστοιχα,
$$B''(y)+\overbrace{(\lambda-\mu)}^{\sigma}B(y)=0, \quad B(0)=B(1)$$

$$\Rightarrow \sigma_\ell=(\ell\pi)^2, \quad B_\ell(y)=\sin(\ell\pi y), \quad \ell\in\mathbb{N}$$

Καταλήγουμε επομένως ότι πρέπει: $\lambda - \mu_k = \sigma_\ell$

και $\lambda_{k,\ell} = (k\pi)^2 + (\ell\pi)^2$

$$\omega_{k,\ell}(x,y) = \sin(k\pi x)\sin(\ell\pi y), \quad x,y \in [0,1].$$

και τότε:

$$\delta J(\omega;\psi) = \lambda G(\omega;\psi)$$

$$\psi = \omega \Rightarrow \delta J(\omega;\omega) = \lambda \underbrace{G(\omega;\omega)}_{1}$$

~~Τότε~~

$$\lambda_{k,\ell} = (k^2+\ell^2)\pi^2$$

το μικρότερο δυνατό είναι επιλέγοντας $k=\ell=1$.

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2\pi^2, \quad \omega(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

Στόχος: Να αποδείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\int_0^1\int_0^1 (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy \geq 2\pi^2 \int_0^1\int_0^1 u^2\,dx\,dy$$

$\forall u \in C^1([0,1]^2)$

με $u(x,0) = u(x,1) = 0, \ \forall x \in [0,1]$

$u(0,y) = u(1,y) = 0, \ \forall y \in [0,1]$.

Για την απόδειξη θέτουμε

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\, v(x,y) \quad \text{και τότε:}$$

$$u_x(x,y) = \pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)v(x,y) + \sin(\pi x)\sin(\pi y)v_x(x,y)$$

κ'

$$u_y(x,y) = \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y)v(x,y) + \sin(\pi x)\sin(\pi y)v_y(x,y)$$

Τότε,

$$\int_0^1\int_0^1 u_x^2(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \left(\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)v(x,y) + \sin(\pi x)\sin(\pi y)v_x(x,y)\right)^2 dx$$

$=$

Έστω $x_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε $P(x_0) < 0$,
από τη συνέχεια της $P$ στο $x_0$, θα έχουμε
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ ώστε $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$, $|x - x_0| < \delta$

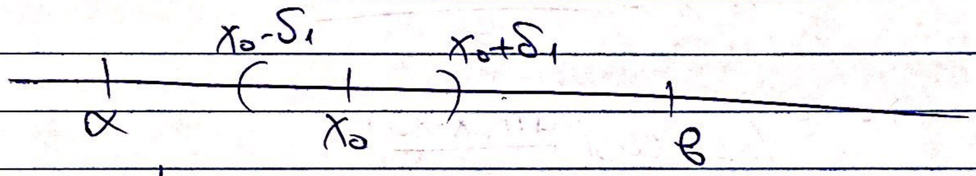
$$\Rightarrow |P(x) - P(x_0)| < \varepsilon.$$

Για $\varepsilon = -\dfrac{P(x_0)}{2}$, $\exists\, \delta_1$ τ.ω.

$$\underset{x\in[\alpha,\beta]}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |P(x) - P(x_0)| < -\frac{P(x_0)}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3P(x_0)}{2} < P(x) < \frac{P(x_0)}{2}$$



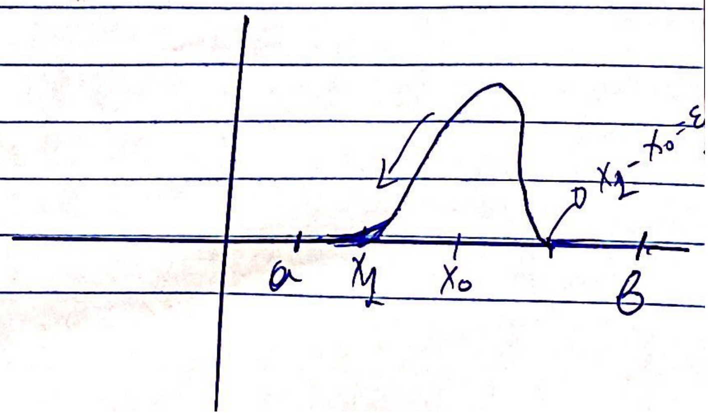

Υποθέτουμε,
$\alpha \le x_0 - \delta_1$, $x_0 + \delta_1 \le \beta$

$$\Rightarrow \forall\, x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1],\quad P(x) \le \frac{P(x_0)}{2}$$

Για $0 < \varepsilon < \delta_1$, ορίζουμε:

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{\pi(x - x_0)}{\varepsilon}\right), & |x - x_0| \le \varepsilon \\ 0, & x \in [\alpha,\beta] \text{ με } |x - x_0| > \varepsilon \end{cases}$$

Η $\phi_\varepsilon \in C^1[\alpha,\beta]$, $0 < \varepsilon < \delta_1$,
$x_1 - x_0 = -\varepsilon$



$$\phi_\varepsilon'(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\pi(x-x_0)}{\varepsilon}\right)\cos\left(\frac{\pi(x-x_0)}{\varepsilon}\right)\frac{\pi}{\varepsilon} & , |x-x_0| \le \varepsilon \\ 0 & , |x-x_0| > \varepsilon \end{cases}$$

Οπότε, $\qquad x_2 = x_0+\varepsilon$

$$\int_a^b \left(P(x)(\phi_\varepsilon')^2 + Q(x)\phi_\varepsilon^2\right)dx = \int \left(\phi(x)(\phi_\varepsilon')^2 + Q(x)\phi_\varepsilon^2\right)dx$$

$$\le \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\left[\frac{P(x_0)}{2}(\phi_\varepsilon')^2 + M\phi_\varepsilon^2\right]dx$$

$$= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\left(\frac{\phi(x_0)}{2}\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\sin^2\left(\frac{2\pi(x-x_0)}{\varepsilon}\right) + M\sin^2\left(\frac{\pi(x-x_0)}{\varepsilon}\right)\right)dx$$

Αξιοποιούμε το ότι $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$$= \frac{P(x_0)}{2}\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi(x-x_0)}{\varepsilon}\right)}{2}\right)dx +$$

$$+ M\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi(x-x_0)}{\varepsilon}\right)}{2}dx$$

$$= \frac{P(x_0)}{2}\frac{\pi}{\varepsilon} + M\varepsilon < 0, \text{ για } \varepsilon>0 \text{ μικρό.}$$

Θα δούμε την περίπτωση $P>0$ στο $[a,b]$.

# Λογισμός Μεταβολών

27/04/2021

## Λύσεις Φυλλαδίων 4 κ' 5

**Φυλλάδιο 4, άσκηση 4**

$$\omega(x) = -1 + \sqrt{2-(x-1)^2}$$

$$J(u) = \int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx, \quad u \in B = \{u \in C^1[0,1],\ u(0)=0,\ u(1)=\sqrt{2}-1\}$$

Με δοσμένο $G(x) = \int_0^1 u(x)\,dx = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

**Απόδειξη**

Βήμα 1ο : Υπάρχουν Ελαχιστοποιητές

Βήμα 2ο : Ο $\omega$ ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

Αρχικά το 2ο Βήμα:

Η κυρτότητα

**ΘΕΩΡΗΜΑ:**

$$J(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\,dx, \quad u \in A = \{u \in C^1[a,b],\ u(a)=c_1,\ u(b)=c_2\}$$

Η $F = F(x,y,z)$ κυρτή ως προς τη $(y,z)$ μεταβλητή.
Τότε αν $\omega$ λύνει την Euler-Lagrange
δηλ.

$$\delta J(\omega;\phi) = 0 \iff \int_a^b \left(F_u(x,\omega,\omega')\phi + F_{u'}()\,\phi'\right]dx = 0 \quad \forall\ \phi \in C_0^1[a,b]$$

$$\Rightarrow J(u) \geq J(\omega)$$

Στην περίπτωση $f(x,y,z)=\sqrt{1+z^2}$

$$f_z = \frac{1}{2}(1+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2z$$

$$= z(1+z^2)^{-1/2}$$

$$f_{zz} = (1+z^2)^{-1/2} + z\left(-\frac{1}{2}(1+z^2)^{-3/2}\,2z\right)$$

$$=(1+z^2)^{-1/2} - z^2(1+z^2)^{-3/2}$$

$$=(1+z^2)^{-3/2}\left[1+z^2-z^2\right] = (1+z^2)^{-3/2} > 0$$

Πως χρησιμοποιούμε την κυρτότητα? $(y,z)$

$$f(x,y,z) \geq f(x,w,h) + \nabla_{(y,z)} f(x,w,h)\cdot(y-w, z-h) =$$

$$= f(x,w,h) + f_y(x,w,h)(y-w) + f_z(x,w,h)(z-h)$$

$$\Rightarrow f(x,u(x),u'(x)) \geq f(x,w(x),w'(x)) +$$

$$f_y(x,w(x),w'(x))(u(x)-w(x)) + f_z(x,w(x),w'(x))\cdot(u'(x)-w'(x))$$

Στην περίπτωση μας επειδή $f(x,y,z)=\sqrt{1+z^2}$
είδαμε ότι:

$$f_z(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\Rightarrow f(x,u(x),u'(x)) \geq f(x,w(x),w'(x)) + f_z(x,w(x),w'(x))\cdot(u'(x)-w'(x))$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(u'(x))^2} \geq \sqrt{1+(w'(x))^2} + \frac{w'(x)}{\sqrt{1+(w'(x))^2}}(u'(x)-w'(x))$$

$$\Rightarrow J(u) = \int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\, dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 \sqrt{1+(\omega'(x))^2}\, dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} (u'(x)-\omega'(x))\, dx}_{K \geq 0 ?}$$

Αν $u \in B$, $G(u) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$\omega \in B$, $G(\omega) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Η δέσμευσή μας είναι γραμμική $\int_0^1 u(x)\, dx = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\overbrace{u(x) - \omega(x)}^{\phi(x) \in C_0^1[0,1]})\, dx = 0$$

$$\Rightarrow k = \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} \phi'(x)\, dx = -\int_0^1 \left(\frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\right)' \phi(x)\, dx$$

Ποιο είναι το πρόσημο του $k \geq 0$?

<u>Βήμα 1ο:</u> Αν $\omega \in B$ πιθανός ελαχιστοποιητής θα πρέπει να $\exists\ \phi \in C_0^1[0,1]$ και τέτοια ώστε $\delta G(\omega;\phi) \neq 0$

Οπότε, τότε το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\delta J(\omega,\psi) = \lambda\, \delta G(\omega;\psi)$

$G(\omega) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, $\forall\ \psi \in C_0^1[0,1]$

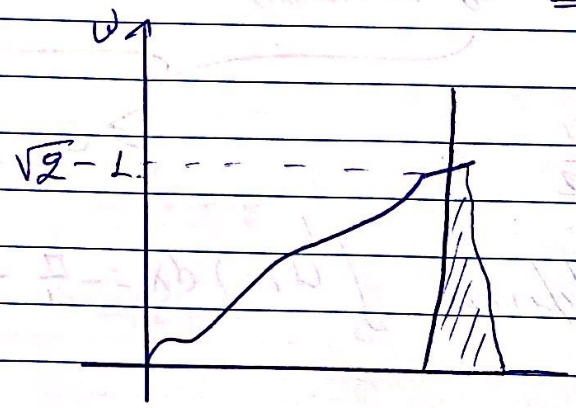
$\exists ?\ \phi \in C_0^1[0,1]$, $\delta G(\omega;\phi) \neq 0$ ?

$$\delta G(\omega;\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(\omega+\varepsilon\phi) - G(\omega)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 [(\omega+\varepsilon\phi) - \omega]\, dx\right] = \int_0^1 \phi(x)\, dx \neq 0$$

Υπάρχουν τέτοια $\phi$ π.χ.
$\phi > 0$ στο $(0,1)$ με $\phi(0) = \phi(1) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x)\,dx > 0.$$




Όμως,
$$\delta J(\omega;\psi) = \int_0^1 (F_{u'}\psi' + F_u \psi)\,dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} \psi'(x)\,dx$$

Οπότε, από το Θεώρημα $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω.
$$\delta J(\omega;\psi) = \lambda \delta G(\omega;\psi)$$

(Euler-Lagrange με δεσμευση)
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} \psi'(x)\,dx = \lambda \int_0^1 \psi(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left( \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} \psi'(x) - \lambda \psi(x) \right) dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^1[0,1]$$

$\Rightarrow$ Η $\dfrac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}$ είναι παραγωγ.

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[ -\left( \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} \right)' - \lambda \right] \psi\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} + \lambda x \right)' = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\dfrac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} = c - \lambda x \,, \quad x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \frac{(\omega'(x))^2}{1+(\omega'(x))^2} = (c-\lambda x)^2 \Rightarrow \frac{1}{1+(\omega'(x))^2} = 1-(c-\lambda x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} = \sqrt{1-(c-\lambda x)^2}$$

$$\Rightarrow \omega'(x)\sqrt{1-(c-\lambda x)^2} = c-\lambda x$$

$$\omega'(x) = \frac{c-\lambda x}{\sqrt{1-(c-\lambda x)^2}}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε:

$$\omega(x)-\omega(0) = \int_0^x \frac{(c-\lambda s)}{\sqrt{1-(c-\lambda s)^2}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1-(c-\lambda s)^2\right)^{1/2}\Big]_0^x$$

Επομένως,

$$\omega(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\left(1-(c-\lambda x)^2\right)^{1/2} - \left(1-c^2\right)^{1/2}\right), \quad x\in[0,1]$$

$$\omega(1) = \sqrt{2}-1$$

$$\int_0^1 \omega(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\varphi'(x)\,dx = \lambda\int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

Επιλέγουμε $\varphi(x) = u(x)-\omega'(x) \in C_0^1[0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\left(u'(x)-\omega'(x)\right)dx = 0 = K = 0$$

Πρόχειρο:

$$\left(\left(1-(c-\lambda s)^2\right)^{1/2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(\quad)^{-1/2}\left(1-(c-\lambda s)^2\right)'$$

$$= \frac{1}{2}(\quad)^{-1/2}\left[-2(c-\lambda s)(-\lambda)\right]$$

$$= \lambda\frac{c-\lambda s}{\sqrt{1-(c-\lambda s)^2}}$$

Φυλλάδιο Δ, Άσκηση 5η:

Εξετάστε εάν $\exists$ ελαχιστοποιητής του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^{\pi} (u'(x))^2 dx, \quad u \in A = \{u \in C^1[0,\pi],\ u(0) = u(\pi) = 0\}$$

με την δέσμευση $G(u) = \int_0^{\pi} u^2(x)\, dx = 1$.

Λύση]

Έστω $\omega \in A$ πιθανός ελαχιστοποιητής.

$\exists ?\ \phi \in C_0^1[0,\pi]$ με $\delta G(\omega;\phi) \neq 0$

Όμως $\delta G(\omega;\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{G(\omega+\varepsilon\phi) - G(\omega)}{\varepsilon} =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \big[\underbrace{(\omega+\varepsilon\phi)^2}_{\omega^2 + 2\varepsilon\phi + \varepsilon^2\phi^2} - \omega^2\big]\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \omega(x)\phi(x)\, dx$$

Αν επιλέξουμε $\phi = \omega \in C_0^1[0,1]$, τότε

$$\delta G(\omega;\omega) = 2\int_0^{\pi} \omega^2(x)\, dx = 2 \neq 0$$

Οπότε, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\delta J(\omega;\psi) = \lambda\, \delta G(\omega;\psi)$, $\forall \psi \in C_0^1[0,\pi]$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\pi} \omega'(x)\psi'(x)\, dx = \lambda \cdot 2\int_0^{\pi} \omega(x)\psi(x)\, dx$$

$$\delta J(\omega;\psi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \left[(\omega' + \varepsilon\psi')^2 - (\omega')^2\right] dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(\omega'(x)\psi'(x) - \lambda\omega(x)\psi(x)\right) dx = 0$$

$\Rightarrow \omega'$ παραγωγίσιμη και ισχύει

$$-\omega''(x) - \lambda\omega(x) = 0, \quad x \in [0,\pi]$$

$$\omega(0) = \omega(\pi) = 0, \quad \int_0^{\pi} \omega^2(x)\, dx = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $-p^2-\lambda=0$

$p^2+\lambda=0$

(i) $\lambda=0$ : $\omega(x)=c_1+c_2 x$ , $\omega(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0$
$\omega(\pi)=0 \Leftrightarrow c_2=0$

Αν $\lambda<0$ : $p^2=-\lambda>0 \Leftrightarrow p=\pm\sqrt{-\lambda}$

$\Rightarrow \omega(x)=c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$\omega(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-c_1$

$\omega(x)=c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}-e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$

$\omega(\pi)=0 \Leftrightarrow c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)=0$

$\Leftrightarrow c_1(\underbrace{e^{2\sqrt{-\lambda}\pi}-1}_{\neq 0})=0 \Leftrightarrow c_1=0$

$\Rightarrow \omega\equiv 0$

Αναγκαστικά $\lambda>0$, $p^2+\lambda=0$

$\Rightarrow p=\pm\sqrt{\lambda}\, i$

$\Rightarrow e^{\pm\sqrt{\lambda}ix}=\cos(\sqrt{\lambda}x)\pm i\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}x)$
$\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$\xrightarrow[\text{λύση}]{\text{Γενική}}$ $\omega(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

- $\omega(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0 \Rightarrow \omega(x)=c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$
- $\omega(\pi)=0 \Leftrightarrow c_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$

πρέπει $\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$
$\qquad\qquad \| $
$\qquad\quad \sin 0$

$\sqrt{\lambda}\pi=k\pi$ , $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k}=k$, $k\in\mathbb{N}$ , $\lambda_k=k^2$
$\omega_k(x)=\sin(kx)$

Επομένως, πιθανοί ελαχιστοποιητές είναι

$\lambda_k = k^2, \ k \in \mathbb{N}$

$w_k(x) = C_k \sin kx$

$$\int_0^{\pi} w_k^2(x)\,dx = 1 \iff C_k^2 \int_0^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = 1 \iff$$

$$\iff C_k^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\sin(2kx)}{2}\,dx = 1$$

$$\frac{\pi}{2} C_k^2 = 1 \iff C_k^2 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow C_k = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\Rightarrow w_k(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \ k \in \mathbb{N}$$

$$J(w_k) = \int_0^{\pi} (w_k'(x))^2\,dx = \frac{2}{\pi} k^2 \int_0^{\pi} \cos^2(kx)\,dx$$

$$= \frac{2k^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2kx)}{2}\,dx = \frac{2}{\pi} k^2 \cdot \frac{\pi}{2} = k^2, \ k \in \mathbb{N}$$

Επειδή θέλουμε πιθανό ελαχιστοποιητή, από όλες τις επιλογές μόνο μία μας δίνει την ελάχιστη δυνατή τιμή. Άρα, μόνο μια επιλογή μας κάνει. Όταν $k=1$.

Οπότε, ο $w_1(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$ είναι πιθανός ελαχιστοποιητής.

Φυλλάδιο 5, Άσκηση 1

Ελάχιστη τιμή(?) $f(x,y) = x^{2021} + y^{2021}$, $x,y \in \mathbb{R}$
με τη δέσμευση $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

Απόδειξη: Πότε τρέχει η μέθοδος Lagrange?

↳ Πρέπει $g(x,y)=1$
$\nabla g(x,y) \neq (0,0)$

Σωστό γιατί αν $\nabla g(x,y)=0$:
$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \overset{=(0,0)}{\Longleftrightarrow} x = y = 0$ που δεν ικανοποιεί $\underset{0}{g(0,0)}=1$.

Πιθανά τοπικά ακρότατα ικανοποιούν:
$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$
$g(x,y) = 1$.

$(2021x^{2020}, 2021y^{2020}) = \lambda \cdot 2(x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2021x^{2020} = 2\lambda x \\ 2021y^{2020} = 2\lambda y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(2021x^{2019} - 2\lambda) = 0 \\ y(2021y^{2019} - 2\lambda) = 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0$, $x^{2019} = \frac{2\lambda}{2021}$, $x = P_1 = \left(\frac{2\lambda}{2021}\right)^{1/2019}$

$y = 0$, $y = P_1$

$(0,0)$, $(0,P_1)$, $(P_1, 0)$, $(P_1, P_1)$ Πιθανά τοπικά ακρότατα.

απορ. $G(0,0)=1$, $0 + P_1^2 = 1$, $(P_1^2 + 0 = 1)$, $P_1^2 + P_1^2 = 1$

Οπότε έχουμε τα εξής σενάρια:

(1) $(0, P_1)$, $P_1^2 = 1 \Leftrightarrow P_1 = \pm 1$

$\Rightarrow f(0,P_1)$, $f(0,1) = 1$
$f(0,-1) = -1$

(2) $(P_1, 0) \Rightarrow P_1 = \pm 1 \Rightarrow f(1,0) = 1$

$f(-1,0) = -1$

(3) $(P_1, P_1) \Leftrightarrow 2P_1^2 = 1 \Leftrightarrow P_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2021} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2021}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = -\frac{1}{2^{\frac{2021}{2}-1}} = -\frac{1}{2^{\frac{2019}{2}}}$$

$f(-1,0) = f(0,-1) = -1.$

Στόχος $f(x,y) \geq -1$

$$\underset{\displaystyle x^{2021} + y^{2021}}{\overset{\parallel}{}} \quad , \quad g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 \leq 1$$

$$x^{2021} \geq -x^2 \Leftrightarrow x^2 + x^{2021} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-1 \leq x} \leq 1$$

$$x^2(1 + x^{2019}) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^{2019} \geq (-1)^{2019} = -1.$$

Αντίστοιχα, $y^{2021} \geq -y^2$

$$\Rightarrow x^{2021} + y^{2021} \geq -x^2 - y^2$$

$$= -(x^2 + y^2) \leq -1.$$

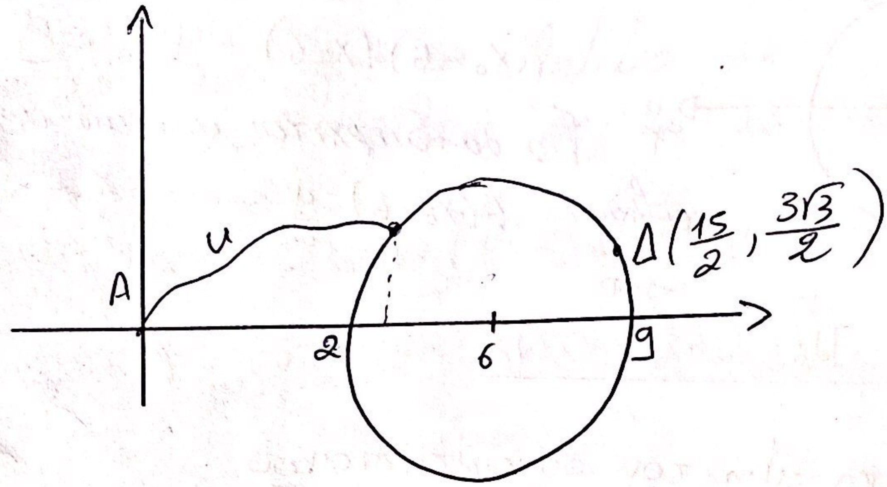
$\Rightarrow$ Ελάχιστη τιμή της $f$ με τη δέσμευση είναι $-1$.

# Λογισμός Μεταβολών 12/05/2021

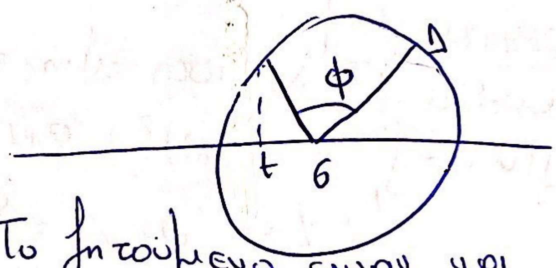
## ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

**Φυλλάδιο 5, Άσκηση 2**

Να βρεθεί η ελάχιστη διαδρομή.




**Λύση:**




$\cos\theta = \frac{6-t}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{6-t}{3}\right)$,

$\tan\omega = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{15}{2}-6} =$ Το ζητούμενο είναι να βρούμε την φ.

Άρα, $\tan\omega = \sqrt{3}$

$\omega = \pi/3$

$\frac{\phi}{2\pi} 2\pi R = \phi R = 3\phi$.

Επομένως,

Η διαδρομή στον κύκλο έχει μήκος

$3(\pi - \theta - \omega) = 3\left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{6-t}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\pi - 3\cos^{-1}\left(\frac{6-t}{3}\right)$

Το συνολικό μήκος που θα διανύσει είναι:

$$\int_0^t \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx + 2\pi - 3\cos^{-1}\left(\frac{6-t}{3}\right)$$

και επομένως το συναρτησιακό είναι

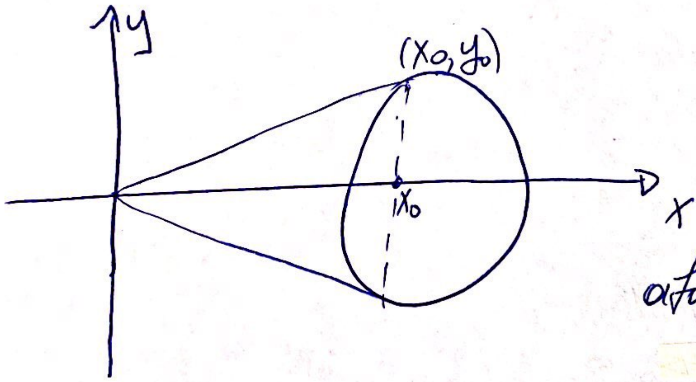
$$J(u,t) = \int_0^t \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx + 2\pi - 3\cos^{-1}\left(\frac{6-t}{3}\right)$$

με συνάρτηση ελέγχου $u \in A_t = \{u \in C^1[0,t],\ u(0)=0,$ $u(t)$ ικανοπ. την δεσμευση$\}$

με $G(t,u) = (t-6)^2 + u^2(t) = 9$

Παρατηρηση|

Περιμένουμε ότι στο σημείο $t$, η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $t$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.




$$(x-6)^2+y^2=9$$

$$(x_0-6)\cdot(x-6)+yy_0=9$$

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $6(x_0-6)=9 \Leftrightarrow -6x_0+36=9$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΕΣΜΕΥΣΕΙΣ

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1º|

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού

$$J(u)=\int_1^2 \left(x^2(u'(x))^2+2u^2(x)\right)dx$$

$$\text{με } u\in A=\{u\in C^1[1,2],\ u(1)=1\}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ|

Αρχικά θα βρούμε τον πιθανό ελαχιστοποιητή και στην συνέχεια επειδή η $f(x,y,z)=x^2z^2+2y^2$ είναι κυρτή ως προς τα $(y,z)$ θα το αξιοποιήσουμε για να βρούμε (με απόδειξη) την ελάχιστη τιμή.

(Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα που αποδείξαμε που αφορούσε κυρτές συναρτήσεις.)

Οπότε, έστω $\omega$ ελαχιστοποιητής, θέλουμε $\omega+\varepsilon\phi\in A$, οπότε πρέπει $\phi\in C^1[1,2]$ και

$$\underset{1}{\underset{\|}{\omega(1)}}+\varepsilon\phi(1)=1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi(1)=0,\ \text{για } 0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$$

Άρα, $\phi(1)=0$.

και τότε προκύπτει $\delta J(\omega;\phi)=0$

$$\delta J(\omega;\phi)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{J(\omega+\varepsilon\phi)-J(\omega)}{\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\int_1^2\left[x^2(\omega'+\varepsilon\phi')^2+2(\omega+\varepsilon\phi)^2-x^2(\omega')^2-2\omega^2\right]dx$$

$$= \int_1^2 [x^2 2\omega'(x)\phi'(x) + 4\omega(x)\phi(x)]\,dx = 0, \quad \forall \phi \in C^1[1,2]$$
$$\phi(1)=0$$

Επιλέγουμε αρχικά $\phi(2)=0$

Οπότε, τότε $\int_1^2 [x^2\omega'(x)\phi'(x) + 2\omega(x)\phi(x)]\,dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1[1,2]$

Επομένως, προκύπτει από το Λήμμα ότι η $x^2\omega'(x)$ είναι συνεχώς παρ/λιμη και μάλιστα ισχύει

$$\int_1^2 [-(x^2\omega'(x))' + 2\omega(x)]\phi(x)\,dx = 0$$

και άρα $(\star)\begin{cases} -(x^2\omega'(x))' + 2\omega(x) = 0, & \forall x \in [1,2] \\ \omega(1) = 1 \end{cases}$

Αν τώρα $\phi(2) \neq 0$, συνεχίζει να ισχύει

$$\int_1^2 [x^2\omega'(x)\phi'(x) + 2\omega(x)\phi(x)]\,dx = 0$$

Οπότε, $\int_1^2 (x^2\omega'(x)\phi'(x))\,dx = -\int_1^2 (x^2\omega'(x))'\phi(x)\,dx + \left(x^2\omega'(x)\phi(x)\right)\Big]_{x=1}^{x=2} =$

$$= -\int_1^2 (x^2\omega'(x))'\phi(x)\,dx + 4\omega'(2)\phi(2)$$

Οπότε, πρέπει:

$$\int_1^2 [\underbrace{-(x^2\omega'(x))' + 2\omega(x)}_{\overset{(\star)}{=}0}]\phi(x)\,dx + 4\omega'(2)\phi(2) = 0$$

και επομένως πρέπει $\omega'(2)\phi(2) = 0, \ \forall \phi$

Αν επιλέξω $\phi(2) \neq 0 \Rightarrow \boxed{\omega'(2)=0}$ (φυσική συνοριακή συνθήκη)

Οπότε έχω να λύσω:

$$\begin{cases} -(x^2\omega'(x))' + 2\omega(x) = 0 \\ \omega(1) = 1, \ \omega'(2) = 0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε. $-x^2 w''(x) - 2x w'(x) + 2w(x) = 0$

Ψάχνουμε για λύσεις στην μορφή $w(x) = x^{\theta}$

$\Rightarrow w'(x) = \theta x^{\theta-1}$ , $w''(x) = \theta(\theta-1)x^{\theta-2}$

$-\theta(\theta-1)x^{\theta} - 2\theta x^{\theta} + 2x^{\theta} = 0 \Leftrightarrow$

$-\theta(\theta-1) - 2\theta + 2 = 0 \Leftrightarrow -\theta^2 + \theta - 2\theta + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -\theta^2 - \theta + 2 = 0 \Leftrightarrow \theta^2 + \theta - 2 = 0 \Leftrightarrow (\theta-1)(\theta+2) = 0$

$\Rightarrow x, x^{-2}$ είναι λύσεις της Δ.Ε.

Αφού αυτά είναι γραμμ. ανεξάρτητα, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι $w(x) = c_1 x + c_2 x^{-2}$.

Όμως, $w(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 - c_1$

$\Rightarrow w(x) = c_1 x + (1-c_1)x^{-2}$

$w'(2) = 0 \Leftrightarrow \left(c_1 + (1-c_1)(-2)x^{-3}\right)\Big|_{x=2} = 0$

$\Leftrightarrow c_1 - 2(1-c_1)\cdot 2^{-3} = 0 \Leftrightarrow 4c_1 - (1-c_1) = 0$

$\Leftrightarrow 5c_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow w(x) = \frac{1}{5}\left(x + \frac{4}{x^2}\right)$

Άρα, βρήκαμε έναν πιθανό ελαχιστοποιητή και υπολογίζουμε το

$$J(w) = \int_1^2 \left[x^2 \frac{1}{25}\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)^2 + 2\frac{1}{25}\left(x + \frac{4}{x^2}\right)^2\right] dx = \ldots$$

$\left(w(x) = \frac{1}{5}\left(x + \frac{4}{x^2}\right) \Rightarrow w'(x) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)\right)$

Επόμενος στόχος: Να αποδείξουμε ότι αν $u \in A$, τότε $J(u) \geq J(w)$.

$u = w + \overbrace{u - w}^{\phi}$ , $F_y = 4y$, $F_{yy} = 4$ , $F_{yz} = 0$

$F_z = 2x^2 z$, $F_{zz} = 2x^2$

$F(x,y,z) = x^2 y^2 + z y^2$ είναι είναι κυρτή ως προς $(y,z)$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix} \geq 0$

Θέλουμε να αξιοποιήσουμε την κυρτότητα ως προς $y$ και $z$.

$$F(x,\alpha,b) \geq F(x,u,v) + \nabla_{(y,z)} F(x,u,v)\cdot(\alpha-u,\ b-v)$$

$$F_y(x,u,v) = 4u$$

$$F_z(x,u,v) = 2x^2 v$$

$\phi = u - \omega$

$u = \omega$

$v = \omega'$

$\alpha = u'(x),\ b = u(x)$

$$\Rightarrow x^2(u'(x))^2 + 2u^2(x) \geq x^2(\omega'(x))^2 + 2\omega^2(x) +$$

$$+ (4\omega(x),\ 2x^2\omega'(x))\cdot(\underbrace{u(x)-\omega(x)}_{\phi},\ \underbrace{u'(x)-\omega'(x)}_{\phi'})$$

$$\Rightarrow \quad \overset{\shortparallel}{4\omega(x)\phi(x) + 2x^2\omega'(x)\phi'(x)}$$

Επομένως,

$$J(u) \geq J(\omega) + 2\int_1^2 \underbrace{[x^2\omega'(x)\phi'(x) + 2\omega(x)\phi(x)]}_{=0} dx$$

$\phi(x) = \omega(x) - u(x)$

$$\Rightarrow J(u) \geq J(\omega)$$

//

Λογισμός Μεταβολών 17/05/2021

(A)

Να βρεθούν πιθανοί ελαχιστοποιητές του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, \omega(x), \omega'(x), \omega''(x))\, dx$$

με $u \in A = \{u \in C^2[\alpha,\beta],\ u(\alpha) = c_1,\ u(\beta) = c_2,\ u'(\alpha) = c_3,\ u'(\beta) = c_4\}$

όπου η $F$ είναι ομαλή συνάρτηση

Έστω $\phi \in C_0^2[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow$ Αν $\omega$ ελαχιστοποιητής, τότε $\omega + \varepsilon\phi \in A$ και επομένως έχουμε:

$$J(\omega + \varepsilon\phi) \geq J(\omega), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Αν $\exists$ $\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(\omega;\phi) = 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\alpha}^{\beta}\left[F(x, \omega(x) + \varepsilon\phi(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x), \omega''(x) + \varepsilon\phi'') - F(x, \omega(x), \omega'(x), \omega''(x))\right] dx = \right.$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\Big[F_u(x,\omega,\omega',\omega'')\phi(x) + F_{u'}(x,\omega,\omega',\omega'')\phi'(x) + F_{u''}(x,\omega,\omega',\omega'')\phi''(x)\Big]dx = 0$$

## Πρόβλημα 2

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J(u,v)$

$u \in A = \{u \in C^1,\ u(\alpha) = c_1,\ u(\beta) = c_2\}$

$v \in B = \{v \in C^1[\alpha,\beta],\ v(\alpha) = c_3,\ v(\beta) = c_4\}$

$\phi \in C_0^1[\alpha,\beta]$, $\psi \in C_0^1[\alpha,\beta]$

Αν $(\omega, h)$ πιθανός ελαχιστοποιητής, τότε $(\omega + \varepsilon\phi, h + \delta\psi) \in (A \times B)$

Έχουμε την σύγκριση $J(\omega + \varepsilon\phi, h + \delta\psi) \geq J(\omega, h)$

και επομένως προκύπτει το σύστημα:

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(\omega, h; (\phi, \psi)) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \delta}(\omega, h; (\phi, \psi)) = 0$$

## Παράδειγμα

Να ελαχιστοποιηθεί το συναρτησιακό

$$J(u,v) = \int_a^b F(x, u(x), v(x), u'(x), v'(x))\,dx$$

με $u \in A = \{u \in C^1[\alpha, \beta],\ u(\alpha) = c_1,\ u(\beta) = c_2\}$
$v \in B = \{v \in C^1[\alpha, \beta],\ v(\alpha) = c_3,\ v(\beta) = c_4\}$.

Ποια είναι η Euler-Lagrange του προβλήματος?

Αν $\phi \in C_0^1[\alpha, \beta]$, $\psi \in C_0^1[\alpha, \beta]$, τότε έχουμε

$$J(\omega + \varepsilon\phi, h + \delta\psi) \geq J(\omega, h)$$

$$\Rightarrow J(\omega + \varepsilon\phi, h) \geq J(\omega, h)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b F(x, \omega(x) + \varepsilon\phi(x), h(x), \omega'(x) + \varepsilon\phi'(x), h'(x))\,dx \geq$$

$$\geq \int_a^b F(x, \omega(x), h(x), \omega'(x), h'(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b [F_u(x, \omega(x), h(x), \omega'(x), h'(x))\phi(x) + F_{u'}(x, \omega(x), h(x), \omega'(x), h'(x))\phi'(x)]\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F_{u'}(x, \omega(x), h(x), \omega'(x), h'(x)) = F_u(x, \omega(x), h(x), \omega'(x), h'(x))$$

και αντίστοιχα, από τη σχέση

$J(\omega, h + \delta\psi) \geq J(\omega, h)$ καταλήγουμε

$$\frac{d}{dx} F_{v'}(x,w(x),h(x),w'(x),h'(x)) = F_v(x,w(x),h(x),w'(x),h'(x))$$

## Πρόβλημα

Να βρεθούν $(t_0,w) \in \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$ που να είναι πιθανά (τοπικά) ελάχιστα του συναρτησιακού

$$J(t,u) = \int_a^t F(x,u(x),u'(x))\,dx + f(t,u(t))$$

όπου $F, f$ είναι δοθείσες ομαλές συναρτήσεις και $u \in C^1[\alpha,+\infty)$, $u(\alpha)=c_1$ με την δέσμευση $g(t,u(t))=0$ όπου η συνάρτηση $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και είναι τ.ω. $g(x,y)=0$, τότε $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$.

Να βρεθεί η Euler-Lagrange του προβλήματος.

## Λύση:

Έστω $(t_0,w)$ πιθανός ελαχιστοποιητής και $\tau \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^1$, $\phi(\alpha)=0$, τότε:

$$g(\varepsilon,\delta) = g(t_0+\varepsilon\tau, w(t_0+\varepsilon\tau)+\delta\phi(t_0+\varepsilon\tau))$$

οπότε:

$$g(0,0) = g(t_0,w(t_0)) = 0$$

Τότε
$$G_\varepsilon(\varepsilon,\delta) = g_x(t_0+\varepsilon\tau)\tau + g_y(t_0+\varepsilon\tau, w(t_0+\varepsilon\tau)+\delta\phi(t_0+\varepsilon\tau)) \cdot [w'(t_0+\varepsilon\tau)\tau + \delta\phi'(t_0+\varepsilon\tau)\tau]$$

$$G_\varepsilon(0,0) = g_x(t_0,w(t_0))\tau + g_y(t_0,w(t_0)) \cdot w'(t_0)\tau$$

$$G_\delta(\varepsilon,\delta) = g_y(t_0+\varepsilon\tau, w(t_0+\varepsilon\tau)+\delta\phi(t_0+\varepsilon\tau))\phi(t_0+\varepsilon\tau)$$

$$G_\delta(0,0) = g_y(t_0,w(t_0))\phi(t_0)$$

$$Q(\varepsilon,\delta)=\int_a^{t_0+\varepsilon f} F(x,\omega(x)+\delta\phi(x),\omega'(x)+\delta\phi'(x))\,dx+$$
$$+f(t_0+\varepsilon f,\omega(t_0+\varepsilon f)+\delta\phi(t_0+\varepsilon f))$$

$$Q_\varepsilon(\varepsilon,\delta)=F(t_0+\varepsilon f,\omega(t_0+\varepsilon f)+\delta\phi(t_0+\varepsilon f),\omega'(t_0+\varepsilon f)+$$
$$+\delta\phi'(t_0+\varepsilon f))$$
$$+f_x(t_0+\varepsilon f,\omega(t_0+\varepsilon f)+\delta\phi(t_0+\varepsilon f))f+$$
$$+f_y(\qquad)(\omega'(t_0+\varepsilon f)+\delta\phi'(t_0+\varepsilon f))f.$$

$$Q_\varepsilon(0,0)=F(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))f+f_x(t_0,\omega(t_0))f+f_y(t_0,\omega(t_0))\cdot\omega'(t_0)f$$

$$Q_\delta(\varepsilon,\delta)=\int_a^{t_0+\varepsilon f}\Big[F_u(x,\omega(x)+\delta\phi(x),\omega'(x)+\delta\phi'(x))\phi(x)+$$
$$+F_{u'}(\qquad)\phi'(x)\Big]dx$$
$$+f_y(t_0+\varepsilon f,\omega(t_0+\varepsilon f)+\delta\phi(t_0+\varepsilon f))\phi(t_0+\varepsilon f)$$

$$Q_\delta(0,0)=\int_a^{t_0}\Big[F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)+F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x)\Big]dx$$
$$+f_y(t_0,\omega(t_0))\phi(t_0)$$

Οπότε,

$\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\nabla_{(\varepsilon,\delta)}Q(0,0)=\lambda\ \nabla_{(\varepsilon,\delta)}G(0,0)$

$G(0,0)=0 \iff$

$$F(t_0,\omega(t_0),\omega'(t_0))f+f_x(t_0,\omega(t_0))f+f_y(t_0,\omega(t_0))\omega'(t_0)f=$$
$$=\lambda\big[g_x(t_0,\omega(t_0))f+g_y(t_0,\omega(t_0))\omega'(t_0)f\big] \qquad (1)$$

$$\int_a^b \left[ F_u(\ )\phi + F_{u'}\phi' \right] dx + f_y(t_0, \omega(t_0))\,\phi(t_0) =$$

$$\lambda \left[ g_y(t_0, \omega(t_0))\,\phi(t_0) \right] \qquad (2)$$

$$g(t_0, \omega(t_0)) = 0 \qquad (3)$$

Φυλλάδιο 5º, Άσκηση 3η

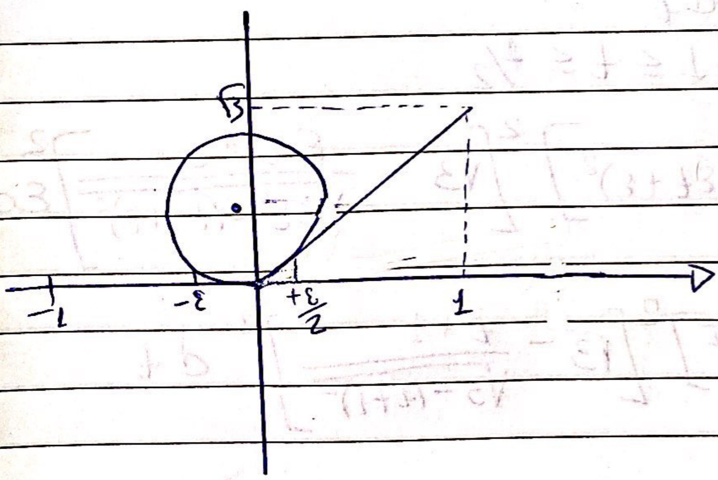
Ελαχιστοποίηση του

$$J(u) = \int_{-1}^{1} u^2(x)\left(\sqrt{3} - u'(x)\right)^2 dx$$

$$u \in A = \{ u \in C^1[-1,1] \mid u(-1) = 0,\ u(1) = \sqrt{3} \}.$$

Απάντηση:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -\varepsilon \\ \sqrt{3}\,\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon^2 - (x+\varepsilon)^2}, & -\varepsilon < x < \varepsilon/2 \\ \sqrt{3}\,x, & \varepsilon/2 \le x \le 1 \end{cases}$$




Παρατηρούμε αρχικά ότι $u_\varepsilon \in C^1[-1,1]$

$$J(u_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} u_\varepsilon^2\left(\sqrt{3} - u_\varepsilon'(x)\right)^2 dx$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{-\varepsilon}}_{=0} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon/2} + \underbrace{\int_{\varepsilon/2}^{1}}_{=0}$$

$u_\varepsilon(x) = 0, \quad -1 \le x \le -\varepsilon$

$u_\varepsilon(x) = \sqrt{3}\,x \Rightarrow u_\varepsilon'(x) = \sqrt{3}$

$-\varepsilon < x < \varepsilon/2$

$$u_\varepsilon(x) = \sqrt{3}\,\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon^2 - (x+\varepsilon)^2}$$

$$u_\varepsilon'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{-2(x+\varepsilon)}{\sqrt{3\varepsilon^2-(x+\varepsilon)^2}} = \frac{x+\varepsilon}{\sqrt{3\varepsilon^2 - (x+\varepsilon)^2}}$$

$$u_\varepsilon'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\frac{3\varepsilon}{2}}{\sqrt{3\varepsilon^2 - \frac{9\varepsilon^2}{4}}} = \frac{3\,\varepsilon/2}{\sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{4}}} = \sqrt{3}$$

$$J(u_\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon/2} u_\varepsilon^2(x)\left(\sqrt{3} - u_\varepsilon'(x)\right)^2 dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon/2}\left(\sqrt{3}\,\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon^2-(x+\varepsilon)^2}\right)^2 \cdot$$

$$\left(\sqrt{3} - \frac{x+\varepsilon}{\sqrt{3\varepsilon^2 - (x+\varepsilon)^2}}\right)^2 dx$$

Θέτουμε $x = \varepsilon t$, $dx = \varepsilon\, dt$

$-\varepsilon \le x \le \varepsilon/2 \iff -1 \le t \le 1/2$

$$J(u_\varepsilon) = \int_{-1}^{1/2}\left[\sqrt{3}\,\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon^2 - (\varepsilon t+\varepsilon)^2}\right]^2\left[\sqrt{3} - \frac{\varepsilon t+\varepsilon}{\sqrt{3\varepsilon^2-(\varepsilon t+\varepsilon)^2}}\right]^2 \varepsilon\, dt$$

$$= \varepsilon^3 \int_{-1}^{1/2}\left[\sqrt{3} - \sqrt{3-(t+1)^2}\right]^2\left[\sqrt{3} - \frac{t+1}{\sqrt{3-(t+1)^2}}\right]^2 dt$$

$$\left(\begin{aligned}\sqrt{3}\,\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon^2 - (\varepsilon t+\varepsilon)^2} &= \sqrt{3}\,\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2(3-(t+1)^2)} \\ &= \varepsilon\left[\sqrt{3} - \sqrt{3-(t+1)^2}\right]\end{aligned}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^3 \int_{-1}^{1/2} (\quad)^2 (\quad)^2 dt = 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$w(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ \sqrt{3}\,x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$J(w) = \int_{-1}^{0} w^2 + \int^{1} \cdots = 0$$

# Λογισμός Μεταβολών

19/05/2021

Έστω $J(u) = \int_a^b F(x,u,u')\,dx$ όπου $F \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}^2)$

και $u \in A = \{u \in C^1[a,b],\ u(a) = c_1\}$

Να βρεθεί πιθανός ελαχιστοποιητής

Απάντηση:

Έστω $\omega \in A$ πιθανός ελαχιστοποιητής, $\phi \in C^1[a,b]$ με $\phi(a) = 0$, οπότε $\omega + \varepsilon\phi \in A$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Οπότε,
$$J(\omega+\varepsilon\phi) \geq J(\omega), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall \phi$$

- Αν $\varepsilon > 0$, τότε:
$$\frac{J(\omega+\varepsilon\phi) - J(\omega)}{\varepsilon} \geq 0$$

και
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{J(\omega+\varepsilon\phi) - J(\omega)}{\varepsilon} := \delta J(\omega;\phi) \geq 0$$

- Αν $\varepsilon < 0$, τότε:
$$\frac{J(\omega+\varepsilon\phi) - J(\omega)}{\varepsilon} \leq 0$$

και
$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{J(\omega+\varepsilon\phi) - J(\omega)}{\varepsilon} = \delta J(\omega;\phi) \leq 0$$

Επομένως,
$$\delta J(\omega;\phi) = 0, \quad \forall \phi \in C^1[a,b],\ \phi(a) = 0$$

$$\delta J(\omega;\phi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\big(J(\omega+\varepsilon\phi) - J(\omega)\big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^b \frac{1}{\varepsilon}\Big[F(x,\omega(x)+\varepsilon\phi(x),\omega'(x)+\varepsilon\phi'(x)) - F(x,\omega(x),\omega'(x))\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[F_u(x,\omega(x),\omega'(x))\phi(x) + F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))\phi'(x)\Big]dx$$

Επομένως,

$$\int_a^b \left[ F_u(x,\omega,\omega')\,\phi(x) + F_{u'}(x,\omega,\omega')\,\phi'(x) \right] dx = 0$$

Όμως, επειδή η $F \in C^1$, $F_u \in C$, $\omega \in C^1$

$$\Rightarrow F_u(x,\omega(x),\omega'(x)) = f(x) \quad \in C[\alpha,\beta]$$

Πράγματι,

$$F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = g(x) \quad \in C[\alpha,\beta]$$

**ΛΗΜΜΑ**

Έστω $f,g \in C[\alpha,\beta]$ και ισχύει

$$\int_a^b (f(x)\psi(x) + g(x)\psi'(x))\,dx = 0, \quad \forall \psi \in C^1[\alpha,\beta],$$
$$\psi(\alpha)=\psi(\beta)=0$$

$g \in C^1[\alpha,\beta]$.

Τότε η $g$ παραγωγίζεται και μάλιστα $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ //

Επειδή $\int_a^b (f(x)\phi(x) + g(x)\phi'(x))\,dx = 0$, $\forall \phi \in C^1[\alpha,\beta]$,
$\phi(\alpha)=0$

Αν επιλέξουμε αρχικά $\phi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=0$, $\phi(\beta)=0$

$\Rightarrow$ Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα.

$\xRightarrow{\text{Λήμμα}}$ η $g$ παραγωγίζεται $(g\in C^1[\alpha,\beta])$ και μάλιστα $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Επομένως για την αρχική εξίσωση, παίρνουμε ότι η συνάρτηση $F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x))$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $\underline{\frac{d}{dx} F_{u'}(x,\omega(x),\omega'(x)) = F_u(x,\omega(x),\omega'(x))}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

$g'(x) = f(x)$.

Είχαμε όμως $\int_a^b (f(x)\phi(x) + g(x)\phi'(x))\,dx = 0$,

$\forall \phi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha) = 0$

Επιλέγω $\phi(\beta)\neq 0$.

Με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_\alpha^\beta \left(f(x)\phi(x)+g(x)\phi'(x)\right)dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta \left(f(x)\phi(x)-g'(x)\phi(x)\right)dx + \left(g(x)\phi(x)\right)\Big|_\alpha^\beta=0$$

$$\underbrace{\int_\alpha^\beta (f(x)-g'(x))\phi(x)\,dx}_{0} + g(\beta)\phi(\beta) - \underbrace{g(\alpha)\phi(\alpha)}_{0}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad g(\beta)\phi(\beta)=0, \quad \text{όμως } \phi(\beta)\neq 0$$

$$\Rightarrow g(\beta)=0.$$

Επομένως προκύπτει:

$F_{u'}(\beta,\omega(\beta),\omega'(\beta))=0$ (Φυσική συνοριακή συνθήκη)

Άσκηση

Έστω $f,g\in C[0,1]$, τέτοιες ώστε

$$\int_0^1 [f(x)\phi(x)+g(x)\phi''(x)]\,dx=0, \quad \forall \phi\in C^2[0,1],$$
$$\phi(0)=0, \quad \phi'(0)=0$$

Ποιο είναι το συμπέρασμα, ποιες είναι οι φυσικές συνοριακές συνθήκες στο 1?

Απόδειξη:

Αν καλέσουμε $F(x)=\int_0^x f(s)\,ds$, $F'(x)=f(s)$

$Q(x)=\int_0^x F(s)\,ds$, $Q'(x)=F(x)$, $Q''(x)=f(x)$

Οπότε έχουμε

$$\int_0^1 \left(Q''(x)\phi(x)+g(x)\phi''(x)\right)dx=0$$

Αρχικά παίρνουμε $\phi\in C^2[0,1]$, $\phi(0)=\phi(1)=\phi'(0)=\phi'(1)=0$

$$\int_0^1 Q''(x)\phi(x)\,dx = -\int_0^1 Q'(x)\phi'(x)\,dx + \left(Q'(x)\cancel{\phi(x)}\right)\Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 Q(x)\phi''(x)\,dx - \left(Q(x)\cancel{\phi'(x)}\right)\Big|_0^1$$

και επομένως,

$$\int_0^1 (Q(x)+g(x))\,\phi''(x)\,dx = 0, \quad \forall \phi \in C^2[0,1],$$
$$\phi(0)=\phi(1)=\phi'(0)=\phi'(1)=0$$

Συμπέρασμα?

ΛΗΜΜΑ

Έστω $H \in C[0,1]$ τ.ω. $\int_0^1 H(x)\phi''(x)\,dx = 0, \quad \forall \phi \in C^2[0,1]$
$\phi(0)=\phi(1)=\phi'(0)=\phi'(1)=0$

$\xRightarrow{\exists c_1, c_2 \in R} H(x) = c_1 + c_2 x, \quad \forall x \in [0,1]$
$(H''(x)=0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$c_1, c_2 \in R$

$$\int_0^1 (H(x) - c_1 - c_2 x)\phi''(x)\,dx = 0, \quad \forall \phi \in C^2[0,1],$$
$$\phi(0)=\phi(1)=\phi'(0)=\phi'(1)=0$$

Θα επιλέξουμε τα $c_1, c_2$ ώστε

$\phi''(x) = H(x) - c_1 - c_2 x \Rightarrow \int_0^1 (H(x) - c_1 - c_2 s)\,ds$

$\Rightarrow \phi'(x) = \int_0^x [H(s) - c_1 - c_2 s]\,ds$

$\Rightarrow \phi'(1) = 0$

$$\phi(x) = \int_0^x \int_0^t (H(s) - c_1 - c_2 s)\,ds\,dt \Rightarrow \phi(1) = 0$$

Με εφαρμογή προκύπτει $\exists\ c_1, c_2 \in R$

$Q(x) + g(x) = c_1 + c_2 x$

$$\Rightarrow g(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt + c_1 + c_2 x$$

$$\Rightarrow \boxed{g''(x) = -f(x)}$$

Έχουμε επίσης $\int_0^1 (f(x)\phi(x) + g(x)\phi''(x))dx = 0$

$$\int_0^1 (f(x)\phi(x) - g'(x)\phi'(x))dx + (g(x)\phi'(x))\Big]_0^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x)\phi(x) - g'(x)\phi'(x))dx + g(1)\phi'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x)\phi(x) + g''(x)\phi(x))dx - [g'(x)\phi(x)]\Big|_0^1 + g(1)\phi(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \underbrace{(f(x) + g'(x))}_{=0}\phi(x)\,dx - g'(1)\phi(1) + g(1)\phi'(1) = 0$$

Άρα,

$$-g'(1)\phi(1) + g(1)\phi'(1) = 0$$

$\Rightarrow g(1) = 0 \ , \ g'(1) = 0$ φυσικές συνοριακές συνθήκες.

$$g''(x) = -f(x) \ , \ x \in [0,1]$$

//

$$g(x) = \int_0^x \int_0^t f(t)\,ds\,dt + c_1 + c_2 x \ , \ g(1) = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^t f(s)\,ds\,dt + c_1 + c_2 = 0$$

$$g'(x) = \int_0^x f(s)\,ds + c_2 \Rightarrow g'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(s)\,ds + c_2 = 0$$

Άσκηση:
Έστω $f, g \in C[0,1]$, τ.ω.

$$\int_0^1 (f(x)\phi(x) + g(x)\phi''(x))\,dx = 0, \quad \forall \phi \in C^2[0,1],$$
$$\phi(0) = \phi(1) = 0$$

Αποδείξτε η $g \in C^2[0,1]$ και μάλιστα ικανοποιεί:
$g''(x) = -f(x)$, $x \in [0,1]$.
Ποιες είναι οι φυσικές συνοριακές συνθήκες?

(Η/W)

Άσκηση:
Να βρεθούν οι πιθανοί ελαχιστοποιητές του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^1 x^2 u(x)\,dx \quad \text{με} \quad u \in A = \{u \in C[0,1]\}$$

και την δέσμευση $G(u) = \int_0^1 u^5(x)\,dx = 1$

Απόδειξη: Αν $\omega$ ελαχιστοποιητής
Πρέπει να: • $\exists$ κατεύθυνση $\psi \in C[0,1]$
• $\exists\ \delta G(\omega;\psi) \neq 0$

$$\delta G(\omega;\psi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 ((\omega+\varepsilon\psi)^5 - \omega^5)\,dx =$$

$$= 5\int_0^1 \omega^4(x)\psi(x)\,dx$$

$$G(u) = \int_0^1 \omega^5(x)\,dx = 1$$

Επιλέγουμε $\psi = \omega$ και τότε

$$\delta G(\omega;\psi) = 5\int_0^1 \omega^4(x)\omega(x)\,dx = 5 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\delta J(\omega;\phi) = \lambda \delta G(\omega;\phi) \ , \ \forall \phi \in C[0,1]$$

με $G(\omega)=1$.

και επομένως $\delta J(\omega;\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left[x^2(\omega+\varepsilon\phi) - x^2\omega\right]dx$

$$(\star)\ \int_0^1 x^2\phi(x) = \lambda\, 5\int_0^1 \omega^4(x)\,\phi(x)\,dx \ , \ \forall \phi \in C[0,1]$$

$$G(\omega)=h \Rightarrow \int_0^1 \omega^5(x)\,dx = 1$$

Αν θέσουμε ότι $\phi=\omega$, παίρνουμε

$$\int_0^1 x^2\omega(x)\,dx = 5\lambda\int_0^1 \omega^5(x)\,dx \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}\int_0^1 x^2\omega(x)\,dx$$

$$(\star) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^2 - 5\lambda\omega^4(x)\right)\phi(x)\,dx = 0 \ , \ \forall \phi \in C[0,1]$$

και επομένως πρέπει $x^2 - 5\lambda\omega^4(x) \equiv 0$ , $x\in[0,1]$

$$\Rightarrow x^2 = 5\lambda\omega^4(x) \Rightarrow \lambda > 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5\lambda}\,\omega^2(x) \ , \ x\in[0,1]$$

$$\omega^2(x) = \frac{x}{\sqrt{5\lambda}}$$

$$\omega(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{\sqrt{5\lambda}}} \ , \ \forall x\in[0,1]$$

$$\Rightarrow \omega_1(x) = \sqrt{\frac{x}{\sqrt{5\lambda}}} \ , \ x\in[0,1]$$

κ'

$$\omega_2(x) = -\sqrt{\frac{x}{\sqrt{5\lambda}}} \ , \ x\in[0,1]$$

ΕΡΩΤΗΜΑ

Γιατί η επιλογή $x_1 \in (0,1]$, $x_2 \in (0,1]$

$$\omega(x_1) = \sqrt{\frac{x_1}{\sqrt{5}\lambda}} \quad , \quad \omega(x_2) = -\sqrt{\frac{x_2}{\sqrt{5}\lambda}}$$

είναι αδύνατη?

Απάντηση

Επειδή η ω είναι συνεχής αν $\exists\ x_1, x_2$
$\Rightarrow \exists\ \xi$ ενδιάμεσα $(\xi > 0)$ ώστε $\omega(\xi) = 0$.
ΑΔΥΝΑΤΟ

και επειδή $\int_0^1 \omega^5(x)\,dx = 1$

τότε η επιλογή $\int_0^1 \omega_2^5(x)\,dx = 1$ είναι αδύνατη

οπότε $\omega = \sqrt{\frac{x}{\sqrt{5}\lambda}} = x^{1/2} \cdot \lambda^{-1/4} \cdot 5^{-1/4}$

και επομένως $\int_0^1 x^{5/2} (5\lambda)^{-5/4}\,dx = 1$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^{5/4} = \int_0^1 x^{5/2}\,dx = \left(\frac{\lambda^{7/2}}{7/4}\right)\Bigg]_0^1 = 2/7$$

Άρα, $5\lambda = \left(\frac{2}{7}\right)^{4/5} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{4/5}$.

$\omega(x) = x^{1/2}$ ........

Scanned with CamScanner

## Λογισμός Μεταβολών 24/05/2021.

### Φυλλάδιο 6ο, Άσκηση 2.

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_1^2 \left[x^2 (u'(x))^2 + \lambda u^2(x)\right] dx \geq 0, \quad \forall\, u \in C^1[1,2],$$
$$u(1) = u(2) = 0.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω $P, Q : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.
$P > 0$ στο $[\alpha, \beta]$.
Η διγραμμική μορφή $\int_\alpha^\beta \left[P(x)(u'(x))^2 + Q(x) u^2(x)\right] dx \geq 0,$

$$\forall\, u \in C^1[\alpha, \beta]$$
$$u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

αν και μόνο αν η λύση του

$$-(P(x)\phi'(x))' + Q(x)\phi(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]$$
$$\phi(\alpha) = 0, \quad \phi'(\alpha) = 1.$$

να είναι τέτοια ώστε $\phi(x) > 0, \ \forall x \in (\alpha, \beta)$

Με το Θεώρημα προκύπτει ότι η διγραμμική μορφή είναι $\geq 0$ αν και μόνο αν η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -(x^2\phi'(x))' + \lambda\phi(x) = 0 \\ \phi(1) = 0 \\ \phi'(1) = 1 \end{cases}$$

είναι τ.ω. $\phi(x) > 0, \ \forall x \in (1,2)$.

Η Δ.Ε. $-(x^2\phi')' + \lambda\phi = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2\phi''(x) - 2x\phi'(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad x \in [1,2]$$

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής $x^\mu = \phi(x)$

$$\Rightarrow \phi'(x) = \mu x^{\mu-1}, \quad \phi''(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

$$-\mu(\mu-1)x^2 x^{\mu-2} - 2x\mu x^{\mu-1} + \lambda x^\mu = 0.$$

$$-\mu(\mu-1) - 2\mu + \lambda = 0 \Leftrightarrow -\mu^2 - \mu + \lambda = 0$$

$\mu^2+\mu-\lambda=0$

$\Delta=1^2+4\lambda=1+4\lambda$

(1) $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda>-\frac{1}{4}$

$$\mu_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda}}{2}=\begin{cases}-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\\ \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\end{cases}$$

και επομένως $\phi(x)=c_1 x^{-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}+c_2 x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}$, $x\in[1,2]$

Θέλουμε $\phi(1)=0$, $\phi'(1)=1$

$\phi(1)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-c_1$

$$\Rightarrow \phi(x)=c_1\left[x^{-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}-x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}\right]$$

$$\phi'(x)=c_1\left[-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x^{-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}-1}-\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}-1}\right]$$

$$\phi'(1)=1 \Leftrightarrow c_1\left[-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}-\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\right]=1$$

$$-c_1\left[\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}+\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\right]=1$$

$$\Leftrightarrow c_1=\frac{-1}{\sqrt{1+4\lambda}}$$

Άρα,

$$\phi(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda}}\left(x^{-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}-x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda}}\left(-x^{-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}+x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}\right)=$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}}{\sqrt{1+4\lambda}} \left(1 - x^{-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2} - \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}\right)$$

$$= \frac{x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}}{\sqrt{1+4\lambda}} \left(1 - x^{-\sqrt{1+4\lambda}}\right) > 0, \quad x > 1$$

Επομένως, μέχρι τώρα $\forall\ \lambda > -\frac{1}{4}$, έχουμε θετικότητα της λύσης

•) Αν $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\mu^2 + \mu - \frac{1}{4} = 0 \iff (\mu - \frac{1}{2})^2 = 0$

$\Rightarrow x^{-1/2}$ μια λύση της

$$x^2\phi'(x) + 2x\phi'(x) + \frac{1}{4}\phi(x) = 0$$

Θέτουμε:

$$\phi(x) = x^{-1/2} z(x) \Rightarrow \phi'(x) = x^{-1/2} z' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z$$

$$\phi''(x) = x^{-1/2} z'' - x^{-3/2} z' + \frac{3}{4} x^{-5/2} z$$

και η Δ.Ε. γράφεται:

$$x^2\left(x^{-1/2} z'' - x^{-3/2} z' + \frac{3}{4} x^{-5/2} z\right) +$$

$$+ x\left(x^{-1/2} z' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z\right) + \frac{1}{4} x^{-1/2} z = 0$$

$$\iff x^{3/2} z'' - \cancel{x^{3/2} z'} + \frac{3}{4} x^{-1/2} z + \cancel{2x^{1/2} z'} - 1 x^{-1/2} z + \frac{1}{4} x^{-1/2} z = 0$$

$$\iff x^{3/2} z'' + x^{1/2} z' = 0$$

$$\iff x z'' + z' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z''}{z'} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln z' + \ln z = 0$$

$$x z' = 1$$

$$z' = 1/x$$

$$z(x) = \ln x$$

$\frac{\ln x}{x^{1/2}}$ $\quad (\lambda = 1/4)$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{C_1}{x^{1/2}} + C_2 \frac{\ln x}{x^{1/2}} \quad , x \geq 1$$

$\phi(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

$$\phi'(x) = C_2\left(\frac{1}{x^{1+1/2}} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^{3/2}}\right)$$

$\phi'(1) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

Άρα,
$$\phi(x) = \frac{\ln x}{x^{1/2}} > 0 , \quad x > 1.$$

(iii) $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4\lambda < 0$

$\mu^2 + \mu - \lambda = 0$

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \qquad \left(\begin{aligned} x^{i\alpha} &= e^{i\alpha \ln x} = \\ &= \cos(\alpha \ln x) + i\sin(\alpha \ln x)\end{aligned}\right)$$

$$x^{-1/2 \pm i\frac{\sqrt{-1+4\lambda}}{2}} = x^{-1/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2}\ln x\right) \pm i\sin\left(\frac{\sqrt{-1+4\lambda}}{2}\ln x\right)\right)$$

$$\Rightarrow x^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2}\ln x\right), \quad x^{-1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2}\ln x\right)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = C_1 x^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2}\ln x\right) + C_2 x^{-1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{-1-\lambda}}{2}\ln x\right)$$

$\phi(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow \phi(x) = C_2 x^{-1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2}\ln x\right)$$

$$\phi'(x) = C_2\left[-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(\quad) + x^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2}\ln x\right)\cdot\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2x}\right]$$

$$\phi'(1) = 0 \Leftrightarrow C_2 \cdot \frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} = 1 \Leftrightarrow C_2 = \frac{2}{\sqrt{-1-4\lambda}}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{-1-4\lambda}} x^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \ln x\right)$$

Θέλουμε $\phi(x) > 0$, $x \in (1,2)$

απαιτείται:

$$0 \leq \frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \ln x \leq \pi, \quad \forall x \in [1,2$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda \geq -\frac{1}{4} - \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^2$$

Οπότε η διγραμμική μορφή είναι μη αρνητική αν και μόνο εάν

$$\lambda \geq -\frac{1}{4} - \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^2$$

//

Φυλλάδιο 6, Άσκηση 1η

Να βρεθούν οι πιθανοί ελαχιστοποιητές του

$$J(u) = \int_0^1 \left( (u'(x))^2 + x^2 \right) dx,$$

$$u \in A = \{ u \in C^1[0,1],\ u(0) = 0 \}$$ και τη δέσμευση

$$G(u) = \int_0^1 u^2(x)\, dx = 2$$

Λύση:

Αρχικά πρέπει $\exists\ \psi \in C^1[0,1]$, $\psi(0) = 0$ ώστε αν $\omega$ πιθανός ελαχιστοποιητής, θα πρέπει αρχικά $\exists\ \psi$ ώστε $\delta G(\omega;\psi) \neq 0$.

$$\delta G(\omega;\psi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left[ (\omega + \varepsilon\psi)^2 - \omega^2 \right] dx = $$

$$= 2\int_0^1 \omega(x)\psi(x)\, dx$$

Αν επιλέξουμε $\psi = \omega \in C^1[0,1]$, $\omega(0) = 0$ προκύπτει ότι

$$\delta G(\omega;\omega) = 2\int_0^1 \omega^2 dx = 4 \neq 0.$$

και από το Θεώρημα προκύπτει ότι $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\delta J(\omega;\phi) = \lambda\, \delta G(\omega;\phi)$, $\forall \phi$

$$G(\omega) = 2$$

$$\delta J(\omega;\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left[ (\omega' + \varepsilon \phi')^2 + x^2 - \left( (\omega'(x))^2 + x^2 \right) \right] dx$$

$$= 2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx$$

και επομένως για $\phi \in C^1[0,1]$ κ' $\phi(0)=0$ έχουμε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$2\int_0^1 \omega'(x)\phi'(x)\,dx = 2\lambda \int_0^1 \omega(x)\phi(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\omega'(x)\phi'(x) - \lambda\omega(x)\phi(x)\right) dx = 0$$

Αν επιλέξουμε $\phi(1)=0 \Rightarrow \omega'$ παραγωγ.

$$\omega''(x) + \lambda\omega(x) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

Επίσης, αν $\phi(1) \neq 0$,

$$\int_0^1 \left(\omega'(x)\phi'(x) - \lambda\omega(x)\phi(x)\right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 \omega''(x)\phi(x)\,dx + \left(\omega'(x)\phi(x)\right)\Big|_0^1 - \lambda\int \omega(x)\phi(x)\,dx = 0$$

Άρα, μας μένει ότι πρέπει:

$$\omega'(1)\phi(1) = 0 \Leftrightarrow \omega'(1) = 0$$

Έχουμε,

$$\begin{cases} \omega''(x) + \lambda\omega(x) = 0 \\ \omega(0) = 0 \\ \omega'(1) = 0 \end{cases}$$

με την δεσμευση $\int_0^1 \omega^2(x)\,dx = 2$

Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής $e^{\mu x}$.

$$\mu^2+\lambda=0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\lambda<0$, $\mu=\pm\sqrt{-\lambda}$

$$e^{\sqrt{-\lambda}x},\ e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

$$w(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$w(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0. \Rightarrow c_2=-c_1$$

$$w(x)=c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}-e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$$

$$w'(x)=c_1\sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}+e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$$

$$w'(1)=0 \Leftrightarrow c_1=0 \Rightarrow \underline{w(x)\equiv 0}$$

(ii) $\lambda=0$. $\Rightarrow$

$$w(x)=c_1+c_2x$$

$$\left.\begin{aligned} w(0)&=0\\ w'(1)&=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow c_1=c_2=0$$

(iii) $\lambda>0 \Rightarrow$

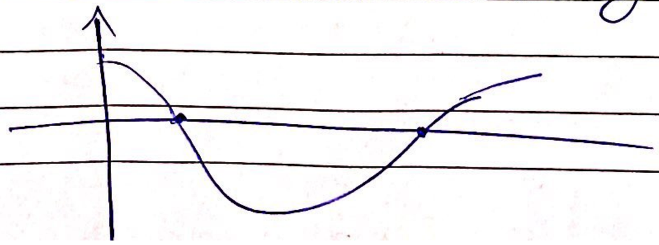
$$\cos(\sqrt{\lambda}x),\ \sin(\sqrt{\lambda}x)$$ (Χαρακτηριστική εξίσωση)

Άρα, η γενική λύση είναι

$$w(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$w(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \Leftrightarrow w(x)=c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$w'(1)=0 \Leftrightarrow c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}y)=0$$



$$\Longrightarrow \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \ , \quad k \in N$$

$$= \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \ , \quad k \in N$$

$$\lambda_k = \left(k - \tfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2$$

$k$

$$\omega_k(x) = C_k \sin\left(\left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi x\right)$$

$$\int_0^1 \omega_k^2(x)\, dx = 2 \iff C_k^2 \int_0^1 \left(\sin^2\left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi x\right) dx = 2$$

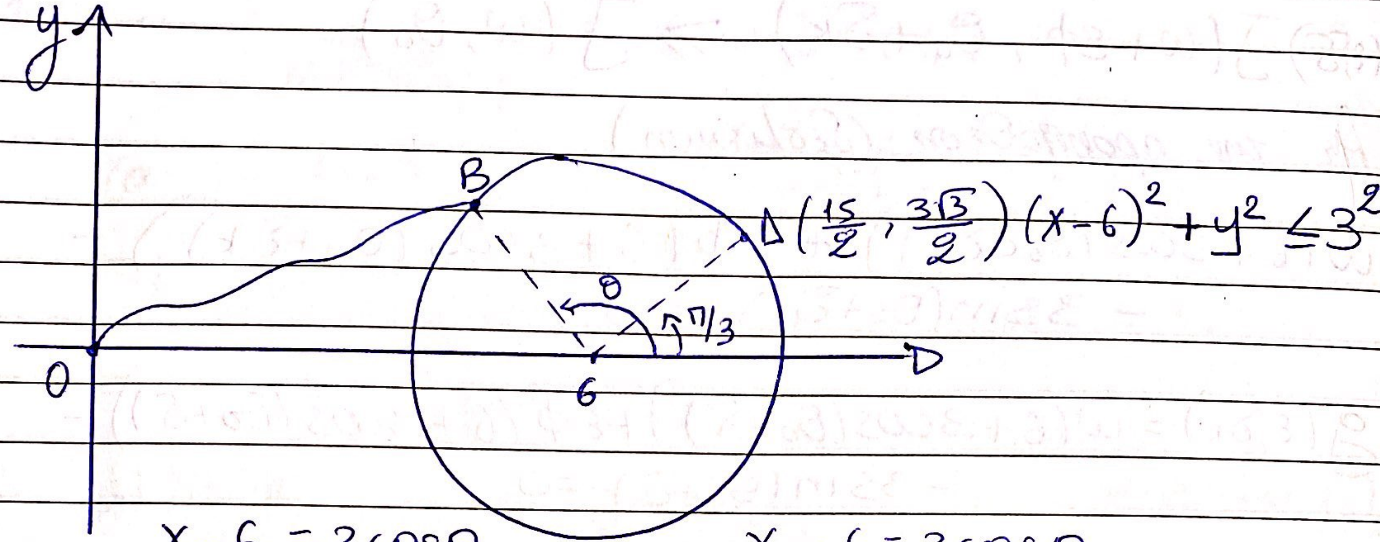
$$\iff C_k^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos(2k-1)\pi x}{2}\, dx = 2$$

$$\boxed{C_k = \pm 2}$$

# Λογισμός Μεταβολών

26/05/2021

## Φυλλάδιο 5ο, Άσκηση 2




$$x - 6 = 3\cos\theta \qquad x_0 - 6 = 3\cos\theta$$
$$y = 3\sin\theta \qquad \Leftrightarrow x_0 = 6 + 3\cos\theta$$

Το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta} = 3\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3\theta - \pi$

Αν τα περιγράψουμε με βάση το θ, μοντελοποιώντας το πρόβλημα

$$J(u,\theta) = OB + \overset{\frown}{B\Delta}$$
$$= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx + 3\theta - \pi$$
$$= \int_0^{6+3\cos\theta} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx + 3\theta - \pi$$

Οπότε, το ζητούμενο είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$J(u,\theta) = \int_0^{6+3\cos\theta} \left(1 + (u(x))^2\right)^{1/2} dx + 3\theta - \pi$$

Με συνάρτηση ελέγχου

$$u \in A = \{u \in C^1[0,\theta],\ u(0) = 0\}$$

και τη δέσμευση

$$(x_0 - 6)^2 + u^2(x_0) = 9$$
$$\Leftrightarrow u(x_0) = 3\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{u(6 + 3\cos\theta) = 3\sin\theta}$$

Έστω $(\omega,\theta)$ το ελάχιστο του συναρτησιακού

$\phi \in C^1,\ \phi(0)=0$

$$f(\varepsilon,\delta)=J(\omega+\varepsilon\phi,\ \theta_0+\delta) \geqslant J(\omega,\theta_0).$$

Με την προϋπόθεση (δέσμευση).

$$\omega(6+3\cos(\theta_0+\delta))+\varepsilon\phi(6+3\cos(\theta_0+\delta))-$$
$$-3\sin(\theta_0+\delta_\kappa)=0$$

$$g(\varepsilon,\delta)=\omega(6+3\cos(\theta_0+\delta))+\varepsilon\phi(6+3\cos(\theta_0+\delta))-$$
$$-3\sin(\theta_0+\delta)=0$$

Τότε, $g_\varepsilon(0,0)=\phi(6+3\cos(\theta_0))$

$$g_\delta(0,0)=\omega'(6+3\cos(\theta_0))(-3\sin(\theta_0))-3\cos\theta_0.$$

Αντίστοιχα,

$$f_\varepsilon(0,0)=\int_0^{6+3\cos\theta}\frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\phi'(x)\,dx$$

$$f_\delta(0,0)=\sqrt{1+(\omega'(6+3\cos\theta_0))^2}\,(-3\sin\theta_0)+3$$

$$\left(f(\varepsilon,\delta)=\int_0^{6+3\cos(\theta_0+\delta)}\sqrt{1+(\omega'+\varepsilon\phi')^2}\,dx+3(\theta_0+\delta)-\pi\right)$$

Οπότε $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να έχουμε τις τρεις σχέσεις:

(1) $$\int_0^{6+3\cos\theta_0}\frac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}}\phi'\,dx=\lambda\phi(6+3\cos\theta_0)$$

(2) $x_0=6+3\cos\theta_0$
$$-3\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}\sin\theta_0+3=\lambda(-3\omega'(x_0)\sin\theta_0-3\cos\theta_0)$$

(3) $\omega(x_0)=3\cos\theta_0.$

Άρα, έχουμε:

(1) : $$\int_0^{x_0} \frac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}} \phi'(x)\,dx = \lambda \phi(x_0)$$

(α) Αν $\phi(x_0)=0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{x_0} \frac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}} \phi'(x)\,dx = 0$

$$\xrightarrow{\text{Από Λήμμα}} \left(\frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}}\right)' = 0 \quad , \quad \forall x \in [0, x_0]$$

$$\Rightarrow \frac{\omega'(x)}{\sqrt{1+(\omega'(x))^2}} = \frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = \mu \quad , \quad \forall x \in [0, x_0]$$

(β) Αν $\phi(x_0) \neq 0$, τότε:

$$\int_0^{x_0} \underbrace{\mu}_{\frac{\omega'}{\sqrt{1+(\omega')^2}}} \phi'(x)\,dx = \lambda \phi(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \mu \phi(x_0) = \lambda \phi(x_0) \Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}}$$

(2) $$-3\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}\sin\theta_0 + 3 = -3\lambda\left(\omega'(x_0)\sin\theta_0 + \cos\theta_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}\sin\theta_0 - 1 = \frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))}}\left(\omega'(x_0)\sin\theta_0 + \cos\theta_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}\sin\theta_0 - 1 = \sin\theta_0 \frac{(\omega'(x_0))^2}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} + \frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}}\cos\theta_0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta_0\left(\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2} - \frac{(\omega'(x_0))^2}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}}\right) - \frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}}\cos\theta_0 = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}}\sin\theta_0 - \frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}}\cos\theta_0 = 1 \quad (\star)$$

Θέλουμε $\frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = \sin\phi$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{(\omega'(x_0))^2}{1+(\omega'(x_0))^2} = 1 - \sin^2\phi$$

$$\frac{1}{(1+(\omega'(x_0))^2)} = \cos^2\phi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = \pm\cos\phi$$

Περίπτωση (I)

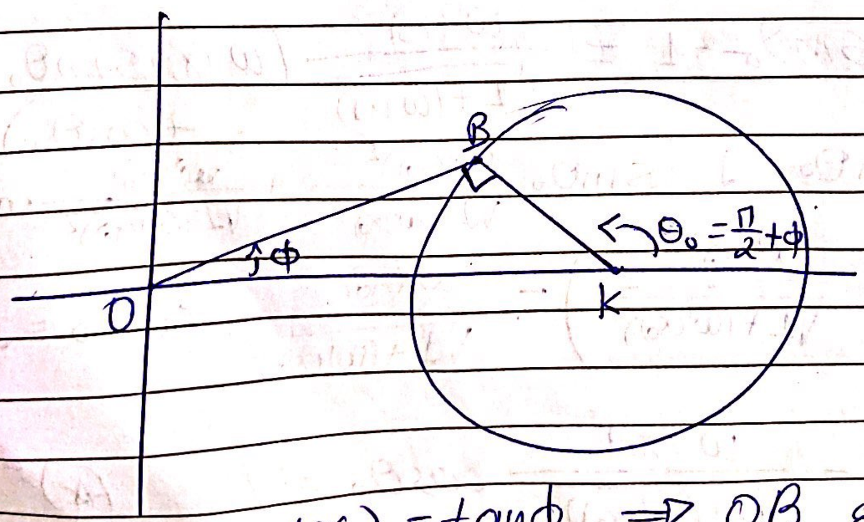
Εάν $\frac{1}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = \cos\phi$, τότε (*) γράφεται:

$$\sin\theta_0\cos\phi - \cos\theta_0\sin\phi = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin(\theta_0-\phi) = \sin\pi/2$$

$$\Rightarrow \theta_0 - \phi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}+\phi$$

$$x_0 = 6+3\cos\theta_0 = 6+3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = 6-3\sin\phi$$

$$\frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = \sin\phi \Rightarrow \boxed{\omega'(x_0) = \tan\phi}$$




$\omega'(x_0) = \tan\phi \Rightarrow$ OB εφάπτεται του κύκλου στο B.

$\omega(x_0) = 3\sin\theta_0 = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = 3\cos\phi$

$x_0 = 6 - 3\sin\phi$

Οπότε:

$$\tan\phi = \frac{\omega(x_0)}{x_0} = \frac{3\cos\phi}{6-3\sin\phi}$$

$\Leftrightarrow 2\sin\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\phi = 1$

$\Leftrightarrow \sin\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Ελάχιστη Τιμή: $\sqrt{27} + 3\frac{2\pi}{3} - \pi = \sqrt{27} + \pi$

Περίπτωση II

$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = -\cos\phi$, τότε η $(\star)$ γράφεται:

$-\sin\theta_0\cos\phi - \sin\phi\cos\theta_0 = 1$

$\Leftrightarrow \sin(\theta_0+\phi) = \sin(-\pi/2)$

$\theta_0 + \phi = 2\pi - \pi/2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta_0 = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \phi$

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε

$\cos\theta_0 = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\sin\phi$

$x_0 = 6 + 3\cos\theta_0 = 6 - 3\sin\phi$

$\sin\theta_0 = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\cos\phi$

$\omega(x_0) = -3\cos\phi$

$\frac{\omega'(x_0)}{\sqrt{1+(\omega'(x_0))^2}} = \sin\phi \Leftrightarrow \omega'(x_0)(-\cos\phi) = \sin\phi$

$\omega'(x_0) = \tan(-\phi)$

$\theta_0 = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \phi$

$\Rightarrow \ldots$

Φυλλάδιο 6ο, Άσκηση 3η

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$J(u) = \int_0^2 (u'(x))^2 (u'(x)-1)^2 \, dx$$

$$u \in B = \{ u \in \bar{C}^1[0,2],\ u(0)=0,\ u(2)=1 \}$$

Να αποδειχθεί ότι $\exists$ ελαχιστοποιητής $\bar{u}$ και μάλιστα $J(\bar{u})=0$.

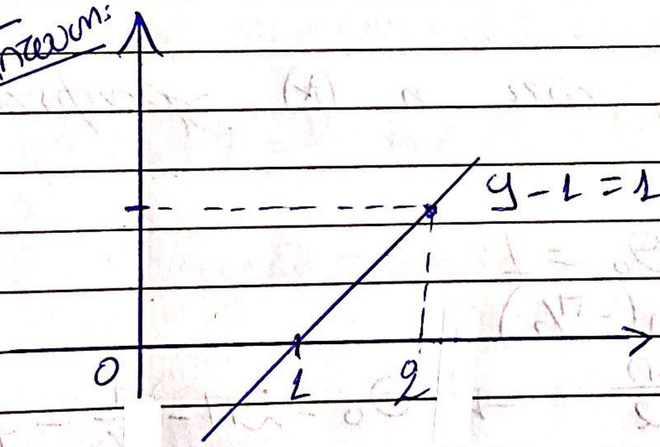
Να βρεθεί ο $\bar{u}$.

Λύση:

$$\int_0^2 (u'(x))^2 (u'(x)-1)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow u'(x)(u'(x)-1)=0, \quad \forall x \in [0,2]$$

1η Περίπτωση:



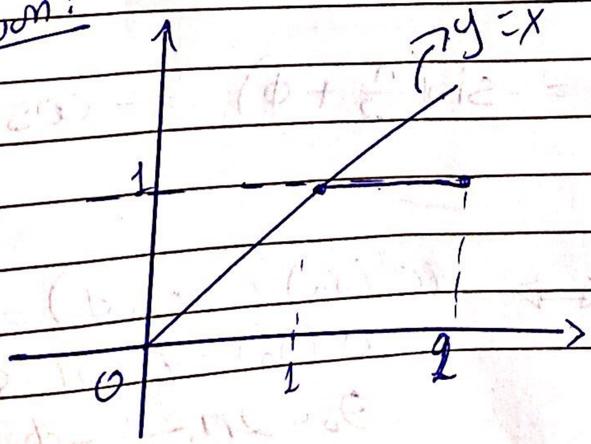
$y-1 = 1\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = x-1$

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$u'(x)(u'(x)-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=0 \\ u'(x)=1 \end{cases}$$

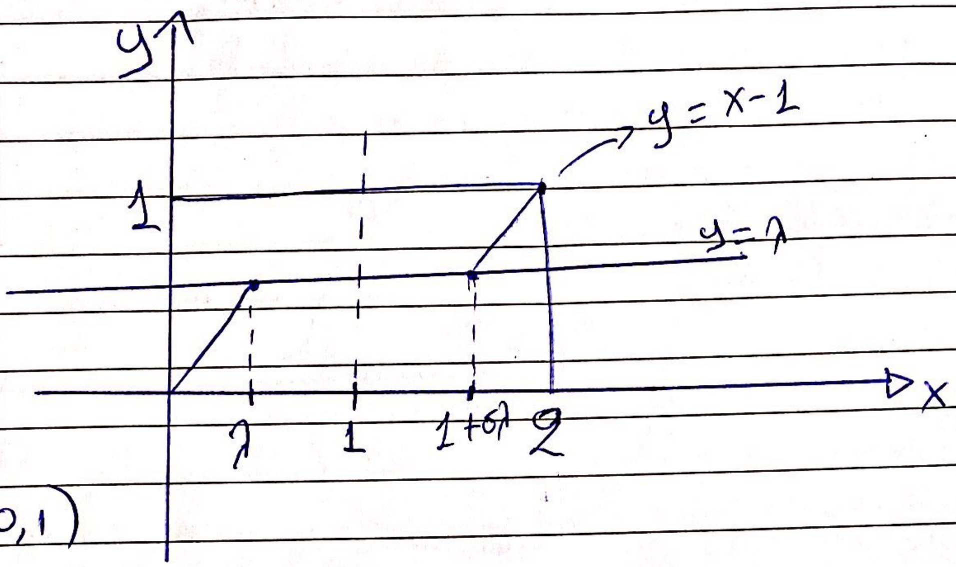
$u(2)=1$

2η Περίπτωση:




$$\bar{u}(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Άλλου είδους κατασκευές:




$\lambda \in (0,1)$

$$\overline{u}_\lambda(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le \lambda \\ \lambda & , \quad \lambda < x < 1+\lambda \\ x-1 & , \quad 1+\lambda \le x \le 2 \end{cases}$$

$J(\overline{u}_\lambda) = 0$