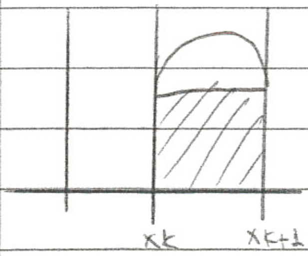
Απειροστικός λογισμός III

20/9/16

1|



$m_k = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}] \}$

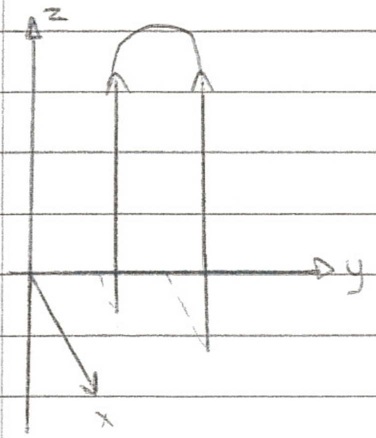
$M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}] \}$

$m_k (x_{k+1} - x_k) \leq \Sigma_k \leq M_k (x_{k+1} - x_k)$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)}_{L(f,P)} < \Sigma < \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)}_{U(f,P)}$$

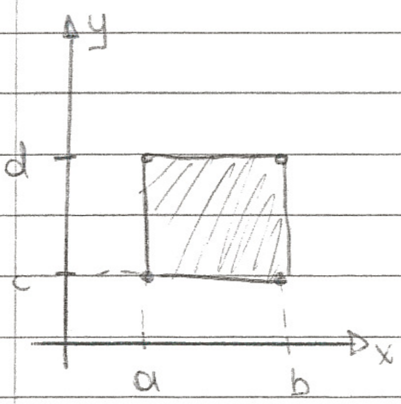
$\sup L(f,a) \leq \inf_P U(f,P)$

2|



$f \geq 0, \quad f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

3|



$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$

$[x_{k+1}, x_k]$

$[y_{k+1}, y_k]$

$[x_{k-1}, x_k] \times [y_{k-1}, y_k], \quad 1 \leq k \leq \dots \leq n$

$M_{kp} = \sup \{ f(x,y) \mid (x,y) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{k-1}, y_k] \}$

$m_{kp} = (x_k - x_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \leq V_{kp} \leq M_{kp} (x_k - x_{k-1})(y_p - y_{p-1})$

$\sum m_p()() \leq V \leq M_{kp} (x_k - x_{k-1})(y_p - y_{p-1})$ αφού $1 \leq k \leq n$
$1 \leq l \leq m$

<u>Δηλ</u>: $L(f,P) \leq \inf U(f,P)$

- f ολοκληρώσιμες με $f : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{D} \to \mathbb{R}$

$$\int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{e^{x/y}}{y^3} dy \right) dx$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{y^3} \int_0^1 e^{x/y} \, dx \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{y^3} \left[\frac{e^{x/y}}{1/y} \right]_0^1 \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{y^2} \left(e^{1/y} - 1 \right) dy \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{1}{y} = z \quad dz = -\frac{dy}{y^2}}$$

Άρα η (1) $\rightsquigarrow \int_1^{1/2} (e^z - 1)(-dz) = \int_{1/2}^1 (e^z - 1) \, dz =$

$$= \left[e^z - z \right]_{1/2}^1 = e - 1 - e^{1/2} + \frac{1}{2} = e - e^{1/2} - \frac{1}{2}$$

Άσκηση 3

Να συσχετίσετε το ολοκλήρωμα:

$\int_0^1 \left(\int_1^2 f(y) \, dy \right) dx$ με ένα απλό ολοκλήρωμα

Λύση

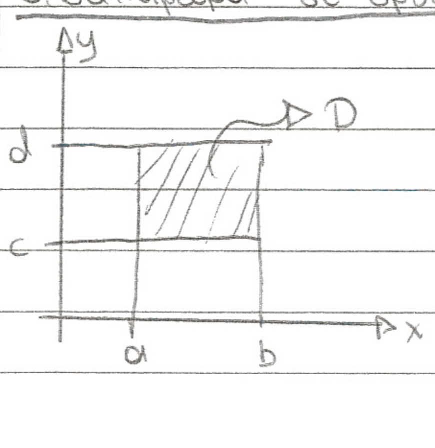
Έστω $f : [1,2] \to \mathbb{R}$: συνεχής

$$\int_1^0 \left(\int_0^1 f(y) \, dx \right) dy = \int_1^2 \left(f(y) \int_0^1 1 \, dx \right) dy = \int_1^2 1 \, f(y) \, dy =$$

$$= \int_1^2 f(y) \, dy$$

22/9/16

Ολοκληρώματα σε ορθογώνιο:

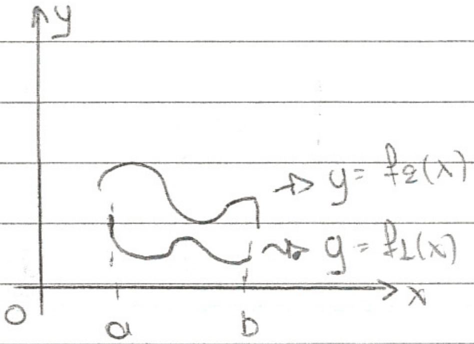


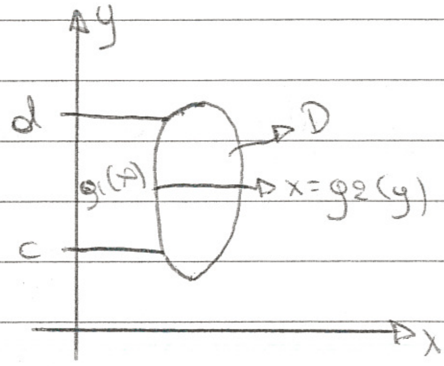
$$\iint_D f(x,y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \Big) \, dy$$

Ολοκλήρωση σε τυχαίο χωρίο

Απλές περιπτώσεις





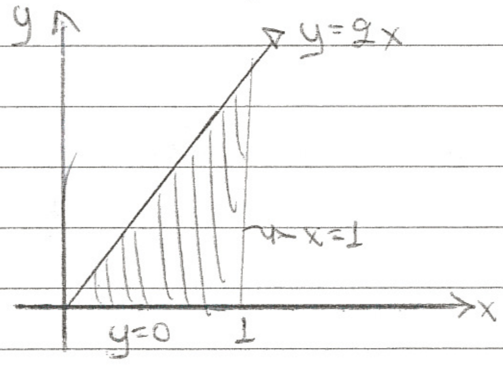
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x|y)\,dx \right) dy$$

Άσκηση

Να περιγραφεί το χωρίο ολοκλήρωσης όπου το D είναι το φραγμένο χωρίο του επιπέδου που περικλείεται από τις ευθείες $y=2x$, $x=1$

Λύση

Αρχικά σχεδιάζουμε το χωρίο



- 1ος τρόπος: Επιλέγοντας αρχικά τη μεταβλητή x:

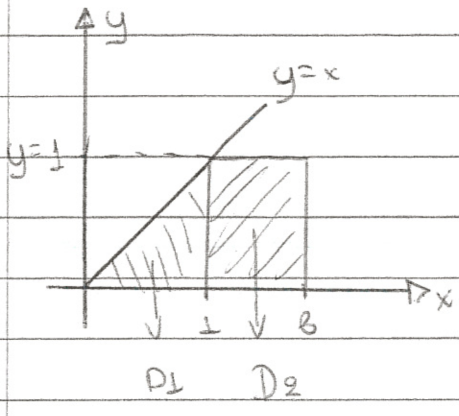
$$\iint_D f = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- 2ος τρόπος: Επιλέγω την y σαν πρώτη μεταβλητή

$$\iint_D f = \int_0^1 \left(\int_{y/2}^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

Άσκηση

Να γίνει η γραφική παράσταση της ολοκλήρωσης συνάρτησης f στο χωρίο D, όπως στο σχήμα.



Λύση

▶ α' τρόπος: Επιλέγουμε σαν πρώτη μεταβλητή το x:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)\,dx + \int_1^3\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx\right.$$

▶ β' τρόπος: Επιλέγουμε τη μεταβλητή y σαν πρώτη:

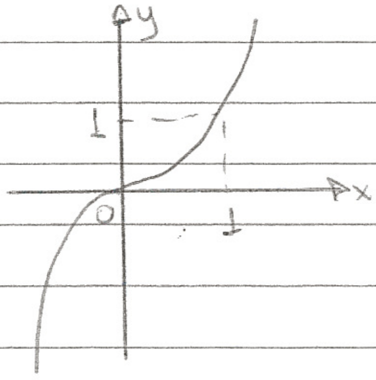
$$\int_0^1\int_y^0 f(x,y)\,dx\,dy$$

Άσκηση

Να περιγραφεί το ολοκλήρωμα στο φραγμένο χωρίο D που ορίζεται από τα γραφήματα της συνάρτησης $y=x$ και των ευθειών $x=1$, $y=0$. Στη συνέχεια βρείτε το εμβαδό του χωρίου D.

Λύση

Γραφική παράσταση του χωρίου D



$f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$

Η f είναι γν. αύξουσα και είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,0)$.

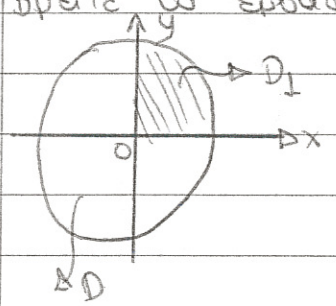
α' τρόπος: $\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} f(x,y)\,dy \right) dx$

β' τρόπος: $\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^{1/3}}^1 f(x,y)\,dx \right) dy$

Το εμβαδόν του χωρίου D είναι $F(D) = \int\int_D 1\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} 1\,dy \right) dx = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$

Άσκηση:

Βρείτε το εμβαδό του μοναδιαίου κύκλου



$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ αφού είμαστε στο 1ο τεταρτημόριο.

Εμβαδό κύκλου $= \int\int_D 1\,dxdy = 4\int\int_{D_1} dxdy = 4\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$

$= 4\int_0^1 [y]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

θέτω $x = \sin t \Rightarrow x=0 \rightsquigarrow t=0$ με $0 \le x \le 1$

$x=1 \rightsquigarrow t=\pi/2$ $dx = \cos dt$

Άρα $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt =$

$= 4\int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$

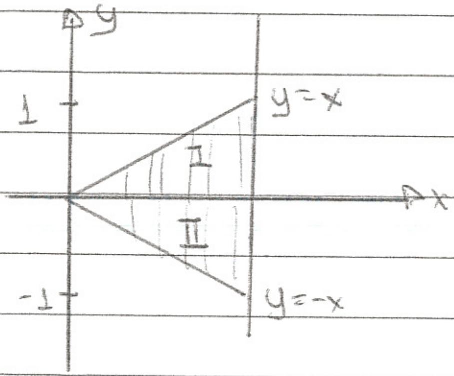
$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$

$= 2\int_0^{\pi/2} dt + 2\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt = \pi$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = -1 + 2\cos^2 t \\ \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \end{array}}$

Άσκηση

Ζωγραφίστε το χωρίο ολοκλήρωσης $\int_{-1}^{1}\left(\int_{|y|}^{1}(x+y)^2\,dx\right)dy$ και στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλ.



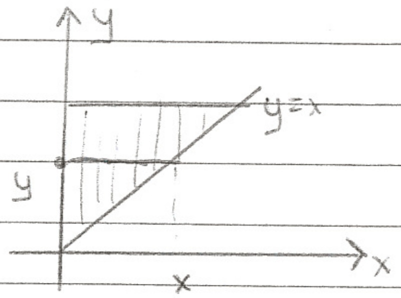
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{|y|}^{1}(x+y)^2\,dx\right)dy=\int_{0}^{1}\left(\int_{-x}^{x}(x+y)^2\,dy\right)dx$$

Άσκηση

Να γραφεί το διπλό ολοκλήρωμα

$\int_{0}^{1}\left(\int_{x}^{1}f(y)\,dy\right)dx$ σαν απλό

Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης

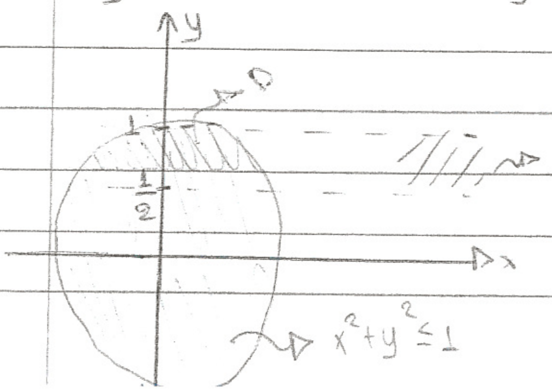


$$\int_{0}^{1}\left(\int_{x}^{1}f(y)\,dy\right)dx=\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{y}f(y)\,dx\right)dy$$

$$=\int_{0}^{1}\left(f(y)\int_{0}^{y}dx\right)dy=\int_{0}^{1}y\,f(y)\,dy$$

27/9/16

Άσκηση: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου D όταν D ορίζεται από $D=\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le y\le 1,\ a^2+y^2\le 1\}$

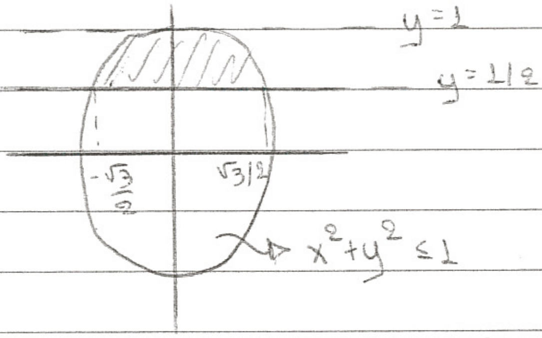


$\frac{1}{2}\le y\le 1$ Αρκεί να λύσω το σύστημα $x^2+y^2=1$

$y=1/2$.

Απάντηση:

Το χωρίο είναι ως εξής



$$\text{Εμβαδόν} := \iint 1\, dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\int_{1/2}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dy\right) dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right) dx = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} dx$$

Για $x = \sin t$ έχω   θέτω $x = \sin t$

$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = \pi/3$

$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = -\pi/3$

β' τρόπος: Επιλέγω την y ως πρώτη μεταβλητή

$$\iint_D dx\,dy = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\right) dy =$$

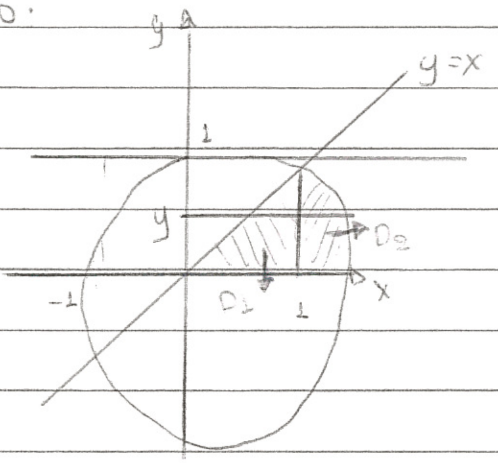
Άσκηση 2

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1\left(\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dx\right) dy$$

Να γίνει αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

Πρόχειρο:



$x = \sqrt{2 - y^2} \Rightarrow x^2 = 2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$

$\left.\begin{matrix} y = 1 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$

$$\iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y)\, dy \right) dx$$

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

i) $\iint_D \left(f(x,y) + g(x,y) \right) dx\,dy = \iint_D f\, dx\,dy + \iint_D g\, dx\,dy$

ii) $\iint_D \lambda f(x,y)\, dx\,dy = \lambda \iint f\, dx\,dy$

iii) $\int_b^a f = - \int_a^b f$

iv) $\int_a^\gamma f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx$

v/ Αν $f \geq g \Rightarrow \iint_D f \geq \iint_D g$

vi/ Αν $f \geq 0$ και f συνεχής τότε $\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Αν $f(x,y) \geq 0$ και f συνεχής τότε $\iint_D f\,dx\,dy = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

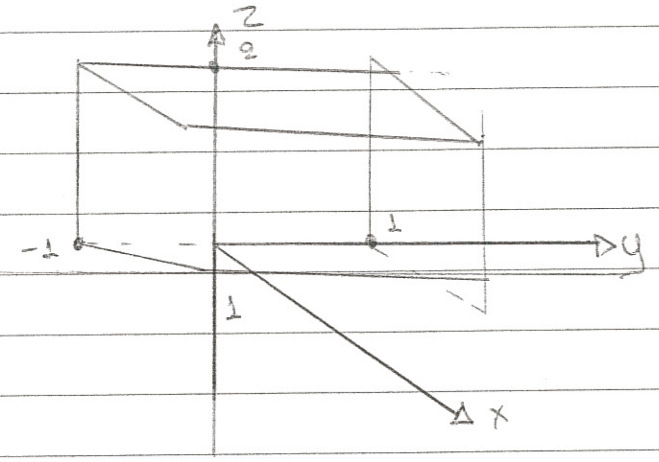
vii/ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

θέτω $x = \varphi(t)$
$a = \varphi(t_1)$
$b = \varphi(t_2)$

viii/ $\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt =$

$= [f\,g]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα
$\iiint_D x\,dx\,dy\,dt$ όπου $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$



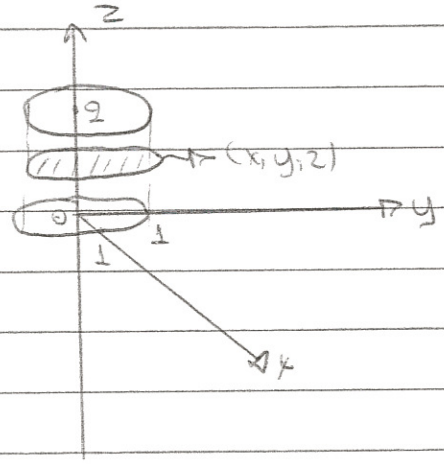
$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^2 x\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left[x \int_0^2 dz \right] dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (2x)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (4x)\,dx = \left[2x^2 \right]_0^1 = 2.$$

Άσκηση: Να σχεδιάσετε το χωρίο D όπου $D=\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, x^2+y^2\le 1 \;,\; 0\le z\le 2\}$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iiint_D x\,dxdydz$$



$$\iint_D\!\!\int dxdydz = \int_0^z \left(\iint_{D(x,y,z)} x\,dxdy\right) dz = \int_0^2 \left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx\right)dz$$

$$= \int_0^2\left(\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,dx\right)dz = \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,dx \int_0^2 dz = 0. \quad ①$$

Θέτω $t=1-x^2$ $\quad dt=-2x\,dx \Leftrightarrow dx=\dfrac{dt}{-2x}$

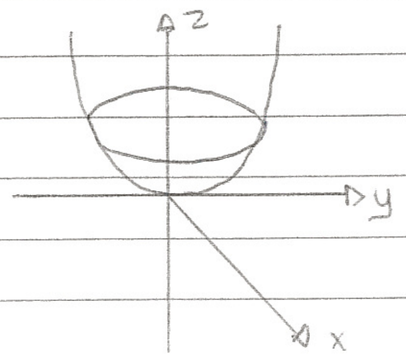
Αντικαθιστώ στην ① και βρίσκω το ζητούμενο ✓

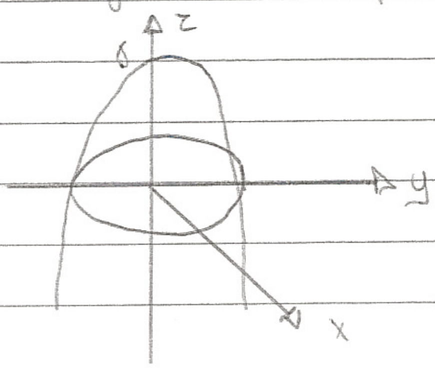
29/9/16

Άσκηση: Να σχεδιάσετε το φραγμένο χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες : $z=x^2+y^2$

$z=8-x^2-y^2$

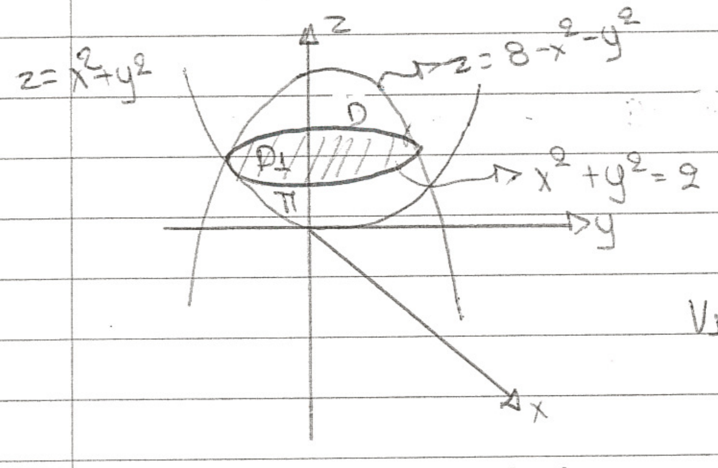
Στη συνέχεια να βρεθεί ο όγκος του χωρίου





Κοινά σημεία:

$$\left.\begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ z=8-x^2-y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=8-x^2-y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z=4 \\ x^2+y^2=2^2 \end{array}$$



$D_1 = \{(x,y,4) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$

$$V_1 = \iint_{D_1} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

Όγκος του $D = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dt =$

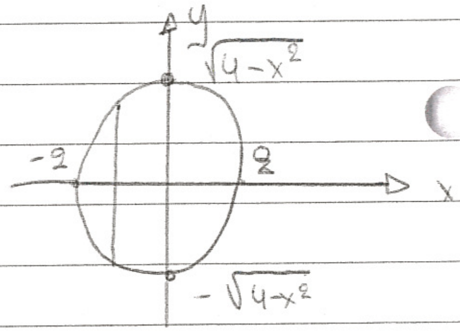
$$\iint_{D_1}\left(\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\right)dx\,dy = \iint_{D_1}\left[8-x^2-y^2-x^2-y^2\right]dx\,dy$$

$$= 2\iint_{D_1}(4-x^2-y^2)\,dx\,dy \quad (1)$$

Ισχύει: $x^2+y^2 \leq 4$ Άρα

$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=4-x^2 \Leftrightarrow$

$y = \pm\sqrt{4-x^2}$



Άρα, $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $2\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4-x^2-y^2\,dy\right)dx$

Παράδειγμα: Δίνεται η απεικόνιση:

$T:[-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο:

$$T(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

i) Να βρεθεί η εικόνα της D, T(D)

Είναι η απεικόνιση "1-1";

Λύση

Πότε η T θα ήταν "1-1"

(Ορισμός: $\forall (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \Rightarrow T(x_1,y_1) \neq T(x_2,y_2)$ $\Leftrightarrow$

Με αντιθετοαντιστροφή

Αν $T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

"1-1" Έστω $T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2)$ $\Leftrightarrow$

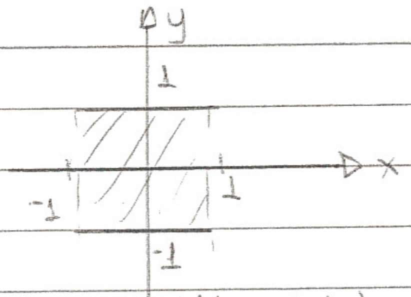
$$\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1-y_1}{2}\right) = \left(\frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_2-y_2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1+y_1}{2} = \dfrac{x_2+y_2}{2} \\ \dfrac{x_1-y_1}{2} = \dfrac{x_2-y_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

Σχεδιασμός της εικόνας:

Πεδίο ορισμού της T:

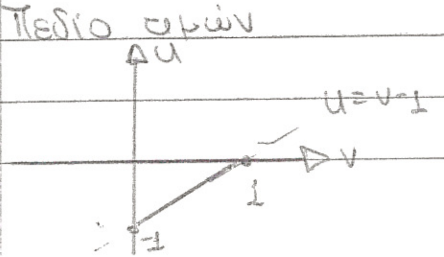


$I = \{(x,1), x \in [-1,1]\}$

$T(x,1) = \left(\underbrace{\frac{x+1}{2}}_{u}, \underbrace{\frac{x-1}{2}}_{v}\right)$ με $x \in [-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{x+1}{2} \\ v = \dfrac{x-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2u-1 \\ x = 2u+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2u-1 = 2v+1 \Leftrightarrow 2u-2v = 2 \Rightarrow u-v = 1 \Rightarrow \boxed{v = u-1}$$

Πεδίο τιμών



$T(-1,1) = (0,-1)$

$T(1,1) = (1,0)$

$II: \{ (x,-1) \; , x \in [-1,1] \}$

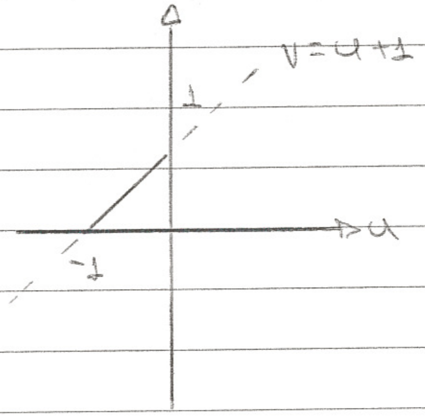
$T(x,-1) = \left(\underbrace{\frac{x-1}{2}}_{u} , \underbrace{\frac{x+1}{2}}_{v} \right) \quad x \in [-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{x-1}{2} \\ v = \frac{x+1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2u+1 \\ x = 2v-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2u+1 = 2v-1 \Leftrightarrow$$

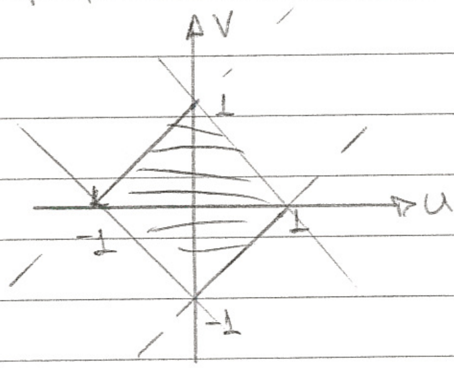
$$2u - 2v = -2 \Leftrightarrow$$

$$u - v = -1 \Leftrightarrow \boxed{v = u+1}$$

Άρα πεδίο τιμών:



Άρα, όλη η εικόνα είναι η εξής:



Άσκηση : Πολικές συντεταγμένες:

Δίνεται η απεικόνιση $T: D \to R^2$

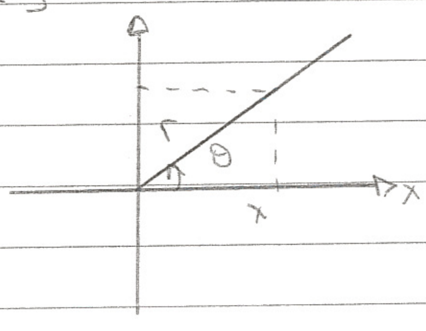
$D = \{ (x,y) \; | x^2+y^2 \leq 1 \}$

$T(x,y) = (r,\theta)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

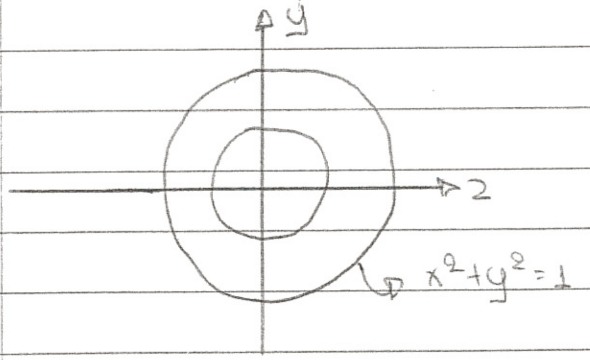
$x = r \cdot \cos\theta$

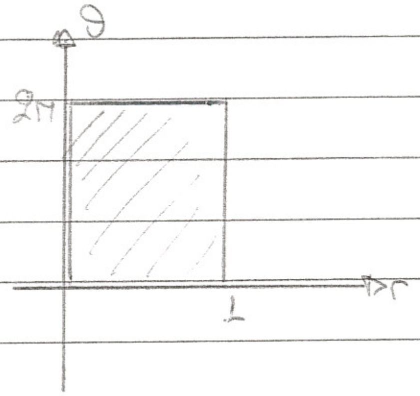
$y = r \sin\theta$



ii) Να βρεθεί η εικόνα

iii) Είναι "1-1"?





$$x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$$

$r^2=1 \Rightarrow r=1$

$T(0,\pi)=(0,0)$

$T(0,\pi/2)=(0,0)$

Άσκηση: $T: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y) = (-x^2+4x, y)$

i) είναι "1-1"?

ii) Να βρείτε την εικόνα

Λύση

i) "1-1" Αν $T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

Έστω $T((x_1,y_1)) = T((x_2,y_2)) \Leftrightarrow (-x_1^2+4x_1, y_1) = (-x_2^2+4x_2, y_2) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x_1^2+4x_1 = -x_2^2+4x_2 \\ y_1=y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

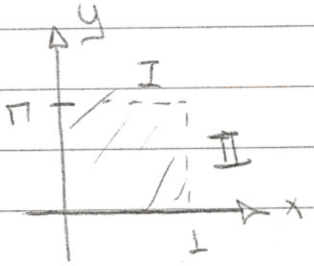
$\left.\begin{array}{l} x_2^2-x_1^2+4(x_1-x_2)=0 \\ y_1=y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x_2-x_1)(x_2+x_1)-4(x_2-x_1)=0 \\ y_1=y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} (x_2-x_1)(x_2+x_1-4)=0 \\ y_1=y_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{array}$ Άρα είναι 1-1

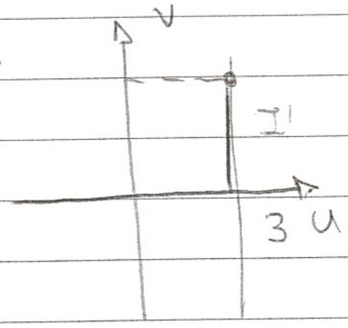
$\left.\begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+x_2 \le 2 \Rightarrow x_1+x_2-2 \le 0 \Rightarrow$

$x_1+x_2-4 \le -2 < 0$

Π.Ο



Π.Τ.



$T(x,0) = (-x^2+4x, 0) = -x^2+4x$ $\quad u = -x^2+4x$

$v = y$

$I = \{ (x,0) \mid x \in [0,1] \}$

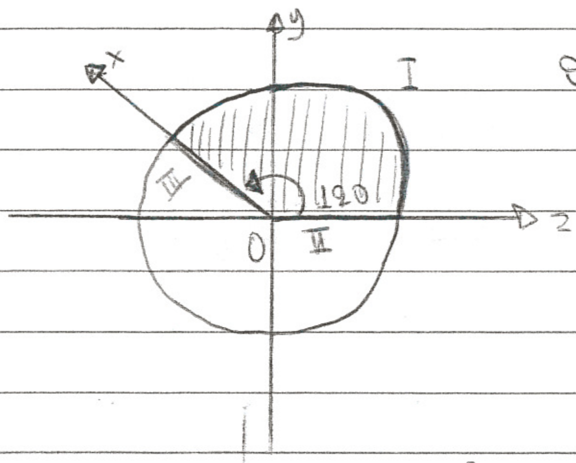
$II = \{(1,y) \mid y \in [0,1]$ $\quad T(1,y) = (-1+4, y) = (3,y)$

$0 \leq x \leq 1$ $\quad T(x,1) = (\underbrace{-x^2+4x}_{u}, \underbrace{1}_{v})$

$(x,1)$

4/10/16

Άσκηση: Να βρείτε το D^* ώστε $T: D^* \to D$ με τύπο $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ όπου D είναι το χωρίο του σχήματος



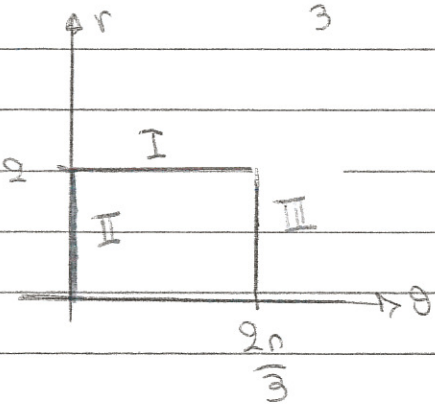
$\theta \Rightarrow D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2, \ y \geq -\sqrt{3}x, \ y \geq 0\}$

$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

$\| \ y = \lambda x$

Για το I $\Rightarrow x^2+y^2 = 2^2 \Rightarrow r^2 = 2^2 \Rightarrow \boxed{r=2}$

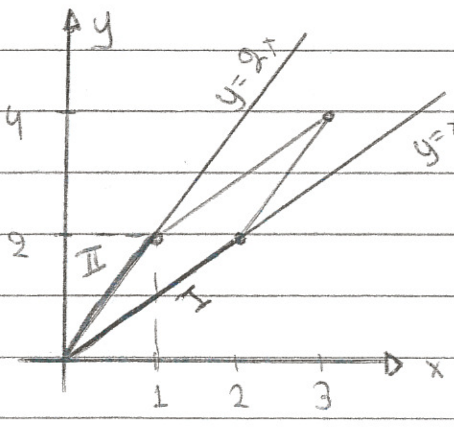
Οπότε $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$



Για το II: $y=0$, $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \theta = 0$, $0 \leq r \leq 2$

Για το III $y = -\sqrt{3}x$, $y \geq 0 \Rightarrow r\sin\theta = -\sqrt{3}\, r\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

Άσκηση: Βρείτε την απεικόνιση T και το ορθογώνιο D^* ώστε $T: D^* \to \Pi$ όπου Π είναι το χωρίο του σχήματος



Για το I: $v = y-x$ γιατί θέλω $v=0$. Όμως $y=x \Rightarrow y-x=0$ Άρα $\boxed{v=y-x}$ (1)

Για το II : $u = y - 2x$

επειδή $x=0$ και θέλω

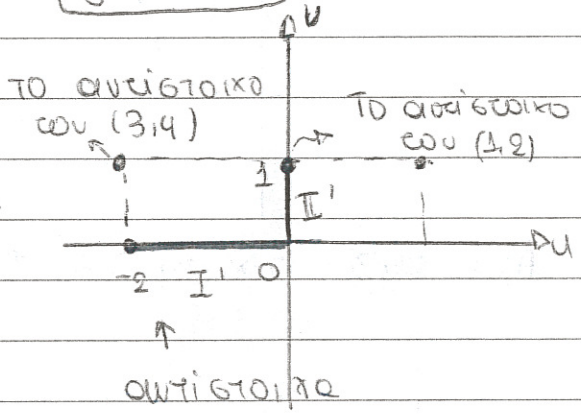
$u=0$ και $y = 2x \Leftrightarrow y-2x=0$

Άρα $\boxed{u=y-2x}$ (2)

Η αντίστροφη απεικόνιση

Από $-(1)+(2)$: $u-v = -x \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=v-u \\ y=2v-u \end{array}}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v=0 \\ u=2 \end{array}$



Αντίστοιχα για $x=1,\ y=2 \Rightarrow$

$v=1,\ u=0$.

Για $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v=0 \\ u=-2 \end{array}$

Για $x=3,\ y=4 \Rightarrow v_1 = u = -2$.

• Γιατί η προετοιμασία?

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (όταν κάναμε αλλαγή συστήματος συντεταγμένων)

Μια μεταβλητή: $y_2 = g^{-1}(b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{y_1 = g^{-1}(a)} f(g(y))\, g'(y)\,dy$$

αφού $x = g(y)$

$dx = g'(y)\,dy$

$a = g(y_1) \Rightarrow y_1 = g^{-1}(a)$

$b = g(y_2) \Rightarrow y_2 = g^{-1}(b)$

Ανάλογο θεώρημα:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v),\, y(u,v)) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

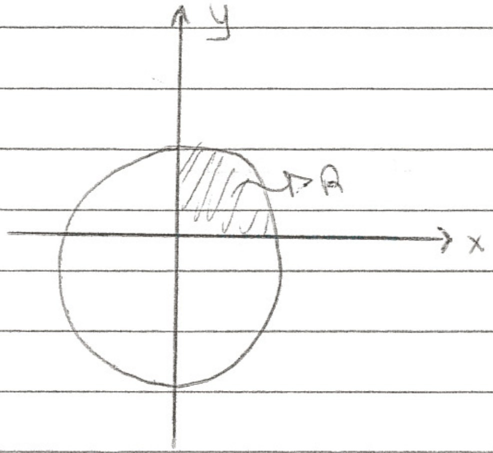
με $\dfrac{\partial(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{dv} \\ \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dx}{dv} \end{vmatrix}$

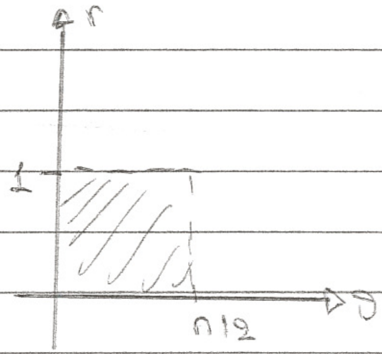
Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

όπου $R=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$





$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{R^*} r \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta \quad (1)$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dr} = \cos\theta$, $\dfrac{dy}{dr} = \sin\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$

Οπότε από Ιακωβιανή $\Rightarrow \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Άρα η (1) $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r^2\,dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 d\theta =$

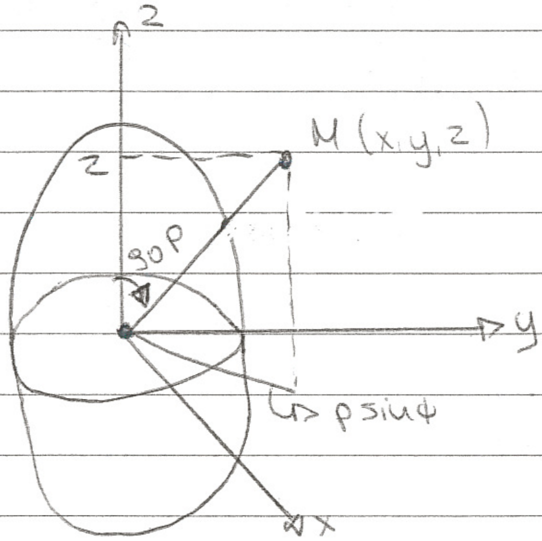
$= \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ ∎

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{R^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

όπου $\dfrac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dx}{dw} \\ \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dy}{dw} \\ \dfrac{dz}{du} & \dfrac{dz}{dv} & \dfrac{dz}{dw} \end{vmatrix}$

Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων:



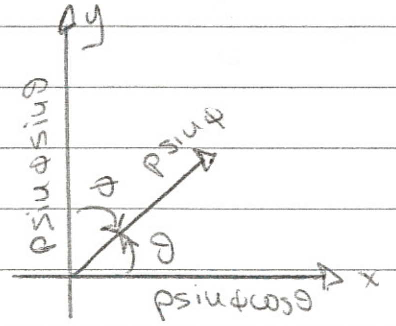
$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$z = \rho\cos\phi \quad 0 \le \phi \le \pi$

$x = \rho\sin\phi\cos\theta$

$y = \rho\sin\phi\sin\theta$

με $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$



Άρα:

$\dfrac{dx}{dx} = \sin\phi\cos\theta$, $\dfrac{dx}{d\theta} = -\rho\sin\phi\sin\theta$, $\dfrac{dx}{d\rho} = \rho\cos\phi\cos\theta$

$\frac{dy}{d\rho} = \sin\phi \sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = +\rho \sin\phi \cos\theta$, $\frac{dy}{d\phi} = \rho \cos\phi \sin\theta$

$\frac{dz}{d\rho} = \cos\phi$, $\frac{dz}{d\theta} = 0$, $\frac{dz}{d\phi} = -\rho \sin\phi$

Ιακωβιανή: $\begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi \sin\theta & \rho \sin\phi \sin\theta & \rho\cos\phi \sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho \sin\phi \end{vmatrix} =$

$= \rho^2 \sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi & 0 & \cos\phi \sin\theta \end{vmatrix} =$

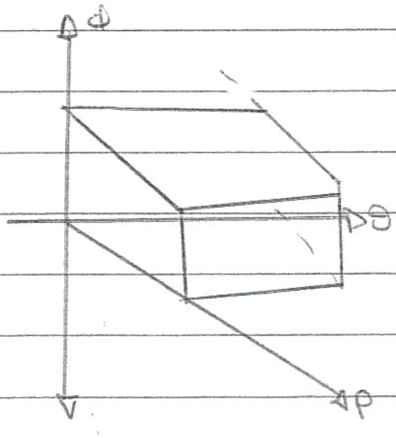
$= \rho^2 \sin\phi \left(\cos\phi \begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \cos\theta & \cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} - \sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \right) =$

$= \rho^2 \sin ..$

Άσκηση: Υπολογίστε το $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx\,dy\,dz$

όπου $D = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$

$B = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$



$D^* = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

Με σφαιρικές συντεταγμένες:

$z = r\cos\phi \qquad 0 \le \rho \le 1$

$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad 0 \le \phi \le \pi$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

Άρα, $\int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\theta \right) d\phi \right) d\rho =$

$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^2 e^{\rho^3} \sin\phi \, d\phi \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{3} (-\cos\phi) \Big|_0^\pi d\rho$

$= 4\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho = 4\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right)' d\rho =$

$= 4\pi \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{3} e - \frac{1}{3} \right) = 4\pi \frac{1}{3} (e-1) = \frac{4\pi}{3} (e-1)$

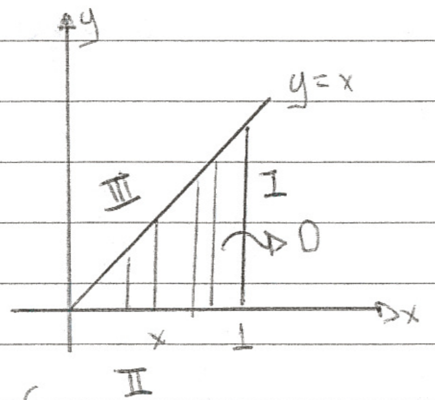
Άσκηση 6/10/16

Έστω $D = \{ (x,y) \mid 0 \le y \le x \ , 0 \le x \le 1$

Να υπολογιστεί το $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$ με την αλλαγή

$x = u+v$, $y = u-v$

Ελέγξτε το αποτέλεσμα υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα απ' ευθείας.



$x = u+v$

$y = u-v$

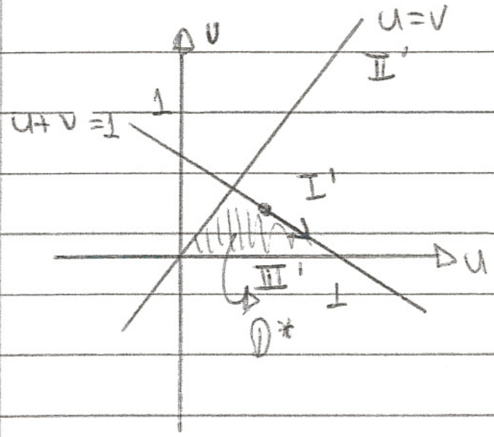
$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} (u+v+u-v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \, dv \quad (1)$$

Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\frac{dx}{du} = 1 \qquad \frac{dx}{dv} = 1$$

$$\frac{dy}{du} = 1 \qquad \frac{dy}{dv} = -1$$



$x=1, \quad 0 \leq y \leq 1$

$\Downarrow$

$u+v=1$

• Το $(1,0) \iff u+v=1$

$u-v=0$

$u=v$

$\cancel{2}v = \frac{1}{2}\cancel{2} \iff$

$\boxed{v = 1/2 = u}$

I' : $(x,0)$ με $x \in [0,1]$

$u-v=0$

II' : $y=x$ με $x \in [0,1]$ (x,x)

• Το $(1,1) \iff u+v=1$

$u-v=1 \iff u=v+1$

Άρα $\left.\begin{matrix} x = u+v \\ x = u-v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{u}+v = \cancel{u}-v \iff 2v=0 \iff \boxed{v=0}$ $\quad \boxed{\begin{matrix} u=1 \\ v=0 \end{matrix}}$

Άρα η ① $\Rightarrow \iint_{D^*} 2u \cdot 2\,du\,dv = \int_0^{1/2} \left(\int_v^{1-v} 4u\,du \right) dv =$

$$= \int_0^{1/2} \left(4 \int_v^{1-v} u\,du \right) dv = \int_0^{1/2} 4 \left[\frac{u^2}{2} \right]_v^{1-v} dv =$$

$$= \int_0^{1/2} 2\, (1-v)^2 - v^2 \, dv = 2 \int_0^{1/2} 1 - 2v + \cancel{v^2} - \cancel{v^2} \, dv =$$

$$= 2 \left[v - \cancel{2} \frac{v^2}{\cancel{2}} \right]_0^{1/2} = 2 \left[v - v^2 \right]_0^{1/2} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα

1) Αν η συνάρτηση είναι άφραχτη
2) Αν το χωρίο είναι άφραχτο

Πχ $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x}}_{a} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{dx}}_{b}$$

Για το a: $\varepsilon > 0$, $\lim_{e \to 0^+} \int_e^1 \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\ln \varepsilon) = +\infty = \int_0^1 \frac{dx}{x}$ άτοπο αφού δεν υπάρχει το όριο

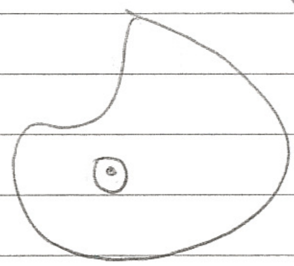
Για το b: $\int_1^A \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^A = \ln A - \cancel{\ln 1}^{0} = \ln A$

Άρα $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$ άτοπο αφού δεν υπάρχει το όριο.

Μεθοδολογία:

1) Αν η συνάρτηση είναι άφραχτη. $f: D \to \mathbb{R}$ και D φραγμέν

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ που επιπρόσθετα:



$f: D - B_\varepsilon(x_0,y_0)$ φραγμένη

τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ υπάρχει

αν $\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{D - B_\varepsilon(x_0,y_0)} f(x,y)\,dx\,dy =$

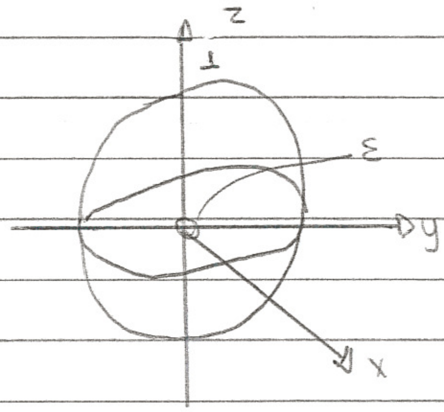
$= \iint_D f\,dx\,dy$

Άσκηση

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_B \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$

και αν ναι να βρεθεί όπου $B=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$

Άρα $\displaystyle\iiint_{B-B_\varepsilon(0)} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$ (1)



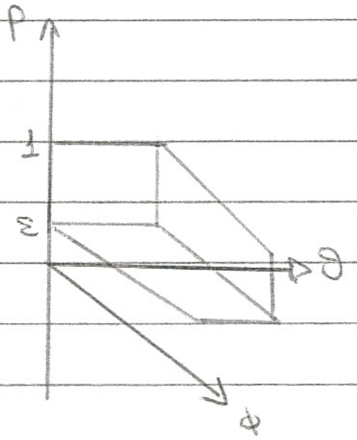
Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$z=\rho\cos\phi \qquad 0\le\phi\le\pi$

$x=\rho\sin\phi\cos\theta \qquad 0\le\theta<2\pi$

$y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$B_\varepsilon(0)=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid |x|<\varepsilon\}$



$$\text{Η (1)} \rightsquigarrow \iiint_{B-B_\varepsilon} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \int\iint \frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_\varepsilon^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi \frac{1}{\rho^2}(\rho^2\sin\phi)\,d\phi\right)d\theta\right)d\rho=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{B-B_\varepsilon}\frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\big(4\pi(1-\varepsilon)\big)=4\pi$$

Άσκηση:

Να αποδειχθεί: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$

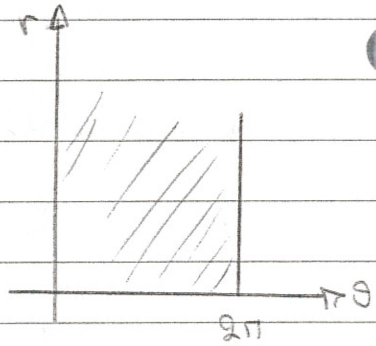
Λύση

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Σε πολικές : $x=r\cos\theta \quad 0\le r<+\infty$

$y=r\sin\theta \quad 0\le\theta<2\pi$



$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\theta\right)dr=2\pi\int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\,dr \quad ①$$

Υπολογίζω το $\displaystyle\int_0^A r e^{-r^2}\,dr=\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^A=\frac{-e^{-A^2}}{2}+\frac{1}{2}$

Άρα η ① $\rightarrow 2\pi\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} re^{-r^2}=2\pi\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-A^2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi$

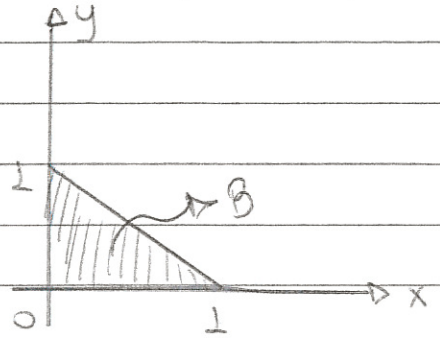
$=\pi$

Αφού $I^2=\pi$ τότε $I=\sqrt{\pi}$ ■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_B e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dx\,dy$

όπου B είναι το εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$



Θέτουμε $u = y-x$

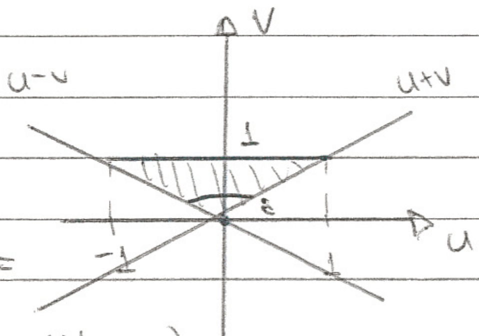
$v = y+x$

Άρα $\iint_B e^{\frac{y-x}{y+x}} dx\,dy = \iint_{B^*} e^{\frac{u}{v}} \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du\,dv$ (1)

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -1/2 = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

αφού $\frac{dx}{du} = -\frac{1}{2}$, $\frac{dx}{dv} = \frac{dy}{dv} = \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}$

Το $y = \frac{u+v}{2}$ και το $x = \frac{v-u}{2}$



Άρα η (1) $\rightsquigarrow \iint_{B^*} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du\,dv =$

$= \frac{1}{2} \iint_{B^* - B^*_\varepsilon} e^{\frac{u}{v}} du\,dv = \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 \left(\int_{-v}^{v} e^{u/v} du \right) dv =$

$= \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 \left(\left[v e^{u/v} \right]_{-v}^{v} \right) du = \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 \left(ve - ve^{-1} \right) dv =$

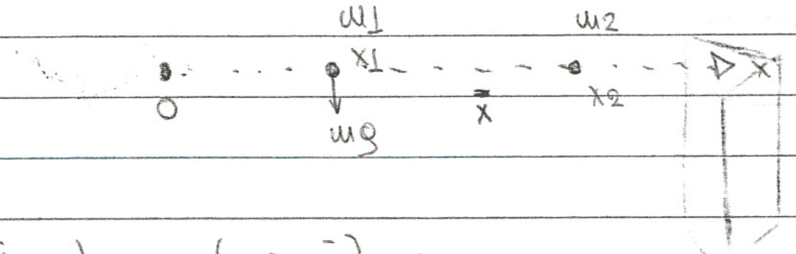
$$= \frac{e-e^{-1}}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{e-e^{-1}}{4}(1-\varepsilon^2)$$

και επειδή $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{B^* - B_\varepsilon^*} \frac{1}{2} e^{u/v}\, du\,dv =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e-e^{-1}}{4}(1-\varepsilon^2) = \frac{e-e^{-1}}{4}$$

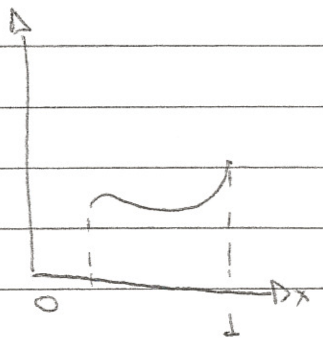
Μαρία Κοτρώτσιου 11/9/16

Κέντρο μάζας



$(\bar{x}-x_1)mg = (x_2-\bar{x})m_2 g$

$\bar{x}(m_1+m_2) = m_1x_1+m_2x_2 \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$



$x \to \rho(x) \quad 0 \leq x \leq 1$

$M\lambda = \int_0^1 \rho(x)\,dx$

$\bar{x} = \dfrac{\int_0^1 \rho(x)\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\,dx}$

$(x,y,z) \in D$

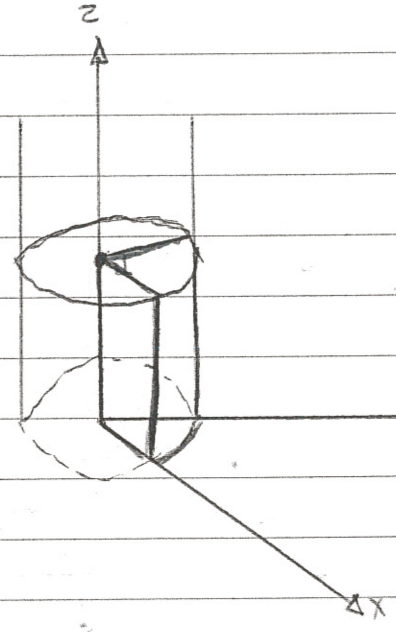
Άρα $M\lambda = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

με $\bar{x} = (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$

$\bar{y} = \dfrac{\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$ και $\bar{z} = \dfrac{\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$

όπου το Ω είναι το φραγμένο χωρίο που ορίζεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$, τους υποχώρους $x \geq 0$, $y \geq 0$ και του κύλινδρο $x^2+y^2 \leq 1$.



$$\iiint_{\omega} z\,dx\,dy\,dz \quad ①$$

Αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες

(x,y,z)

$x = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi/2 \qquad$ Ιακωβιανή του

$y = r\sin\theta \qquad 0 \le r \le 1 \qquad$ μετασχηματισμού $= r$

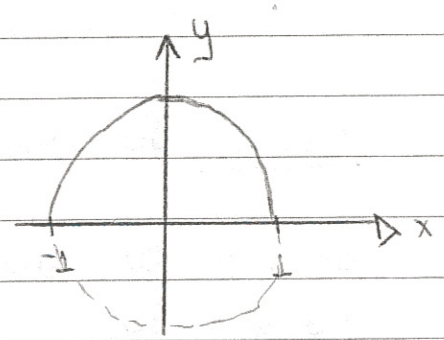
$z = z \qquad 0 \le z \le 1$

Με αντικατάσταση η ① $\to \iiint_{\omega} z\,dx\,dy\,dz =$

$$= \iiint_{\omega^*} z \left| \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,z)} \right| dr\,d\theta\,dz = \int_0^1 \left(z \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r\,dr \right) d\theta \right) dz$$

$= \dfrac{\pi}{8}$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα:



Καμπύλες: $\vec{\sigma} : [a,b] \to R^2$

$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ με $t \in [a,b]$

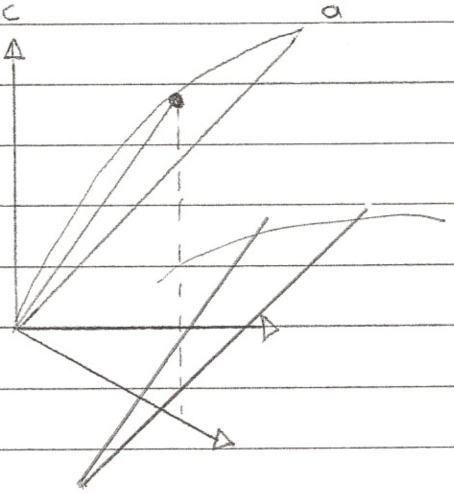
$\vec{\sigma}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ με $\theta \in [0,\pi]$

$\sigma : [a,b] \to R^3$

α' είδους: $\int_c \rho(x,y,z)\, ds =$ $\rho(x,y,z)=1$

$\int_c 1\, ds =$ συνολικό μήκος

Άρα $\int_c \rho(x,y,z)\, ds = \int_a^b \rho(\vec{\sigma}(t))$ όπου $\rho(\vec{\sigma}(t)) = \rho(x(t), y(t), z(t))$



$ds = \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$

$\left| \dfrac{\vec{\sigma}(t+h) - \vec{\sigma}(t)}{h} \right| = \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$

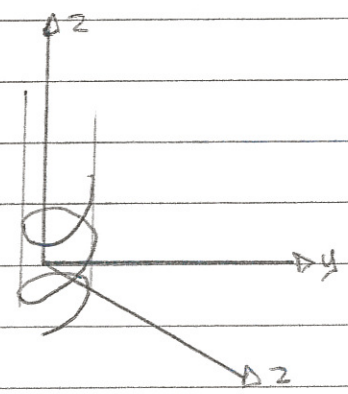
$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$\vec{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$
$\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

Άσκηση: Δίνεται η έλικα $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \to R^3$ με τύπο
$\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ με $t \in [0, 2\pi]$
$f : R^3 \to R$ με τύπο $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_c f\, ds$

Λύση

Έχω: $\int_c (x^2+y^2+z^2)\, ds =$

$\int_0^{2\pi} x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$ ①



$\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$

$\vec{\sigma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

Άρα η ① $\to \displaystyle\int_0^{2\pi} [\cos^2 t + \sin^2 t + t^2]\sqrt{2}\, dt =$

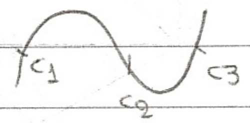
$= \sqrt{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} (1+t^2)\, dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$

$= \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3}\right)$

Ιδιότητες:

α) $\displaystyle\int_C (f+g)\, ds = \int_C f\, ds + \int_C g\, ds$

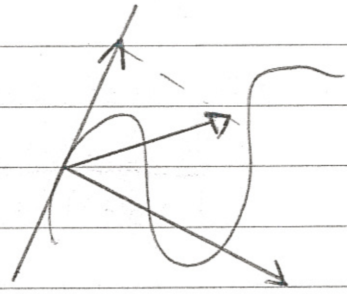
β) $\lambda \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_C (\lambda f)\, ds = \lambda \int_C f\, ds$



β' είδος: $\displaystyle\int_C \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{s} =$

$= \displaystyle\int_C \vec{F}(\overset{\vec{r}}{x,y,z})\, d\vec{r}$

$= \displaystyle\int_C \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} =$



$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$= \displaystyle\int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\, d(\vec{\sigma}(t)) = \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}'(t)\, dt =$

$= \displaystyle\int_a^b \Big[\Big(P(\vec{\sigma}(t)), Q(\vec{\sigma}(t)), R(\vec{\sigma}(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)$

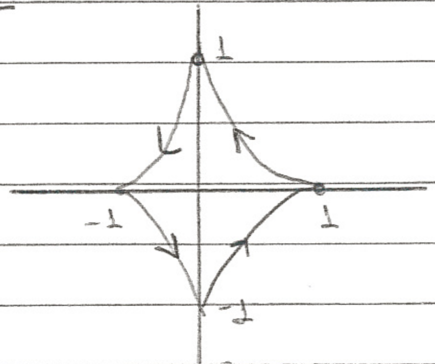
$= \displaystyle\int_a^b \left[P(\vec{\sigma}(t))\, x'(t) + Q(\vec{\sigma}(t))\, y'(t) + R(\vec{\sigma}(t))\, z'(t) \right] dt =$

$= \displaystyle\int_a^b P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} = (x,y)$ κατά μήκος της καμπύλης (υποκυκλοειδής) με $\vec{\sigma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Λύση



Θέτω $x = \cos^3 t$ και $y = \sin^3 t$

$\cos t = x^{1/3}$ $\quad$ $y^{1/3} = \sin t$

Άρα $\boxed{1 = x^{1/3} + y^{1/3}}$

$$\int_c \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (x(t), y(t))\, (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-3\cos^5 t \sin t + 3\sin^5 t \cos t\right] dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\cos^6 t}{6}\right)' + \left(\frac{\sin^6 t}{6}\right)'\right] dt = 3 \cdot 0 = 0.$$

Είδη επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\qquad$ 13/9/16

$\vec{\sigma}\,[a,b] \to \mathbb{R}$

$\vec{\sigma}'(t_0)$ εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο t_0

Για $h \neq 0$: $\lim_{h \to 0} \dfrac{\vec{\sigma}(t_0+h) - \vec{\sigma}(t)}{h} = \vec{\sigma}'(t_0)$

α' είδος: $\int_{\vec{\sigma}} F(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$

f βαθμωτή $\quad$ Αν $f \equiv 1 \Rightarrow \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$

$\hookrightarrow$ μήκος της καμπύλης

<u>β' είδος:</u> $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}'(t)\, dt$

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\vec{\sigma}} (P dx + Q dy + R dz)$$

με $\vec{F} = (P, Q, R)$ $= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(\vec{\sigma}(t))y'(t) +$

$+ R(\vec{\sigma}(t))z'(t)]\, dt$

όπου $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

<u>Άσκηση</u>

Έστω C η καμπύλη $\vec{\sigma}(\theta) = (\cos^3\theta, \sin^3\theta, \theta)$ με $0 \le \theta \le 7\pi/2$

Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}\, d\vec{s}$

όπου $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, -(xy)^{1/3})$ με $x, y, z \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Είναι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους

Άρα, $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{7\pi/2} F(\vec{\sigma}(\theta)) \cdot \vec{\sigma}'(\theta)\, d\theta$ ①

$\vec{\sigma}'(\theta) = (-3\cos^2\theta \sin\theta, 3\sin^2\theta\cos\theta, 1)$ με $\theta \in [0, 7\pi/2]$

$\vec{F}(\vec{\sigma}(\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta, -(\cos^3\theta \cdot \sin^3\theta)^{1/3}) =$

$= (\sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta\cos\theta)$ με $\theta \in [0, 7\pi/2]$

Άρα η ① $\rightsquigarrow \int_0^{7\pi/2} (\sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta\cos\theta) \cdot (-3\cos^2\theta\sin\theta,$

$3\sin^2\theta\cos\theta, 1)\, d\theta =$

$= \int_0^{7\pi/2} [-3\cos^2\theta \sin^{\cancel{2}}\theta + 3\sin^{\cancel{2}}\theta\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta]\, d\theta =$

$$= -\int_0^{7\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2}\, d\theta = -\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{7\pi/2} =$$

$$= \frac{\cos 7\pi - \cos 0}{4} = -\frac{1}{2}$$

Θεώρημα: Έστω $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ομαλή βαθμωτή συνάρτηση. ($C^1(\mathbb{R}^3)$)

Τότε $\int_{\vec{\sigma}} \nabla f \, d\vec{s} = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a))$

σημαίνει ότι είναι μία φορά παραγωγίσιμη και συνεχής

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$$

Απόδειξη: $\int_{\vec{\sigma}} \nabla f \, d\vec{s} = \int_a^b (\nabla f)\, \vec{\sigma}(t) \cdot \sigma'(t)\, dt$

Αν $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ κανόνας αλυσίδας:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{\sigma}(t)) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) =$$

$$= \frac{df}{dx}(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) +$$

$$+ \frac{df}{dy}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) +$$

$$+ \frac{df}{dz}(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) =$$

$$= \nabla f(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}'(t).$$

Κανόνας της αλυσίδας προς μια μεταβλητή:

$$\frac{d}{dx}\big(f(\underbrace{g(x)}_{y})\big) = \frac{df}{dy}\frac{dg}{dx} = f'(g(x))\,g'(x)$$

Επομένως $\int_{\vec{\sigma}} \nabla f \, d\vec{s} = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(f(\vec{\sigma}(t))\big)\, dt = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a))$ ∎

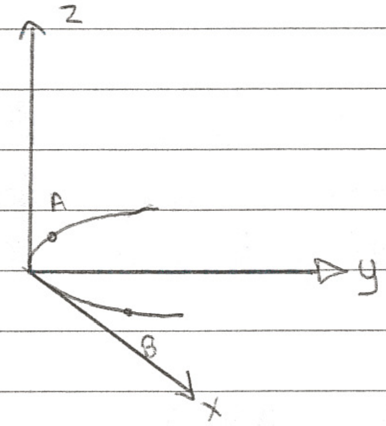
Άσκηση

Θεωρούμε τη δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Υπολογίστε το έργο που παράγει για τη μετακίνηση της ενός σωματιδίου κατά μήκος της παραβολής $y=x^2$, $z=0$ από $x=-1$ έως $x=2$.

Λύση

$A = (-1,1,0)$

$B = (2,4,0)$



$\vec{\sigma}(x) = (x, x^2, 0)$ με $x \in [-1,2]$

$\vec{\sigma}'(x) = (1, 2x, 0)$

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{-1}^{2} \vec{F}(\vec{\sigma}(x))\, \vec{\sigma}'(x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x, x^2, 0)(1, 2x, 0)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + x^2(2x) + 0)\, dx = \int_{-1}^{2} (x + 2x^3)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right)_{-1}^{2} =$$

$$= 2 + 8 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2 + 8 - 1 = 9$$

Παρατηρώ ότι:

2^{os} τρόπος: $\vec{F} = \nabla f$ με $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

από το προηγούμενο θεώρημα: $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \nabla f\, d\vec{s} =$

$f(\vec{\sigma}(2)) - f(\vec{\sigma}(-1)) =$

$$= \frac{1}{2}(x^2(2) + y^2(2) + z^2(2)) - \frac{1}{2}(x^2(-1) + y^2(-1) + z^2(-1)) = 9$$

$x(2)=2$	$x(-1)=-1$
$y(2)=4$	$y(-1)=1$
$z(2)=0$	$z(-1)=0$

Επιφανειακά ολοκληρώματα

Επιφάνειες:

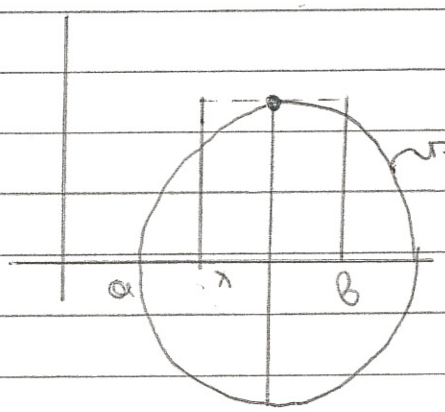
Δυο παραμέτρους $D \subseteq R^2$

$\Phi : D \to R^3$

$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ με $(u,v) \in D$

▶ Ομαλές επιφάνειες : C_1 επιφάνειες

Λείες επιφάνειες: όταν $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$



$y = \sqrt{1-x^2}$

$\vec{\sigma}(x) = (x, f(x))$

$x^2+y^2=1$

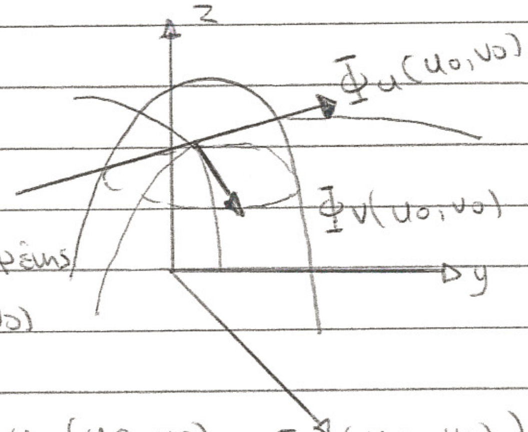
$\vec{\sigma}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\frac{d}{du}\Phi = \Phi_u = (x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0))$

$\frac{d}{dv}\Phi = \Phi_v$

εφαπτομένης

καμπύλης $(v=v_0)$



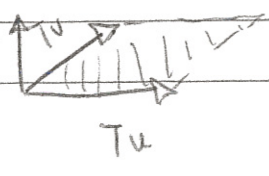
▶ $\Phi_u(u_0,v_0) = x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0)) = T_u$

$\Phi_v(u_0,v_0) = x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), z_v(u_0,v_0)) = T_v$

Εφαπτ. επίπεδο στην επιφάνεια

▶ $T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)$: κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\Phi(u_0,v_0)$

▶ $\| T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0) \|$: εμβαδόν



Μαρία Κοτρώτσου

18/10/16

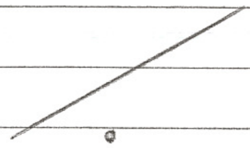
Λείες επιφάνειες

C^1 επιφάνεια $\quad \Phi: D \to R^3$

$S = \Phi(D)$

$\|\Phi_u \times \Phi_v\| \neq 0$

Εφαπτόμενο επίπεδο $\Phi(u_0, v_0) \in R^3$

1) 

2) Τρία μη συγγραμμικά σημεία

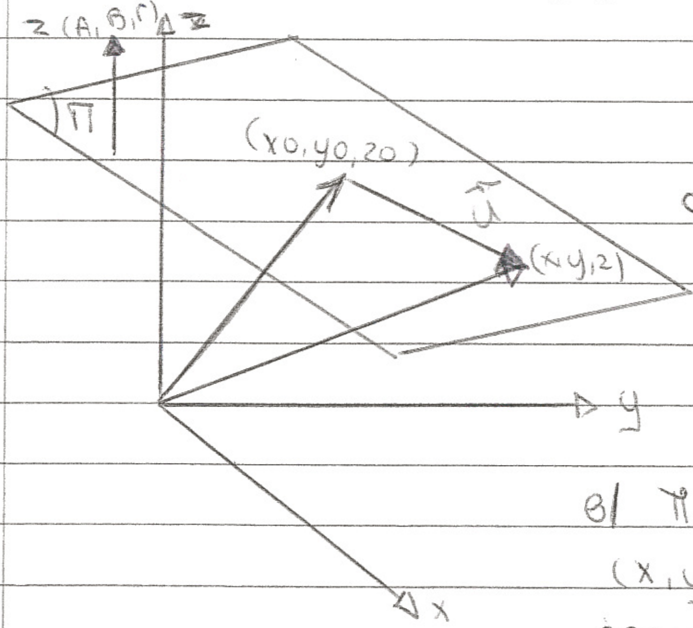
3) Σημείο (x_0, y_0, z_0) του επιπέδου και ένα κάθετο διάνυσμα σε αυτό.

$Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 = \Delta$

$\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z = Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0$

$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow (A, B, \Gamma) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$



$\vec{u} = \vec{x} - \vec{x_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

α/ Καρτεσιανή μορφή:

$(A, B, \Gamma)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

$(A, B, \Gamma) \perp (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

β/ Παραμετρική μορφή:

$(x, y, z) = \vec{x} = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{u} + s\vec{v}$

όπου $\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα διανύσματα στο επίπεδο.

► $\Phi(u_0, v_0) \in R^3$ (επίπεδο)

$\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$ (κάθετο διάνυσμα της Φ $\Phi(u_0, v_0)$)

είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο $\Phi(u_0, v_0)$

$(A,B,\Gamma)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$

$\vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \neq 0$, $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$

$(A,B,\Gamma) = \Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0) \neq 0$

Άσκηση : Θεωρούμε την επιφάνεια που δίνεται από τις εξισώσεις $x = u\cos v$, $y = u\cdot \sin v$ και $z = u$ με $u \geq 0$ και $v \in [0, 2\pi)$.

α) Είναι η επιφάνεια λεία; Είναι διαφορίσιμη

β) Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (u_0, v_0) με $u_0 \neq 0$.

Λύση

Παρένθεση: Για να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στον R^3 πρέπει:

1) $\exists \dfrac{df}{dx}(x_0,y_0,z_0)$, $\dfrac{df(x_0,y_0,z_0)}{dy}$

και $\dfrac{df(x_0,y_0,z_0)}{dz}$

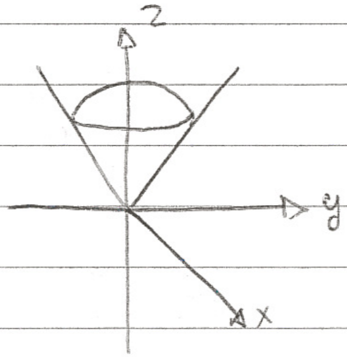
και

2) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \dfrac{f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) - \nabla f(x,y,z)(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\|}$

$\Phi(u,v) = (u\cdot\cos v, u\cdot \sin v, u)$ $u \geq 0$ και $v \in [0, 2\pi)$

Είναι κώνος με εξίσωση:

$x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 = z^2$ με $z \geq 0$



$z = \sqrt{x^2+y^2}$ με $x, y \in R$

Η $x \longmapsto \sqrt{x}$ με $x \geq 0$

$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$

Τι γίνεται στο (0,0)?

$$\frac{dz}{dx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{z(x,0) - z(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Άρα $\nexists \lim_{x\to 0} |x|$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\Phi_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 1)$$
$$\Phi_v(u,v) = (-u\cdot \sin v, u\cdot \cos v, 0)$$

$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-u\cdot\cos v) - \vec{j}(+u\cdot\sin v) + \vec{k}(u\cos^2 v + u\sin^2 v) =$$
$$= (-u\cos v)\vec{i} - (u\sin v)\vec{j} + \vec{k}u. =$$
$$= (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

$$\|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\| = \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + u^2} =$$
$$= \sqrt{u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2} = \sqrt{2u^2} \neq 0$$

Άρα είναι λεία και παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία εκτός του (0,v).

β) Το εφαπτόμενο επίπεδο στο (u_0, v_0) της επιφάνειας με $u_0 \neq 0$

$$[(x,y,z) - \Phi(u_0,v_0)]\cdot \Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$((x,y,z) - (u_0\cos v_0, u_0\sin v_0, u_0))\cdot(-u_0\cos v_0, -u_0\sin v_0, u_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cancel{u_0}\cos v_0(x - u_0\cos v_0) - \cancel{u_0}\sin v_0(y - u_0\sin v_0) + \cancel{u_0}(z - u_0) = 0$$

$$-\cos v_0 x + u_0\cos^2 v_0 + u_0\sin^2 v_0 + z - u_0 = 0 \Leftrightarrow -\cos v_0 x - \sin v_0 y + z = 0$$

Άσκηση: Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια S είναι γράφημα συνάρτησης : $R^2 \to R$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S.

Λύση

$\exists D \quad (x,y) \in D \subseteq R^2$

$S := \{ (x,y), f(x,y) \mid (x,y) \in \}$

$\Phi(x,y) = (x,y, f(x,y))$ με $(x,y) \in D$

$\Phi_x(x,y) = (1, 0, \frac{df}{dx}(x,y))$

$\Phi_y(x,y) = (0, 1, \frac{df}{dy}(x,y))$

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & df/dx \\ 0 & 1 & df/dy \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & df/dx \\ 1 & df/dy \end{vmatrix} -$$

$$- \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & df/dx \\ 0 & df/dy \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{df}{dx}, -\frac{df}{dy}, 1 \right)$$

Εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (x_0, y_0)

$$(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)) \left(-\frac{df(x_0,y_0)}{dx}, -\frac{df(x_0,y_0)}{dy}, 1 \right) = 0 \iff$$

$$-\nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) + z - f(x_0,y_0) = 0 \iff$$

$$-\left(\frac{df}{dx}(x_0,y_0), \frac{df(x_0,y_0)}{dy} \right)(x-x_0, y-y_0) + z - f(x_0,y_0) = 0$$

20/10/16

$\Phi : D \to R^3$ με $\Phi \in C$

$\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0) \neq 0$

$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \circ ((x, y, z) - \Phi(u_0, v_0)) = 0$

Άσκηση

Βρείτε μια παραμετρικοποίηση (της επιφάνειας) για το υπερβολοειδές $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Λύση

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Πρόχειρο: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

θέτω $x = \rho \cos\theta = \cosh\phi \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta = \cosh\phi \sin\theta$

$w = \rho$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Άρα $\rho = \cosh\phi$

$z = \sinh\phi$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Απάντηση: θέτουμε

$x = \cosh\phi \cos\theta$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

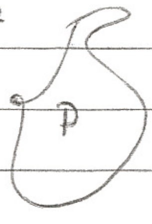
$y = \sinh\phi \sin\theta$

$z = \sinh\phi$ με $\phi \in R$ και $\theta \in [0, 2\pi)$

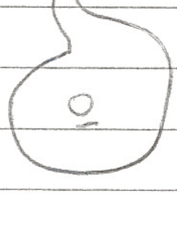
Εμβαδό επιφάνειας

Έστω $\Phi : D \to R^3$ ομαλή επιφάνεια όπου $D \subseteq R^2$

$S = \Phi(D)$



καμπύλη $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma} : [0,1] \to R^3 \\ \text{μήκος} = \int_0^1 \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \text{με } S \subseteq R^2 \\ |\Omega| = \iint 1 \, ds \end{array} \right.$



$$ds = |\Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0)|\, du\, dv$$ (στοιχειώδες εμβαδό στο (u_0,v_0))

καμπύλη: $\Phi_u(u_0,v_0)$ εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης

$\Phi_v(u_0,v_0)$ $\quad u \longmapsto \Phi(u,v_0)$ εφαπτόμενο διάνυσμα της $v \longmapsto \Phi(u_0,v)$.

Άρα $$\boxed{\text{Εμβαδό επιφάνειας} = \iint_D \underbrace{\|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|\, du\, dv}_{ds(u,v)}}$$

Έστω $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\Phi_u(u,v) = (x_u, y_u, z_u) \qquad x_u = \frac{d}{du}x$$

$$\Phi_v(u,v) = (x_v, y_v, z_v)$$

Άρα $$\Phi_u \cdot \Phi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \vec{j} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{\left|\frac{d(y,z)}{d(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{d(x,z)}{d(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|^2}$$

▶ Αν η επιφάνεια είναι γράφημα συνάρτησης
$\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ με $(u,v) \in D$

Τότε $\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$$\Phi_u(u,v) = (1, 0, f_u)$$
$$\Phi_v(u,v) = (0, 1, f_v)$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & f_u \\ 1 & f_v \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & f_u \\ 0 & f_v \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Οπότε $A(D) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2(u,v) + f_v^2(u,v)}\ du \cdot dv$

Παράδειγμα: Έστω $D = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
και $\Phi : D \to R^3$ που ορίζεται από:

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r$

Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας

Λύση

$\Phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$\Phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$$\Phi_r(r,\theta) \times \Phi_\theta(r,\theta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \sin\theta & 1 \\ r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r\cos\theta\,\vec{i} - r\sin\theta\,\vec{j} + r\vec{k}$$

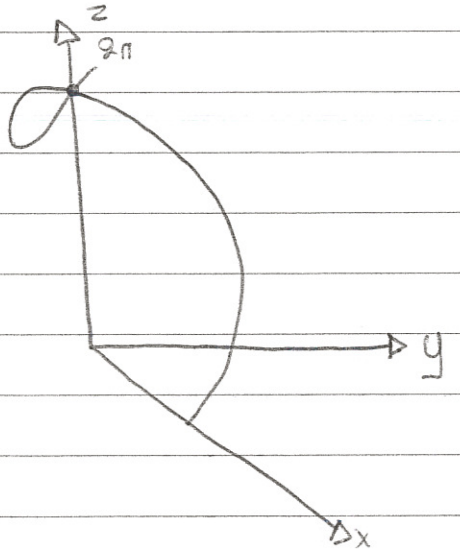
Οπότε $A(D) = \iint_D |\Phi_r \times \Phi_\theta|\, dr\, d\theta =$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\ d\theta \right) dr = \sqrt{2}\, 2\pi \int_0^1 r\, dr =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi$$

Παράδειγμα 2ο: Ένα ελικοειδές ορίζεται από την $\Phi : D \to R^3$ όπου $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = \theta$ όπου $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας

Λύση



$$\Phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\Phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$$

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ -r\sin\theta & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j} + r\vec{k}$$

$$|\Phi_r \times \Phi_\theta| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + r^2} = \sqrt{1+r^2}$$

Οπότε $A(D) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2}\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr$ ①

Άρα θέτουμε $r = \sinh u$ $\qquad 1 + r^2 = t^2 \Leftrightarrow t^2 - r^2 = 1$

$dr = \cosh u\, du$

Για $r = 0$: $\sinh u = 0 \Rightarrow \boxed{u = 0}$

Για $r = 1$: $\sinh u = 1 \Rightarrow \frac{e^b - e^{-b}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^b - e^{-b} = 2 \Leftrightarrow$

$e^b - \frac{1}{e^b} = 2 \Rightarrow (e^b)^2 - 2(e^b) - 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4(-1) = 4 + 4 = 0$

$e^b = 1 + \sqrt{2}$

$\quad\ \ 1 - \sqrt{2} < 0$ απορρίπτεται

Άρα $b = \ln(1+\sqrt{2})$

Οπότε η ① $\rightsquigarrow \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+(\sinh u)^2}\, \cosh u \, du =$

$= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{\cosh^2 u}\, \cosh u \, du =$

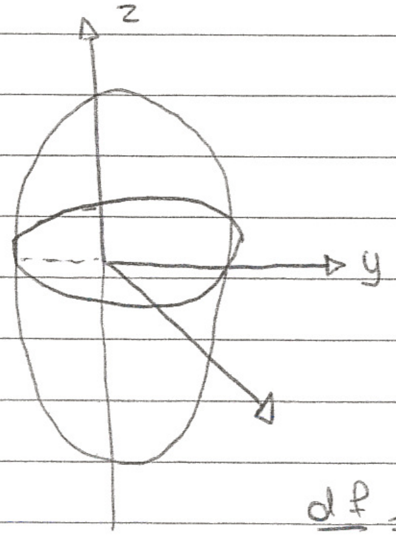
$= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} |\cosh u| \cdot \cosh u \, du =$

$= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh^2 u \, du =$

<u>Παράδειγμα 3ο</u>: Υπολογίστε το εμβαδό της επιφάνειας S που περιγράφεται από την εξίσωση:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

<u>Λύση</u> <u>1ος τρόπος</u>:



$(x,y) \in D$ $\quad f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$x^2+y^2 \leq 1$

$\Phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}(-2x) \Big/ \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{df}{dy} = \frac{-\frac{1}{2}(-2y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Άρα $\left|\Phi_x \times \Phi_y\right| = \sqrt{1+|\nabla f|^2}$ με $f_x^2 + f_y^2 = \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$

Άρα $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\, dx\,dy$ (γενικευμένο ολοκλήρωμα)

<u>β' τρόπος</u> :

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$x = \sin\phi\cos\theta$ $\quad \phi \in [0,\pi]$

$y = \sin\phi\sin\theta$ $\quad \theta \in [0,2\pi)$

$z = \cos\phi$

$$\Phi(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

$\Phi_\phi = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$

$\Phi_\theta = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$

$$\Phi_\phi \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$= \sin^2\phi\cos\theta\,\vec{i} + \sin^2\phi\sin\theta\,\vec{j} + (\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta + \sin\phi\cos\phi\sin^2\theta)\vec{k}$

$\left|\Phi_\phi \times \Phi_\theta\right| = \sqrt{\sin^4\phi\cos^2\theta + \sin^4\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi} = \sin\phi$

Άρα $A(S) = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\theta\right) d\phi = 2\pi\int_0^\pi \sin\phi\, d\phi =$

$= 4\pi$

25/10/16

Άσκηση

Να βρεθεί η καρτεσιανή μορφή των επιφανειών:

i) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = u^2$ $u, v \in \mathbb{R}$

ii) $x = u^2$, $y = u\sin e^v$, $z = \frac{1}{3}\cos e^v$, $u, v \in \mathbb{R}$

Λύση

i) $\Rightarrow$ $u = \frac{x}{2}$

$$y = u^2 + v \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + v \Rightarrow v = y - \frac{x^2}{4}$$

Οπότε $z = \left(y - \frac{x^2}{4}\right)^2$

Αν (x_0, y_0, z_0) σημείο της επιφάνειας $z_0 = \left(y_0 - \frac{x_0^2}{4}\right)$

Επιλέγω $u_0 = \frac{x_0}{2}$, $v_0 = y_0 - u_0^2 = y_0 - \frac{x_0^2}{4}$ Τότε είναι $z_0 = u_0^2$

ii) $y = u\sin e^v$, $3z = u\cos e^v$ $\Rightarrow$ $y^2 + (3z)^2 = u^2\sin^2 e^v + u^2\cos^2 e^v = u^2 = x$

$x = y^2 + 9z^2$ (ελλειπτικό παραβολοειδές)

Αν (x_0, y_0, z_0) τυχαίο σημείο της επιφάνειας

δηλ. $x_0 = y_0^2 + 9z_0^2 \Rightarrow u_0^2 = y_0^2 + 9z_0^2 \Rightarrow$

$u_0 = \pm\sqrt{u_0^2 + 9z_0^2}$ Αν $y_0 = z_0 = 0$ (τότε $x_0 = 0$) $\Rightarrow u_0 = 0$

α) Αν $u_0 = \sqrt{y_0^2 + 9z_0^2}$ τότε $(u_0, v_0) = (0, v_0)$ ικανοποιεί

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{y_0 + 9z_0^2}\,\sin e^{v_0} \\ 3z_0 &= \sqrt{y_0^2 + 9z_0^2}\,\cos e^{v_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Γενικά: $\cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$x-1 = \cosh u \Rightarrow x = 1+\cosh u$

$2(y-2) = \sinh u \Rightarrow y = 2+\frac{1}{2}\sinh u$

θέτω:

$x-1 = v\cdot\cosh u$

$2(y-2) = v\cosh u \quad v\in\mathbb{R}$

$z = v$

$(x-1)^2 = z^2 + 4(y-2)^2$

$z = \rho\cos\theta$

$2(y-2) = \rho\sin\theta$

$x-1 = \rho \quad \rho\in\mathbb{R}$ και $\theta\in[0,2\pi)$

Επιφανειακά ολοκληρώματα

α' είδος: $S = \{\Phi(u,v) \mid (u,v)\in D\}$

εμβαδό επιφάνειας: $A(S) = \iint_D dS = \iint_D \|\Phi_u\times\Phi_v\|\,du\,dv$

$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

Άρα: $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,\|\Phi_u\times\Phi_v\|\,du\,dv$

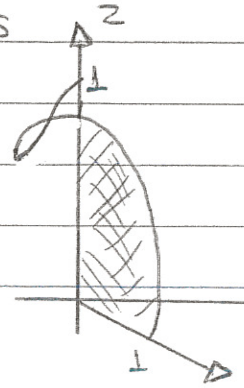
Άσκηση: Έστω το ελικοειδές $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z=\theta$

$0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi$

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$\iint_S f(x,y,z)\,dS$ όπου $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

Λύση



$\Phi_r \times \Phi_\theta = (\sin\theta,\ -\cos\theta,\ r)$

$\Phi_r = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$

$\Phi_\theta = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 1)$

27/10/16

Άσκηση: Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=2Rz$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου $x^2+y^2=3z^2$

Λύση

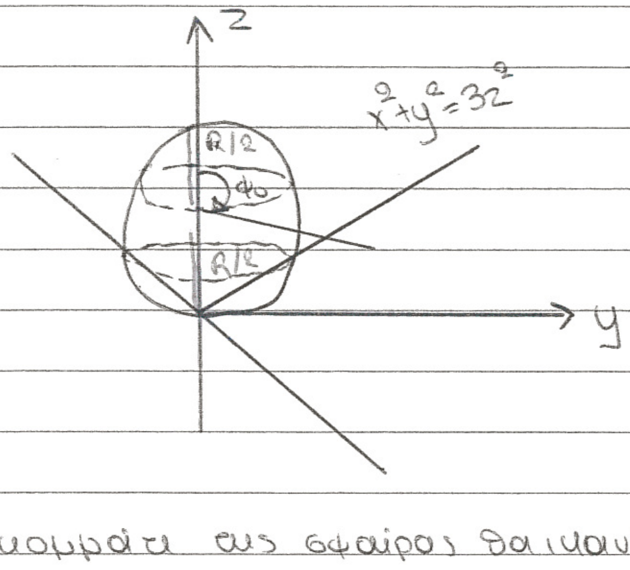
$$x^2+y^2+z^2+R^2-2Rz=R^2$$

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$$

Τέμνει του κώνο:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=3z^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+y^2=3z^2 \\ 4z^2=2Rz \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\frac{3}{4}R^2 \\ z=\frac{R}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=0 \\ x=y=0 \end{array}\right\}$$



Παραμέτριση της σφαίρας:

$x=R\sin\phi\cos\theta$

$y=R\sin\phi\sin\theta \quad 0\le\theta<2\pi$

$z-R=R\cos\phi \quad 0\le\phi\le\phi_0=\frac{2\pi}{3}$

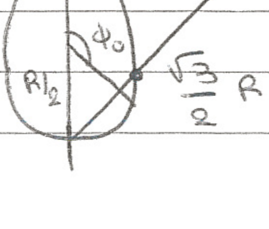
$$x^2+y^2=\frac{3}{4}R^2$$

Το κομμάτι της σφαίρας θα ικανοποιεί:

$x=R\sin\phi\ \ \theta \qquad 0\le\theta<2\pi$

$y=R\sin\phi\sin\theta \qquad 0\le\phi\le\phi_0$

$z=R+R\cos\phi$



$$x^2+y^2=\frac{3}{4}R^2$$

$$\tan\omega=\sqrt{3}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \phi_0=\frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

Οπότε το εμβαδό της επιφάνειας θα είναι: ①

$$A(S) = \iint_S |\Phi_\phi \times \Phi_\theta| \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi/3} \int_0^{2\pi} |\Phi_\phi \times \Phi_\theta| \, d\theta \, d\phi$$

$$\Phi(\phi, \theta) = (R\sin\phi\cos\theta, \ R\sin\phi\sin\theta, \ R\cos\phi + R)$$

$$\Phi_\phi(\phi,\theta) = (R\cos\phi\cos\theta, \ R\cos\phi\sin\theta, \ -R\sin\phi)$$

$$\Phi_\theta(\phi,\theta) = (-R\sin\phi\sin\theta, \ R\sin\phi\cos\theta, \ 0)$$

$$\Phi_\phi \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\phi\cos\theta & R\cos\phi\sin\theta & -R\sin\phi \\ -R\sin\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (R^2\sin^2\phi\cos\theta)\vec{i} + (R^2\sin^2\phi\sin\theta)\vec{j} + (R^2\sin\phi\cos\phi)\vec{k}$$

$$\|\Phi_\phi \times \Phi\| = R^2\sqrt{\sin^4\phi\cos^2\theta + \sin^4\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4\phi(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) + \sin^2\phi\cos^2\phi} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = R^2\sqrt{\sin^2\phi(\underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{1})} =$$

$$= R^2\sin\phi$$

Άρα η ① $\to$ $$\int_0^{2\pi/3}\left(\int_0^{2\pi} R^2\sin\phi \, d\theta\right)d\phi =$$

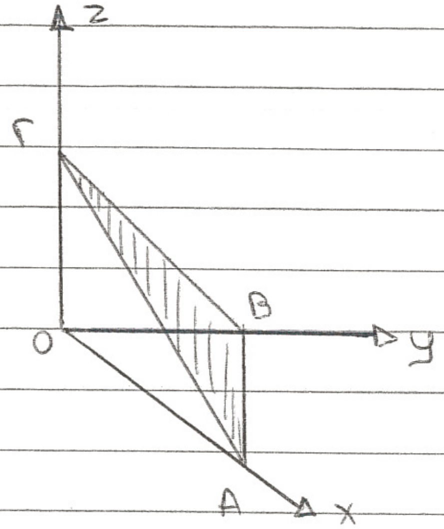
$$= 2\pi R^2\int_0^{2\pi/3}\sin\phi \, d\phi = 2\pi R^2\left[(-\cos\phi)\right]_0^{2\pi/3} =$$

$$= 2\pi R^2\left(-\cos\frac{2\pi}{3} + 1\right) = 3\pi R^2 \ \blacksquare$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S x\,ds$ (1) όπου S είναι η επιφάνεια που ορίζουν οι κορυφές $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $\Gamma(0,0,1)$

Λύση



Βρίσκουμε το εμβαδόν που ορίζουν τα σημεία:

$\vec{A\Gamma} = (0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1)$

$\vec{AB} = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$

$$\vec{AB} \times \vec{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)$$

Εξίσωση επιπέδου: $(1,1,1)(x-1,\ y-0,\ z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$$x - 1 + y + z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

$z = 1 - x - y$

Όλα τα σημεία $(x, y, 1-x-y)$ $\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x+y \le 1 \quad$ ή $\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le -x+1$

Άρα η (1) $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\iint_S x\,ds = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\sqrt{3}\,dy \right) dx =$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 x \int_0^{1-x} dy\,dx = \sqrt{3} \int_0^1 x \int_0^{1-x} dy\,dx =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

β' είδους: $\displaystyle\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} \qquad \iint_D \vec{F}(\Phi(u,v))\ \Phi_u \times \Phi_v\,du\,dv$

Άσκηση 3

Έστω $\vec{F} = \nabla f$ όπου $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και S είναι επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $x^2+y^2+z^2=r$ με θετικό προσανατολισμό προς τα έξω. Υπολογίστε το

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} \quad (1)$$

Λύση

Παραμετροποιούμε τη σφαίρα:

$x = \sin\phi\cos\theta \qquad 0 \le \phi < \pi$

$y = \sin\phi\sin\theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$

$z = \cos\phi$

Άρα $\Phi(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$

$\Phi_\phi(\phi,\theta) = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$

$\Phi_\theta(\phi,\theta) = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$

$$\Phi_\phi \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin^2\phi\cos\theta)\vec{i} + (\sin^2\phi\sin\theta)\vec{j} + (\sin\phi\cos\phi)\vec{k}$$

Άρα η (1) $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)\,\cdot$

$\cdot\,(\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)\,d\theta\,d\phi =$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (2\sin^3\phi\cos^2\theta + 2\sin^2\phi\sin^2\theta + 2\sin\phi\cos^2\phi)\,d\theta\,d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (2\sin^3\phi + 2\sin\phi\cos^2\phi)\,d\theta\,d\phi = 2\pi\int_0^{\pi} 2\sin\phi\,d\phi =$$

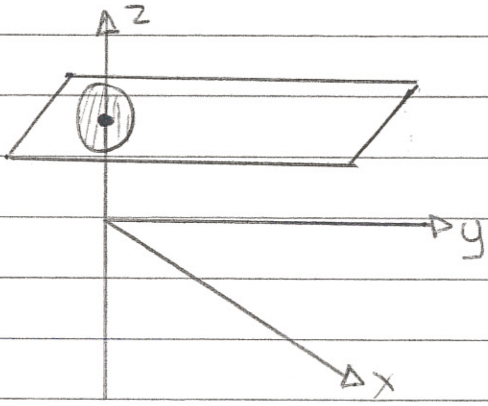
$$= 4\pi\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi = 4\pi\big[(-\cos\phi)\big]_0^{\pi} = 8\pi.$$

1/11/16

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\iint_S \vec{F}\, d\vec{S}$ (1) όπου S είναι η επιφάνεια $S=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 25,\ z=12\}$ με προσανατολισμό (του μοναδιαίου διανύσματος) να δείχνει προς τα κάτω (αρνητικό άξονα του z) είναι $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

Λύση



Κάθετο διάνυσμα $(0,0,-1)$

$x^2+y^2 \le 25 \iff 0 \le r \le 5$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 12)$

$\Phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\Phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

Άρα $\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$

$= \vec{i} \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$

$= \vec{k}\,(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) = \vec{k}\, r$

Οπότε η (1) $\rightsquigarrow \iint_S \vec{F}\, d\vec{S} = \int_0^5 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta, r\sin\theta, 12)(0,0,+r)\, d\theta\, dr =$

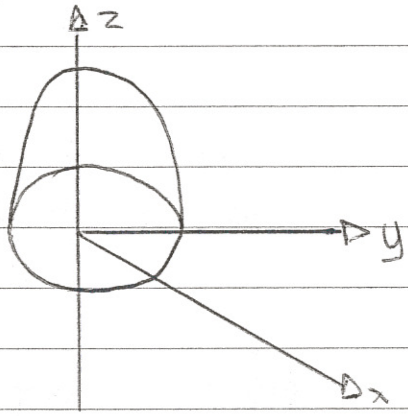
$= \int_0^5 \int_0^{2\pi} +12r\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^5 +12\, r\, dr =$

$= 2\pi \left[+6r^2\right]_0^5 = 2\pi(+6)25 = +12 \cdot 25\pi = +300\pi$

Άσκηση 2:

Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\iint \vec{F}\, d\vec{S}$ (1) όπου $\vec{F} = (x, y, 2z)$ και S είναι η επιφάνεια S του γραφήματος της συνάρτησης $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ με $x^2 + y^2 \leq 1$ και με θετικό προσανατολισμό.

Λύση



$$S = \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\Phi(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

$$\Phi_x(x,y) = (1, 0, -2x)$$
$$\Phi_y(x,y) = (0, 1, -2y)$$

Άρα $\Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + \vec{k} = (2x, 2y, 1)$

Άρα η (1) $\Rightarrow \iint_S \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, 2(1 - x^2 - y^2))(2x, 2y, 1)\, dx\, dy$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, 2 - 2x^2 - 2y^2)(2x, 2y, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\cancel{2x^2} + \cancel{2y^2} + 2 - \cancel{2x^2} - \cancel{2y^2})\, dx\, dy =$$

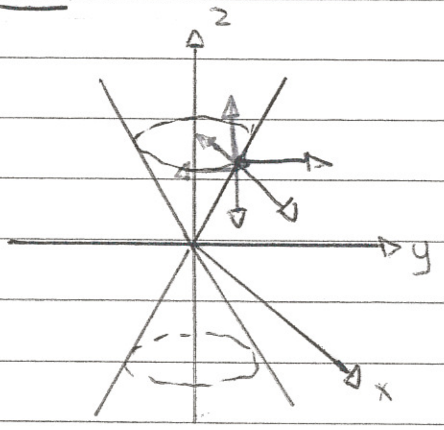
$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 2\, dx\, dy = 2\pi .$$

Άσκηση 3

Έστω S το μέρος του κώνου $z = x^2+y^2$ με $1 \le z \le 2$, προσανατολισμένο ώστε το κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς τα έξω του κώνου. Υπολογίστε τη ροή του Δ.Π.

$$\iint_S \vec{F}\, d\vec{S} \quad (1) \quad \text{όπου} \quad \vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

Λύση



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$

$z^2 = r^2 \Rightarrow z = r \Rightarrow 1 \le r \le 2$

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$

$\Phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$\Phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

Άρα $\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta\,\vec{i} + (-r\sin\theta)\vec{j} + r\vec{k} =$

$= (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)$

Άρα η (1) $\Rightarrow \iint_S \vec{F}\, d\vec{S} = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (r\cos\theta, r\sin\theta, r)(r\cos\theta, r\sin\theta, -r) \, d\theta \right) dr$

$= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - r^2 \right) d\theta\, dr =$

$= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(r^2 \overset{1}{\cancel{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}} - r^2 \right) \right) d\theta\, dr =$

$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (r^2 - r^2)\, d\theta\, dr = 0.$

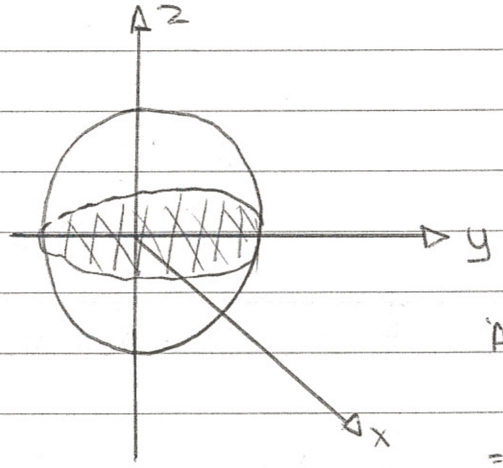
Άσκηση 4

Να υπολογιστεί η ροή του Δ.Π. $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$

$\iint_S \vec{F}\, d\vec{s}$ (1) όπου S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας μπάλας με προσανατολισμό προς τα έξω

$B_+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \geq 0\}$

Λύση



$S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1\}$

Άρα η (1) $\rightsquigarrow \iint_S \vec{F}\, d\vec{s} =$

$= \iint_{S_1} \vec{F}\, d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{F}\, d\vec{s}$ (2)

$S_1 = \{(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\}$ $0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/2$

$S_2 = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\}$ $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi$

Άρα $S_{1\phi} = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$

$S_{1\theta} = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$

$S_{1\phi} \times S_{1\theta} = (\sin^2\phi\cos\theta)\vec{i} + (\sin^2\phi\sin\theta)\vec{j} + (\sin\phi\cos\phi)\vec{k}$

Άρα $\iint_{S_1} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)\cdot$

$\cdot(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\, d\theta\, d\phi =$

$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\sin^3\phi\cos^2\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin\phi\cos^2\phi)\, d\theta\, d\phi =$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(\sin^3\phi \, (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) + \sin\phi \cos^2\phi \right) d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\sin^3\phi + \sin\phi \cos^2\phi) \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\phi \, (\underbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}_{1}) \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin\phi \, d\phi =$$

$$= 2\pi \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi/2} = 2\pi \left(-\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1} \right) = 2\pi(1) = 2\pi$$

Τώρα για την S_2 εργάζομαι παρόμοια:

$S_{2r} = \{ (\cos\theta, \sin\theta, 0) \}$

$S_{2\theta} = \{ (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \}$

$$S_{2r} \times S_{2\theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \cos\theta & \\ -r\sin\theta & \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\vec{k} = r\vec{k} = (0, 0, r)$$

$$\text{Άρα } \iint_{S_2} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0,0,r)(r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \, d\theta \, dr =$$

$= 0$

Άρα η ② $\rightarrow \iint_S \vec{F} \, d\vec{s} = 2\pi$.

3/11/16

Ορίζουμε 3 διαφορετικούς τελεστές

Κλίση βαθμωτής συνάρτησης

$f: \Omega \to R \qquad \Omega \subseteq R^3$ με f παράγωγο

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$$

Ονομάζεται grad $f(x,y,z)$

Απόκλιση διανυσματικού πεδίου $\vec{F}: \Omega \to R^3$

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Συμβολισμός: div $\vec{F}$

ή $$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{d}{dx} F_1(x,y,z) + \frac{d}{dy} F_2(x,y,z) + \frac{d}{dz} F_3(x,y,z)$$

Στροβιλισμός: διανυσματικού πεδίου $\vec{F}: \Omega \to R^3$

Συμβολισμός: curl $\vec{F}$

ή $$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{d}{dy} F_3 - \frac{d}{dz} F_2\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dz} F_1 - \frac{d}{dx} F_3\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dx} F_2 - \frac{d}{dy} F_1\right)\vec{k}$$

Απλά παραδείγματα

1. Έστω $f: R^3 \to R$ με $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xyz$

τότε $$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) =$$

$$= (2x + yz, 3y^2 + xz, xy)$$

② Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y,\ z,\ xyz)$, τότε $\nabla \times \vec{F} = ?$

<u>Λύση</u>

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ x^2y & z & xyz \end{vmatrix} = \left(\frac{d}{dy}(xyz) - \frac{d}{dz}(z)\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{d}{dx}(xyz) - \frac{d}{dz}(x^2y)\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dx}z - \frac{d}{dy}(x^2y)\right)\vec{k} =$$

$$= (xz-1)\vec{i} - (yz)\vec{j} - (x^2)\vec{k} = (xz-1,\ -yz,\ -x^2)$$

<u>Ιδιότητα 1η</u>: Οι τελεστές ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ είναι γραμμικοί τελεστές.

Για παράδειγμα: α) $f, g : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ f παρ/μη τότε $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

β) Αν $\vec{F}, \vec{G} : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ διανυσματικά πεδία με $\vec{F}, \vec{G}$ παραγωγίσιμα Δ.Π. τότε:

$\nabla\cdot(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda\nabla\cdot\vec{F} + \mu\nabla\cdot\vec{G}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

γ) $\nabla\times(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda\nabla\times\vec{F} + \mu\nabla\times\vec{G}$

Απόδειξη: (β): Έστω $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$

$\nabla\cdot(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \nabla\cdot(\lambda(F_1, F_2, F_3) + \mu(G_1, G_2, G_3)) =$

$= (\lambda F_1 + \mu G_1,\ \lambda F_2 + \mu G_2,\ \lambda F_3 + \mu G_3) =$

$$= \frac{d}{dx}(\lambda F_1 + \mu G_1) + \frac{d}{dy}(\lambda F_2 + \mu G_2) + \frac{d}{dz}(\lambda F_3 + \mu G_3) =$$

$$= \lambda\frac{d}{dx}F_1 + \mu\frac{d}{dx}G_1 + \lambda\frac{d}{dy}F_2 + \mu\frac{d}{dy}G_2 + \lambda\frac{d}{dz}F_3 + \mu\frac{d}{dz}G_3 =$$

$$= \lambda\left(\frac{d}{dx}F_1 + \frac{d}{dy}F_2 + \frac{d}{dz}F_3\right) + \mu\left(\frac{d}{dx}G_1 + \frac{d}{dy}G_2 + \frac{d}{dz}G_3\right) =$$

$$= \lambda \nabla \cdot \vec{F} + \mu \nabla \cdot \vec{G} \quad \blacksquare$$

δυο φορές παραγ/μη

<u>Ιδιότητα 2η</u>: Έστω $f: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f \in C^2(\Omega)$.

Τότε ισχύει:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla \cdot f(x,y,z)) = \vec{0}$$

Απόδειξη: $\nabla \times (\nabla \cdot f) = \nabla \times \left(\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)\right) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ df/dx & df/dy & df/dz \end{vmatrix} = \left(\frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dz}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dy}\right)\right)\vec{i}$$

$$- \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dz}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{d^2 f}{dy\,dz} - \frac{d^2 f}{dz\,dy}\right)\vec{i} - \left(\frac{d^2 f}{dx\,dz} - \frac{d^2 f}{dz\,dx}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy} - \frac{d^2 f}{dy\,dx}\right)\vec{k} = \vec{0} \quad \blacksquare$$

<u>Ιδιότητα 3η</u>: Έστω $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\vec{F} \in (C^2(\Omega))^3$

Τότε: $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F}) = 0$ δηλ. $\nabla(\nabla \times \vec{F}) = 0$

Απόδειξη: Έστω $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

ώστε $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz}\right)\vec{i}$

$$- \left(\frac{dF_3}{dx} - \frac{dF_1}{dz}\right)\vec{j} + \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right)\vec{k}$$

Οπότε $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz}\right) -$

$- \frac{d}{dy}\left(\frac{dF_3}{dx} - \frac{dF_2}{dz}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) =$

$= \frac{d^2F_3}{dxdy} - \frac{d^2F_2}{dxdz} - \frac{d^2F_3}{dydx} + \frac{d^2F_1}{dydz} + \frac{d^2F_2}{dzdx} - \frac{d^2F_3}{dzdy} =$

$= \left(\frac{d^2F_3}{dxdy} - \frac{d^2F_3}{dydx}\right) + \left(\frac{d^2F_2}{dzdx} - \frac{d^2F_2}{dxdz}\right) + \left(\frac{d^2F_1}{dydz} - \frac{d^2F_1}{dzdy}\right) =$

$= 0$ ■

Ιδιότητα 4η: Αν f, g παραγωγίσιμες $\Omega \to \mathbb{R}$ τότε

α) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

β) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g}\nabla f - \frac{f}{g^2}\nabla g$

γ) $\vec{F}$ παραγωγίσιμο Δ.Π.

$\nabla \cdot (f\vec{F}) = \nabla f \vec{F} + f \nabla \vec{F}$

δ) $\nabla \times (f\vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F})$

ε) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla^2 \vec{F} + \nabla(\nabla \cdot \vec{F})$

Άσκηση: Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (2xye^z, x^2e^z, x^2e^z + z^2)$

α) Υπολογίστε $\nabla \cdot \vec{F}$, $\nabla \times \vec{F}$

β) Βρείτε βαθμωτή συνάρτηση f τ.ω. $\vec{F} = \nabla f$

Λύση

α) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{d}{dx}(2xye^z) + \frac{d}{dy}(x^2e^z) + \frac{d}{dz}(x^2ye^z + z^2) =$

$= 2ye^z + x^2ye^z + 2z$

$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ (μετά από πράξεις)

β| Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η ζητούμενη βαθμωτή συνάρτηση.
Θα έπρεπε $\nabla f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$
Οπότε $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2xye^z, x^2e^z, x^2ye^z + z^2)$

Και επομένως προκύπτει το σύστημα:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xye^z$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2e^z$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2ye^z + z^2$

ΘΜΤ
Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ με
f: παραγωγίσιμη τότε
$\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω.
$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xye^z = \frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^z) \Rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y,z) - x^2ye^z) = 0 \Rightarrow \exists\, g = g(y,z)$ τ.ω.
$f(x,y,z) - x^2ye^z = g(y,z)$

Άρα $f(x,y,z) = x^2ye^z + g(y,z)$

Και επειδή $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2e^z \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2ye^z + g(y,z)\right) =$

$= x^2e^z \Leftrightarrow \cancel{x^2e^z} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \cancel{x^2e^z} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow$

$\exists\, h = h(z)$ και $g(y,z) = h(z)$
Οπότε $f(x,y,z) = x^2ye^z + h(z)$
Όμως $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2ye^z + z^2 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2ye^z + h(z)\right) =$

$= z^2 + x^2ye^z \Rightarrow$

$h'(z) = z^2 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $h(z) = \frac{z^3}{3} + c$

Οπότε τελικά $f(x,y,z) = x^2 y e^z + \frac{z^3}{3} + c$

Μαρία Κοτρώτσιου

$h'(z) = z^2 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $h(z) = \frac{z^3}{3} + c$

Οπότε τελικά $f(x,y,z) = x^2 y e^z + \frac{z^3}{3} + c$

8/11/16

Άσκηση 1

Έστω $\vec{F}, \vec{G}$ $\mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\vec{F}, \vec{G} \in C^1(\mathbb{R}^4)$

Αποδείξτε ότι:

α) $\frac{d}{dt}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{F}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\frac{d}{dt}\vec{G}\right)$

β) $\frac{d}{dt}(\vec{F}\times\vec{G}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{F}\right)\times\vec{G} + \vec{F}\times\left(\frac{d}{dt}\vec{G}\right)$

γ) Αν $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ τότε $\frac{d}{dt}\left(\nabla(fg)\right) = \nabla\left(\frac{d}{dt}(fg)\right)$

Λύση

β) $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$

$\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$

$$\vec{F}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ G_1 & G_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}$$

$$= (f_2G_3 - f_3G_2)\vec{i} - (f_1G_3 - G_1f_3)\vec{j} + (f_1G_2 - f_2G_1)\vec{k}$$

Κάθε συνιστώσα του Δ.Π. $|\vec{F}\times\vec{G}|$ είναι παραγωγίσιμη γιατί κάθε συνιστώσα είναι $n\times 1$ η $f_2G_3 - f_3G_2$ είναι παραγωγίσιμη μιας και f_2, f_3, G_2, G_3 είναι παραγωγίσιμες οπότε τα γινόμενα f_2G_3, f_3G_2 είναι παραγωγίσιμα, άρα και η διαφορά είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

$$\frac{d}{dt}\vec{F}\times\vec{G} = \frac{d}{dt}(f_2G_3 - f_3G_2)\vec{i} - \frac{d}{dt}(f_1G_3 - f_3G_1)\vec{j} + \frac{d}{dt}(f_1G_2 - f_2G_1)\vec{k}$$

Άσκηση 3: Έστω $\vec{F}: R^{4} \to R^{3}$ 2 φορές παραγωγίσιμη.

Ν.δ.ο. $\frac{d}{dt}\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) = \vec{F}(t) \times \left(\frac{d^2\vec{F}(t)}{dt^2}\right)$

Απόδειξη:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{F}(t) \times \left(\frac{d}{dt}\vec{F}(t)\right)\right) = \left(\frac{d}{dt}\vec{F}(t)\right) \times \left(\frac{d}{dt}\vec{F}(t)\right) +$$

$$+ \vec{F}(t) \times \frac{d^2}{dt^2}\vec{F}(t) \quad \blacksquare$$

Άσκηση 4:

Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (xyz)^{m}(x^{\kappa}\vec{i} + y^{\kappa}\vec{j} + z^{\kappa}\vec{k})$

$\vec{F}: R^3_+ \to R^3$

$(0,+\infty)^3$

Αν $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0}$ $\forall x,y,z \in (0,+\infty)$ αποδείξτε ότι είτε $m=0$ είτε $\kappa=-1$

Απόδειξη:

$\vec{F} = ((x^{m}, y^{m}, z^{m})\cdot x^{\kappa}, (x^{m}, y^{m}, z^{m})y^{\kappa}, (x^{m}, y^{m}, z^{m})z^{\kappa})$

οπότε $\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ x^{\kappa+m}y^{m}z^{m} & x^{m}y^{\kappa+m}z^{m} & x^{m}y^{m}z^{\kappa+m} \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{d}{dy}(x^{m}y^{m}z^{\kappa+m}) - \frac{d}{dz}(x^{m}y^{m+\kappa}z^{m})\right)\vec{i}$$

$$- \left(\frac{d}{dx}(x^{m}y^{m}z^{m+\kappa}) - \frac{d}{dz}(x^{m+\kappa}y^{m}z^{m})\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{d}{dx}(x^{m}y^{m+\kappa}z^{\kappa}) - \frac{d}{dy}(x^{m+\kappa}y^{m}z^{m})\right)\vec{k} =$$

$= (m x^{m} y^{m+n} - m x^{m} y^{m+n} z^{m-1}, m x^{m+n} y^{m} z^{m-1} - m x^{m-1} y^{m} z^{m+n}, m x^{m-1} y^{m+n} z^{m} - m x^{m+n} y^{m-1} z^{m}) =$

$= m x^{m-1} y^{m-1} z^{m-1} (x z^{n+1} - x y^{n+1}, x^{n+1} y - y z^{n+1}, y^{n+1} z - x^{n+1} z)$

Επειδή $\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^{m-1} y^{m-1} z^{m-1} x (z^{n+1} - y^{n+1}) = 0 \\ x^{m-1} y^{m-1} z^{m-1} y (x^{n+1} - z^{n+1}) = 0 \\ x^{m-1} y^{m-1} z^{m-1} z (y^{n+1} - x^{n+1}) = 0 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow$ διότι $m \neq 0$

$z^{n+1} = y^{n+1}$

$x^{n+1} = z^{n+1}$ $\quad \forall x, y, z$

$y^{n+1} = x^{n+1}$

Αν $n+1 = 0 \Rightarrow n = -1$ ου. ✓

Αν $n+1 \neq 0 \Rightarrow x = y = z$ ■

↑ απορρίπτεται

Άσκηση

Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες τότε $\nabla f(x,y) = \nabla g(x,y)$ αποδείξτε ότι α) $\exists c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x,y) = g(x,y) + c$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

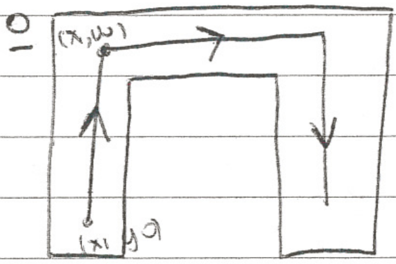
$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

β) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και Ω ανοικτό συνεκτικό και $\nabla f = \nabla g$ τότε $\exists c \in \mathbb{R}$: $f(x,y) = g(x,y) + c$ $\forall x, y \in \Omega$

Συνεκτικό χωρίο: Κάθε 2 σημεία ενώνονται με συνεχή καμπύλη μέσα από το χωρίο.

γ) Έστω f, g $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο Ω ώστε $\nabla f = \nabla g$ ανοικτό συνεκτικό υ.δ.ο. $\exists c \in \mathbb{R}$: $f(x,y,z) = g(x,y,z) + c$ $\forall (x,y,z) \in \Omega$

Λύση $\quad \nabla(\underset{\overset{\|}{F}}{f-g}) = 0$



$\nabla F(x,y) = (0,0)$

$\frac{df}{dx}(x,y) = 0$ και $\frac{df}{dy}(x,y) = 0 \quad \forall x,y \in \Omega$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \ \forall x,y \in R \overset{?}{\Rightarrow} \exists c \in R : F(x,y) = c \ \forall x,y \in R$

Έστω $\vec{\sigma} : [0,1] \to R^2$ καμπύλη που ενώνει το $\vec{\sigma}(0) = (x,y)$ με το $\vec{\sigma}(1) = (x_0,y_0) \in \Omega$

Ορίζω την $Q(t) = F(\vec{\sigma}(t)) \quad t \in [0,1]$

$Q'(t) = \nabla F(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}'(t) = 0$

$Q : [0,1] \to R$

$Q'(t) = 0 \quad t \in [0,1] \to Q(1) = Q(0)$

$F(x_0,y_0) = F(x,y)$

$F(x,\omega) - F(x,y) = (\omega - y)\frac{dF}{dy}(x,\xi) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

Άσκηση 10/11/16

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = (y,\ z\cos(yz)+x,\ y\cos(yz))$

Αποδείξτε ότι $\nabla \times \vec{F} = 0$ (αστρόβιλο πεδίο) και βρείτε βαθμωτή συνάρτηση $f : R^3 \to R$ ώστε $\vec{F} = \nabla f$

Λύση

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ y & z\cos(yz)+x & y\cos(yz) \end{vmatrix} = \left(\frac{d}{dy}(y\cos(yz)) - \frac{d}{dz}(z\cos(yz)+x)\right)\vec{i}$$

$$-\frac{d}{dx}(y\cos(yz))\vec{j} + \left(\frac{d}{dx}(z\cos(yz)+x) - \frac{d}{dy}y\right)\vec{k} =$$

$= (\cos(yz) - yz\,\sin(yz) - \cos(yz) + yz\,\sin(yz))\vec{i} + 0\vec{j} +$
$+ (1-1)\vec{k} = (0,0,0)$

Έστω f η βαθμωτή συνάρτηση, τότε θα έπρεπε:
$\nabla f(x,y,z) = (y,\ z\cos(yz)+x,\ y\cos(yz))$

$\frac{d}{dx} f(x,y,z) = y$, $\frac{d}{dy} f(x,y,z) = z\cos(yz)+x$,
$\frac{d}{dx} f(x,y,z) = y\cos(yz)$

$\frac{d}{dx} f(x,y,z) = y = \frac{d}{dx}(x,y) \Rightarrow \frac{d}{dx}(f(x,y,z) - xy) = 0 \Rightarrow$
$\exists\ g = g(y,z)$ ώστε $f(x,y,z) - xy = g(y,z) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x,y,z) = xy + g(y,z)$

Όμως $\frac{d}{dy} f(x,y,z) = z\cos(yz)+x \Leftrightarrow \frac{d}{dy}(xy + g(y,z)) = z\cos(yz)+x$
$x + \frac{d}{dy} g(y,z) = z\cos(yz)+x \Leftrightarrow \frac{d}{dy} g(y,z) = z\cos(yz) = \frac{d}{dy}(\sin(yz))$
$\Leftrightarrow \frac{d}{dy}(g(y,z) - \sin(yz)) = 0 \Rightarrow \exists\ h = h(z)$ ώστε $g(y,z) - \sin(yz) = h(z)$
$\Rightarrow g(y,z) = \sin(yz) + h(z)$
Οπότε $f(x,y,z) = xy + \sin(yz) + h(z)$
Επομένως $\frac{d}{dz}(xy + \sin(yz) + h(z)) = y\cos(yz) \Leftrightarrow$

$\cancel{y\cos(yz)} + h'(z) = \cancel{y\cos(yz)} \Leftrightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$:
$h(z) = h(0) =$ σταθερή $= c \quad \forall z \in \mathbb{R}$.

$\frac{d f(x,y,z)}{dx} = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = f(0,y,z)$

Οπότε τελικά $f(x,y,z) = xy + \sin(yz) + c$

Θεώρημα: Έστω $\vec{F}: R^3 \to R^3$ αστρόβιλο $(C^1(R^3))^3$ πεδίο
Τότε υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $f: R^3 \to R$ με $f \in C^1(R^3)$ τ.ω. $\nabla f = \vec{F}$

Απόδειξη: έστω $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ θα βρούμε βαθμωτή συνάρτηση $f: R^3 \to R$ ώστε:

$$\frac{df(x,y,t)}{dx} = F_1(x,y,z)$$

$$\frac{df(x,y,t)}{dy} = F_2(x,y,z)$$

$$\frac{df}{dz}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$$

$$\frac{d}{dt} f(x,y,z) = F_1(x,y,z) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x F_1(t,y,z)\,dt\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x,y,z) - \int_0^x F_1(t,y,z)\,dt\right] = 0 \Rightarrow$$

$$f(x,y,z) - \int_0^x F_1(t,y,z)\,dt = g(y,z) \Rightarrow$$

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,y,z)\,dt + g(y,z) + f(0,y,z)$$

επειδή $\frac{d}{dy}\left[\int_0^x F_1(t,y,z)dt + f(0,y,z)\right] = F_2(x,y,z)$

$$\frac{df}{dy}(x,y,z) = F_2(x,y,z) \Rightarrow \frac{d}{dy} f(0,y,z) = F_2(0,y,z)$$

$$\frac{d}{dy} f(x,y,z) = F_2(x,y,z) \quad , x=0$$

$$\frac{df(0,y,z)}{dy} = F_2(0,y,z) = \frac{d}{dy}\left[\int_0^y F_2(0,t,z)\,dt\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dy}\left[f(0,y,z) - \int_0^y F_2(0,t,z)\,dt\right] = 0$$

$$f(0,y,z) - \int_0^y F_2(0,t,z)\,dt = f(0,0,z) - \int_0^0 \cancel{F_2(0,t,t)\,dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0,y,z) = f(0,0,z) + \int_0^y F_2(0,t,z)\,dt \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} f(x,y,z) = F_3(x,y,z) \overset{x=0}{\underset{y=0}{\Rightarrow}} \frac{d}{dz} f(0,0,z) = F_3(0,0,z) =$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\int_0^z F_3(0,0,t)\,dt\right) \Rightarrow \frac{d}{dz}\left(f(0,0,z) - \int_0^z F_3(0,0,t)\,dt\right) = 0$$

$$\Rightarrow f(0,0,z) - \int_0^z F_3(0,0,t)\,dt = f(0,0,0) = 0$$

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,y,z)\,dt + \int_0^y F_2(0,t,z)\,dt + \int_0^z F_3(0,0,t)\,dt$$

θα υποθέσουμε ότι η f πληροί τις υποθέσεις :

$$\Rightarrow \frac{df}{dx}(x,y,z) = F_1(x,y,z)$$

$$\frac{df}{dy}(x,y,z) = \underbrace{\int_0^x \frac{d}{dy} F_1(t,y,z)\,dt + F_2(0,y,z)}_{\substack{\| \\ F_2(x,y,z)}}$$

όμως το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{dF_2}{dy} = \dfrac{dF_2}{dz} \\ \dfrac{dF_3}{dx} = \dfrac{dF_1}{dz} \\ \dfrac{dF_2}{dx} = \dfrac{dF_1}{dy} \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

Θεώρημα: Αν $\vec{F}$ διανυσματικό πεδίο ώστε $\nabla \vec{F} = 0$ τότε:
$\exists\, \vec{G}$ τ.ω. $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$.

15/11/16

Συνεκτικά χωρία

Απλά συνεκτικά

Θεώρημα: Αν $\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \exists f$ βαθμωτή τ.ω. $\vec{F} = \nabla f$

Θεώρημα: $\nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \exists \vec{G}$ τ.ω. $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$

Άσκηση: Έστω το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = (xy, -\frac{1}{2}y^2, y)$

Αποδείξτε ότι: α) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

β) Βρείτε ένα Δ.Π. $\vec{G}$ ώστε $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$

Απόδειξη: α) $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{d}{dx}(xy) + \dfrac{d}{dy}(-1/2\, y^2) + \dfrac{d}{dz}(y)$

$div(\vec{F}) = y - y + 0 = 0$

β) Έστω $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ ένα διανυσματικό πεδίο τ.ω. $\nabla \times \vec{G} = \vec{F} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = (xy, -\frac{1}{2}y^2, y)$$

Επομένως $\left(\dfrac{d}{dy}G_3 - \dfrac{d}{dz}G_2, \dfrac{d}{dz}G_1 - \dfrac{d}{dx}G_3, \dfrac{d}{dx}G_2 - \dfrac{d}{dy}G_1\right) = \left(xy, -\frac{1}{2}y^2, y\right)$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dy}G_3 - \dfrac{d}{dz}G_2 = xy$

$\dfrac{d}{dz}G_1 - \dfrac{d}{dx}G_3 = -\frac{1}{2}y^2$

$\dfrac{d}{dx}G_2 - \dfrac{d}{dy}G_1 = y$

Επιλέγω αυθαίρετα $G_3=0$

$$-\frac{d}{dz}G_2(x,y,z)=xy \Leftrightarrow \frac{d}{dz}G_2(x,y,z)=-xy \overset{(1)}{=} \frac{d}{dz}(-xyz)$$

$$\frac{d}{dz}G_1(x,y,z)=-\frac{1}{2}y^2 \quad (2)$$

$$H\ (1) \rightsquigarrow \frac{d}{dz}\left(G_2(x,y,z)+xyz\right)=0 \Rightarrow G_2(x,y,z)+xyz=g_2(x,y)$$

$$\Rightarrow G_2(x,y,z)=-xyz+g_2(x,y)$$

$$H\ (2) \rightsquigarrow \frac{d}{dz}G_1(x,y,z)=\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{2}y^2z\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left(G_1(x,y,z)+\frac{1}{2}y^2z\right)=0$$

$$\Rightarrow \exists\, g_1=g_1(x,y) \overset{\text{ωστε}}{\Rightarrow} G_1(x,y,z)+\frac{1}{2}y^2z=g_1(x,y)$$

Άρα $G_1(x,y,z)=-\frac{1}{2}y^2z+g_1(x,y)$

Οπότε η τρίτη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d}{dx}\left(-xyz+g_2(x,y)\right)-\frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{2}y^2z+g_1(x,y)\right)=y$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-yz}+\frac{d}{dx}g_2(x,y)\cancel{+yz}-\frac{d}{dy}g_1(x,y)=y$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}g_2(x,y)-\frac{d}{dy}g_1(x,y)=y$$

Επιλέγω $g_1=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}g_2(x,y)=y=\frac{d}{dx}(xy)$

$$\frac{d}{dx}\left(g_2(x,y)-xy\right)=0 \Rightarrow \exists\, h=h(y)$$

ώστε $g_2(x,y)-xy=h(y)$

$\Rightarrow g_2(x,y)=xy+h(y)$

οποιαδήποτε αρκεί να είναι παραγωγίσιμη

Άρα $\vec{G}=\left(-\frac{1}{2}y^2z,\ -xyz+xy+h(y),\ 0\right)$

Θεώρημα Green: Έστω D απλά συνεκτικό χωρίο ($D \subseteq R^3$) και $\vec{F} = (P, Q)$, C^1 διανυσματικό πεδίο. Τότε ισχύει:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_{\partial D} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] \quad (1)$$

∂D: σύνορο του χωρίου D

$\vec{\sigma} : [0,1] \to R^2$

$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$

με $P, Q : D \to R$

$\vec{F} : D \to R^2$

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \quad \forall x,y \in D$

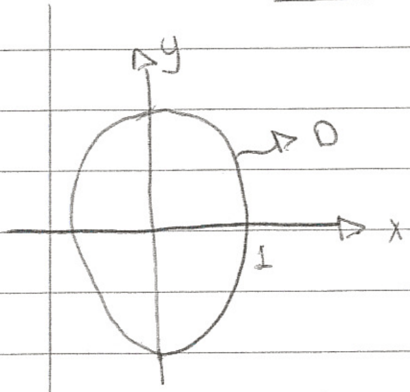
$$\int_0^1 P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t)\, y(t))\, y'(t)\, dt$$

Άρα η (1) $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\partial D} \vec{F} \, d\vec{s} = \iint_D \left[\frac{d}{dx} Q(x,y) - \frac{d}{dy} P(x,y) \right] dx\,dy$

Πρόβλημα: Έστω D ο μοναδιαίος δίσκος του R^2. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$\oint (e^{x^{2016}} - y^2)\,dx + (e^{-y^3} + xy)\,dy$ όπου ο προσανατολισμός είναι ο θετικός

Λύση



Το χωρίο είναι απλά συνεκτικό και το θ. Green είναι:

$$\iint_{\partial D} [(e^{x^{2016}} - y^2)dx + (e^{-y^3} + xy)dy] =$$

$$= \iint_D \left[\frac{d}{dx} \overbrace{(e^{-y^3} + xy)}^{Q} - \frac{d}{dy} \overbrace{(e^{x^{2016}} - y^2)}^{P} \right] =$$

$$= \iint_D [y + 2y]\, dx\,dy = 3 \iint_D y\, dx\,dy$$

Αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες

θέτω $x = r\cos\theta$ $\quad 0 \le r \le 1$

$y = r\sin\theta$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

Ιακωβιανή $= r$

Άρα $3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sin\theta \, d\theta \, dr = 3\int_0^1 r\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi} dr =$

$= 3\int_0^1 r\left[-\cos 2\pi + \cos 0\right] dr = 3\int_0^1 r(-1+1)\, dr =$

$= 3\int_0^1 r \cdot 0 \, dr = 0.$

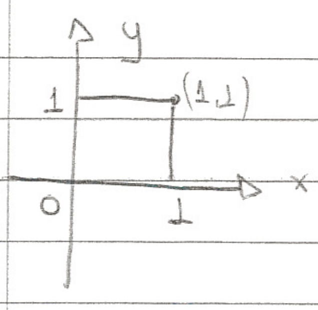
<u>Άσκηση</u>: Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο $\int_{\partial D} [(5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy]$ ① όπου D είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ με θετικό προσανατολισμό

<u>Λύση</u>

Η ① από Green $\rightsquigarrow$ $\iint_D \left[\frac{d}{dx}\left(-(2xy - x^2)\right) - \frac{d}{dy}(5 - xy - y^2)\right] dx\,dy$

$= \iint_D \left[-2y + 2x - (x - 2y)\right] dx\,dy = \iint_D \left[\cancel{-2y} + 2x + x + \cancel{2y}\right] dx\,dy$

$= \iint_D 3x \, dx\,dy = 3\int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy =$



$= 3\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy =$

$= \frac{3}{2}\int_0^1 dy = \frac{3}{2}\left[y\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

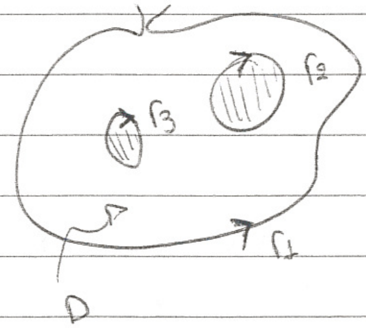
<u>Άσκηση</u>: Αν D είναι απλά συνεκτικό χωρίο, τότε το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2}\oint_{\partial D} [x\,dy - y\,dx]$ είναι το εμβαδό του χωρίου D.

<u>Λύση</u>

Επιλέγουμε $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ και $Q(x,y) = \frac{x}{2}$. Οπότε το Θ. Green μας δίνει $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy =$

$= \iint_D \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] dx\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy =$ εμβαδόν χωρίου

Γενικό θεώρημα Green



$$\iint_D \left[\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right] dx\,dy = \oint (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_3} P\,dx + Q\,dy$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο $\int_{\ell} (P\,dx + Q\,dy)$ όπου $P(x,y) = xe^{-y^2}$ και $Q(x,y) = -x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$ και ℓ είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$

24/11/16

Θ. Green

$$\iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dxdy = \int_{dD} (P dx + Q dy)$$

Δικ: $\iint_D \frac{dQ}{dx} dxdy = \int_{dD} Q dy = \int_{dD} Q V_x ds$

$$\iint_D \frac{dP}{dy} dxdy = \int_{dD} -P dx = \int_{dD} P V_y ds$$

Θ. απόκλισης

Έστω $\vec{F} : D \to R^2$, $\vec{F} \in C^1(D)$

Τότε $\iint_D \nabla \cdot \vec{F} \, dxdy = \int_{dD} \vec{F} \, V ds$

Ολοκληρώνω κατά μέρη ως 2 μεταβλητές

$$\iint_D \frac{df(x,y)}{dx} g(x,y) dxdy = -\iint_D f \frac{d}{dx} g(x,y) dxdy + \int_{dD} fg \, dx \, ds$$

Αντίστοιχα $\iint_D \frac{df}{dy} g \, dxdy = -\iint_D f \frac{dg}{dy} dxdy + \int_{dD} fg V_y ds$

$$\iint_D \frac{d}{dx}(fg) dx dy = \int_{dD} fg V_x ds = \int_{dD} fg \, dy$$

$$\| $$

$$\left.\begin{array}{l} \iint_D \left(\frac{df}{dx} g + f \frac{d}{dx} g\right) dxdy \\ \qquad \| \\ \iint_D \left(\frac{df}{dx} g + \iint f \frac{dg}{dx}\right) dxdy \end{array}\right\} \Rightarrow$$

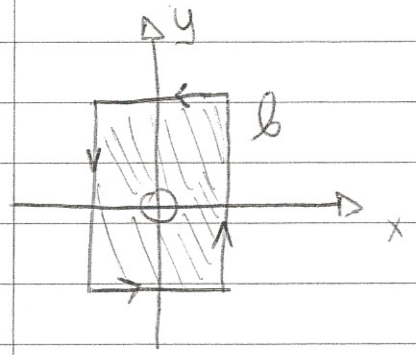
$$\Rightarrow \iint_D \frac{df}{dx} g \, dxdy = -\iint_D f \frac{dg}{dx} dxdy + \int_{dD} fg V_x ds$$

Άσκηση: Να υπολογιστεί $\int_{b} (P\,dx + Q\,dy)$ όπου:

$P = xe^{-y^2}$ και $Q = -x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$ και b είναι το

σύνορο του τετραγώνου $[-1,1] \times [-1,1]$ με θετικό προσανατολισμό.

Λύση



$B_\rho \quad 0<\rho<1$

$D_\rho = [-1,1] \times [-1,1] - B_\rho$

Το θ Green δίνει:

$$\int_{\partial D_\rho} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{D_\rho} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dx\,dy \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = -2xye^{-y^2} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} - \left(xe^{-y^2} \frac{d}{dy}(-y^2) \right) =$$

$$= -\cancel{2xye^{-y^2}} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + \cancel{2xye^{-y^2}} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Άρα: $\iint_{D_\rho} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dx\,dy = -2 \iint_{D_\rho} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx\,dy = 0$

Η (1) $\to \int_{b} (P\,dx + Q\,dx) + \int_{b_2} (P\,dx + Q\,dx) = 0$

οπότε $\int_{c_2} (P\,dx + Q\,dy) = -\int_0^{2\pi} \Big[(\rho\cos\theta\, e^{-\rho^2 \sin\theta}) (-\rho\sin\theta)\, d\theta$

$+ \left(-\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta\, e^{-\rho^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{\rho^2} \right) \rho\cos\theta\, d\theta =$

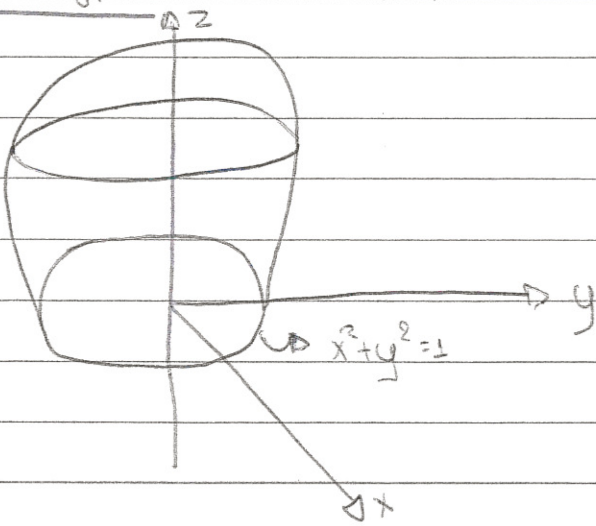
$= -\int_0^{2\pi} \Big[-\rho^2 \cos\theta \sin\theta\, e^{-\rho^2 \sin^2\theta} - \rho^4 \cos^3\theta \sin\theta\, e^{-\rho^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{\rho} \cos\theta \Big] d\theta$

$$= \rho^2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, e^{-\rho^2 \sin\theta} \, d\theta + \rho^4 \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta \sin\theta \, e^{-\rho^2 \sin^2\theta}}_{= f(\theta)} + \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{= 0}$$

<u>Άσκηση</u>: έστω $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(-x) = f(x)$ με $x \in [-\pi, \pi] \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$.

<u>Θεώρημα stokes</u>: έστω $\vec{F}: S (\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F} \in C^1$ <u>τότε</u> $\int_{\partial S} \vec{F} \, d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \, d\vec{s}$

<u>Παράδειγμα</u>: έστω η επιφάνεια και $\vec{F}(y, -x, e^{xz})$



Να υπολογιστεί $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \, d\vec{s} = \int_B \vec{F} \, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} P dx + Q dy + \cancel{R dz}^{\,0}$ ①

$\underset{\text{κεφαλαίο}}{\uparrow}$ $\underset{\text{μικρό}}{\uparrow}$

<u>Λύση</u>

θέτω $x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$ με $\theta \in [0, 2\pi]$

$z = 0$ $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

Άρα $\vec{\sigma}'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

Άρα η ① $\to \int_0^{2\pi} (P x' + Q y') \, d\theta = \int_0^{2\pi} [\sin\theta(-\sin\theta) - \cos^2\theta] d\theta =$

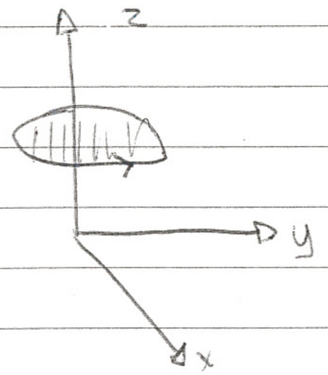
$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \, d\theta = -2\pi$

Άσκηση: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_b \vec{F}\, d\vec{s}$

όπου $\vec{F} = (yz, -xz+e^{y^{2016}}, 0)$ με

$b: \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1,\ z=1\}$ με θετικό προσανατολισμό

Λύση



$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$$

$$\Phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\Phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r\vec{k} = (0,0,r)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ yz & -xz+e^{y^{2016}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{d}{dz}\left(-xz+e^{y^{2016}}\right)\vec{i} -$$

$$-\vec{j}\left(-\frac{d}{dz}(yz)\right) + \vec{k}\left(\frac{d}{dx}\left(-xz+e^{y^{2016}}\right) - \frac{d}{dy}(yz)\right) =$$

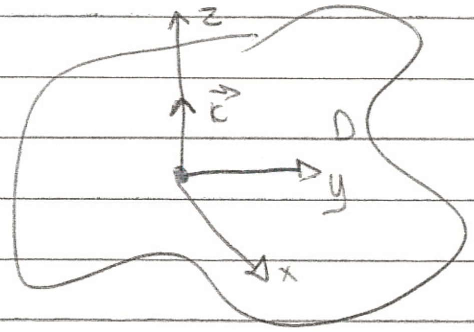
$$= x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k} = (x, y, -2z)$$

Άρα $\int_0^1 \int_0^{2\pi} (x,y,-2z)(r\vec{k})\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -2r\, d\theta\, dr =$

$= -2\pi.$

29/11/16

θ. Green <-> θ Stokes



$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy + 0\,dz) \Rightarrow \vec{F} = (P, Q, 0)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(-\cancelto{0}{\frac{d}{dz} Q(x,y)}\right)\vec{i} - \left(\cancelto{0}{\frac{d}{dz} P(x,y)}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{d}{dx} Q - \frac{dP}{dy}\right)\vec{k}$$

Άρα $\displaystyle\int_{\ell} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \vec{F}\, d\vec{s}$

$$\|$$

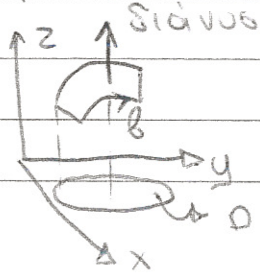
$$\int_{\partial D} (P, Q, 0)(dx, dy, dz) = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\vec{k} \cdot \overbrace{\vec{k}\, dx\,dy}^{d\vec{s}}$$

$$\|$$

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy)$$

Απόδειξη (θ. Stokes): Όταν η επιφάνεια είναι γράφημα συνάρτησης

διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια



$S: \{(x,y,z) \mid z = g(x,y) \;\; \forall\, (x,y) \in D\}$

$\Phi(x,y) = (x, y, g(x,y))$

$\Phi_x(x,y) = (1, 0, g_x(x,y))$

$\Phi_y(x,y) = (0, 1, g_y(x,y))$

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & g_x \\ 0 & 1 & g_y \end{vmatrix} = -g_x \vec{i} - g_y \vec{j} + \vec{k} = (-g_x, -g_y, 1)$$

↑ το κάθετο διάνυσμα στην κατεύθυνση του.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

Υποθέτω θέλουμε $F = (P, Q, R)$

$$= \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right)\vec{i} - \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right)\vec{j} + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\vec{k}$$

Οπότε $$\iint_S \nabla \times \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(-\frac{dg}{dx}, -\frac{dg}{dy}, 1\right) dx\,dy =$$

$$\iint_D \left[-\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right)\frac{dg}{dx} - \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dR}{dx}\right)\frac{dg}{dy} + \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right] dx\,dy$$

$\mathcal{C}: \vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), g(x(t), y(t)) \quad t \in [0,1]$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{s} \quad (1)$$

$\vec{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), g_x(x(t), y(t))\,x'(t) + g_y(x(t), y(t))\,y'(t)$

Άρα η (1) $\Rightarrow \int_0^1 (P, Q, R)(x', y', g_x x' + g_y y')\, dt =$

$$= \int_0^1 \left[P x' + Q y' + R (g_x x' + g_y y') \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[[P + R g_x] x' + [Q + R g_y] y' \right] dt =$$

$$= \int_{\partial D} (P + R g_x) dx + (Q + R g_y) dy =$$

θ. Green

$$= \iint_D \left[\frac{d}{dx}(Q + R g_y) - \frac{d}{dy}(P + R g_x) \right] dx dy$$

$$= (\text{αντικατάσταση } ② \ldots\ldots)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Κανόνας αλυσίδας:}} \\ \frac{d}{dt}\left(g(x(t), y(t)) \right) = \\ \frac{dg}{dx}(x(t), y(t))\, x'(t) + \\ + \frac{dg}{dy}(x(t), y(t))\, y'(t) \end{array}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left(Q(x, y, g(x,y)) \right) = \frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz}\frac{dg}{dx} \\ \frac{d}{dx}\left(R(x, y, g(x,y)) \right) = \frac{dR}{dx} + \frac{dR}{dz}\frac{dg}{dx} \\ \frac{d}{dy}\left(P(x, y, g(x,y)) \right) = \frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{dg}{dy} \\ \frac{d}{dy}\left(R(x, y, g(x,y)) \right) = \frac{dR}{dy} + \frac{dR}{dz}\frac{dg}{dy} \end{array} \right\} ②$$

■

Θεώρημα: Έστω $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, Ω απλά συνεκτικό)

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $\forall$ $\mathcal{C}$ κλειστή καμπύλη έχουμε:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{s} = 0$$

ii) $\forall\, b_1, b_2$ καμπύλες με την ίδια αρχή και τέλος ισχύει

$$\int_{b_1} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{b_2} \vec{F}\, d\vec{s}$$

iii) Υπάρχει $f : R^3 \to R$ ώστε $\vec{F} = \nabla f$

iv) $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

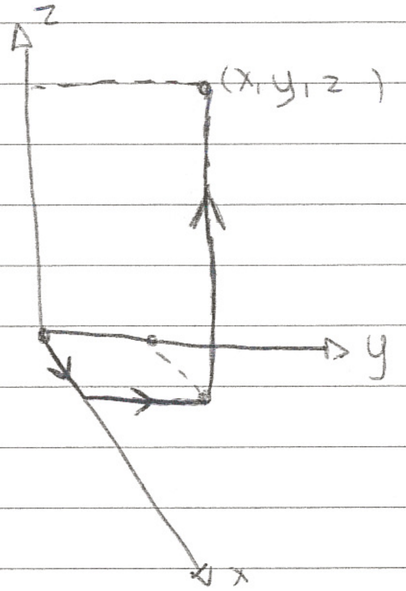
Απόδειξη: i) ⇒ ii) ⇒ iii) ⇒ iv) ⇒ i)

i) ⇒ ii)

$$\int_{b} \vec{F}\, d\vec{s} = 0 = \int_{b_1} \vec{F}\, d\vec{s} + \int_{b_2} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{b_1} \vec{F}\, d\vec{s} - \int_{b_2} \vec{F}\, ds$$

με $b = b_1 \cup (-b_2)$ είναι κλειστή

$\vec{F} = (P, Q, R)$



$$\int_{b} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{b_1} \vec{F}\, d\vec{s} + \int_{b_2} \vec{F}\, d\vec{s} + \int_{b_3} \vec{F}\, d\vec{s}$$

$\vec{\sigma}(t) = (t, 0, 0)$

$$\int_{b_1} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^x P(t, 0, 0)\, dt \qquad b_1 : t = 0,\ t = x$$

$$\int_{b_2} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^y (P(x,t,0),\ Q(x,t,0),\ R(x,t,0))\, e_2\, dt \qquad b_2 : \vec{\sigma}(t) = (x, t, \ldots$$

$0 \le t \le y$

$$= \int_0^y Q(x, t, 0)\, dt$$

$$\int_{B3} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^z R(x,y,t)\, dt \qquad B3: \vec{\sigma}(t) = (x, y, t)$$
$$0 \leq t \leq z$$

Άρα η ① $\to$ $= \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt =$

$= f(x,y,z)$

Άσκηση 1

Έστω $\vec{F} = (2xyz + \sin x,\ x^2 z,\ x^2 y)$. Βρείτε όλες τις $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f = \vec{F}$. Υπολογίστε το $\int \vec{F}\, d\vec{s}$ όπου η καμπύλη ξεκινά από $\overset{=a}{(\pi,1,1)}$ και καταλήγει c_1 στο $(4\pi, 2, -1) = b$

Λύση

$$\frac{df(x,y,z)}{dx} = 2xyz + \sin x$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dy} = x^2 z \qquad \text{Άρα } f(x,y,z) = x^2yz - \cos x$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dz} = x^2 y$$

$f(a) = \pi^2 - \cos\pi = \pi^2 + 1$

$f(b) = 16\pi^2 \cdot 2(-1) - \cos 4\pi = -32\pi^2 - 1$

Άρα $\int_a^b \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(a) = 32\pi^2 \cancel{+1} - \pi^2 \cancel{-1} = 31\pi^2$

✓

Άσκηση 2

Βρείτε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\, d\vec{S}$ όπου S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το O και ο προσανατολισμός είναι προς τα έξω και

$\vec{F} = (2x + e^{y^{2016}}, y^2 + e^{z^{2016}}, z^2 + x^2 e^{y^{2016} + x^{2016}})$

Λύση

Δεν έπρεπε να μπεί τώρα ?

1/12/16

Θ. Stokes

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \, d\vec{S} = \int_C \vec{F} \, d\vec{S}$$

Παράδειγμα 1ο:

Έστω $\vec{F} = (2xyz + \sin x, \; x^2 z, \; x^2 y)$. Βρείτε όλες τις $f: R^3 \to R$ και $\vec{F} = \nabla f$. Υπολογίστε $\int_{C1} \vec{F} \, d\vec{S}$ όπου η C1 ενώνει το $(\pi, 1, 1)$ με το $(4\pi, 2, -1)$

Λύση

1ος τρόπος: Έστω f μια βαθμωτή, θα πρέπει $\vec{F} = \nabla f \Leftrightarrow$

$$\frac{df(x,y,z)}{dx} = 2xyz + \sin x$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dy} = x^2 z$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dz} = x^2 y$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dz} = x^2 y = \frac{d}{dz}(x^2 yz) \Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left(f(x,y,z)\right) - x^2 yz = 0$$

$\Rightarrow \exists g = g(x,y)$ ώστε $f(x,y,z) - x^2 yz = g(x,y)$

$f(x,y,z) = x^2 yz + g(x,y)$

Επειδή: $\frac{d}{dy} f(x,y,z) = x^2 z \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(x^2 yz + g(x,y)\right) = x^2 z \Leftrightarrow$

$$\cancel{x^2 z} + \frac{d}{dy} g(x,y) = \cancel{x^2 z} \Leftrightarrow \frac{dg}{dy}(x,y) = 0$$

Οπότε $\exists h = h(x)$ ώστε $g(x,y) = h(x)$

Επομένως $f(x,y,z) = x^2 yz + h(x)$

όμως $\frac{df(x,y,z)}{dx} = 2xyz + \sin x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2 yz + h(x)\right) = 2xyz + \sin x$

$\Leftrightarrow 2xyz + h'(x) = 2xyz + \sin x \Leftrightarrow h'(x) = \sin x = (-\cos x)'$

$\Leftrightarrow (h(x) + \cos x)' = 0$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ ώστε $h(x) + \cos x = c \Rightarrow h(x) = c - \cos x \Rightarrow$

$f(x,y,z) = c + x^2yz - \cos x$

2ος τρόπος: Το Δ.Π. $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο, $\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$

$\exists f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ώστε $\vec{F} = \nabla f$

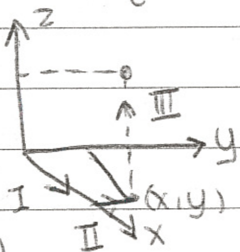
$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \int_C \nabla f\, d\vec{s} = f(\vec{\sigma}(1)) - f(\vec{\sigma}(0))$$

Έστω $C: \vec{\sigma}(t) =$ με $t \in [0,1]$

$$\int_C \nabla f\, d\vec{s} = \int_0^1 \nabla f(\vec{\sigma}(t))\,\vec{\sigma}'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(\vec{\sigma}(t))\,dt =$$

$$= f(\vec{\sigma}(1)) - f(\vec{\sigma}(0))$$

Αν $\vec{\sigma}(1) = (x,y,z)$ Τότε $f(x,y,z) = \int_C \vec{F}\, d\vec{s} + c$



Τότε $\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \int_I + \int_{II} + \int_{III}$

$\int_I \vec{F}\, d\vec{s} =$ $\quad I: \vec{\sigma}_1(t) = (t,0,0)$

$\vec{\sigma}_1'(t) = (1,0,0) \quad t \in [0,x]$

$$= \int_0^x \vec{F}(\vec{\sigma}_1(t))\,\vec{\sigma}_1'(t)\,dt = \int_0^x (\sin t, 0, 0)(1,0,0)\,dt =$$

$$= [-\cos t]_0^x = -\cos x + 1$$

$\int_{II} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^y \vec{F}(\vec{\sigma}_2(t))\,\vec{\sigma}_2'(t)\,dt =$ $\quad II: \vec{\sigma}_2(t) = (x,t,0) \quad t \in [0,y]$

$\vec{\sigma}_2'(t) = (\,,1,0)$

$$= \int_0^y (\sin x, 0, x^2 t)(0,1,0)\,dt = 0$$

III $\vec{\sigma}_3(t) = (x,y,t)$ $t \in [$

$\int_{III} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^z (2xyt + \sin x, x^2 t, x^2 y)(0,0,1)\,dt =$ $\quad \vec{\sigma}_3'(t) = (0,0,1)$

$$= \int_0^z x^2 y\, dt = x^2 y z$$

Επομένως: $f(x,y,z) = x^2yz - \cos x + \overbrace{1+c}^{c}$

Τιμή ενός άκρου - τιμή άλλου άκρου

Θεώρημα Gauss (Θεώρημα απόκλισης)

⇒ Θ. Green

$$\int_C (-P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dy}\right) dx$$

$$\iint_D \operatorname{div}(\overset{\vec F}{\overbrace{Q,P}})\,dxdy = \int_C \overset{\vec F}{(Q,P)}\,d\vec s = \int_C (Q,P)\,v\,ds = \int_C \vec F\,v\,ds$$

Θ. απόκλισης Green

$$\iint_D \nabla(\underbrace{Q,P}_{\vec F})\,dxdy = \int_C \vec F\,\vec v\,ds = \int_C (Q,P)(v_1 \cdot v_2)\,ds$$

Θ. Gauss

$\vec F : \Omega \to R^3$ $\quad \Omega$: στερεό $\subseteq R^3$

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec F\,dxdydz = \iint_S \vec F\cdot\vec v\,ds = \int_C (Q,P)(v_1 v_2)\,ds$$

$S = d\Omega$, $\vec v$ προς τα έξω του στερεού

$\vec F = (P,Q,R)$ $\quad \iiint_\Omega \nabla\cdot\vec F\,dxdydz = \iiint_\Omega \left[\frac{d}{dx}P + \frac{d}{dy}Q + \frac{d}{dz}R\right]dxdydz$

$$= \iint_S (P,Q,R)\,\vec v\,ds = \iint_S (Pv_1 + Qv_2 + Pv_3)\,ds$$

με $\vec v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\iiint_\Omega \frac{dP}{dx}\,dxdydz = \iint_S Pv_1\,ds$$

$$\iiint_\Omega \frac{dQ}{dy}\,dxdydz = \iint_S Qv_2\,ds$$

Ερώτημα: Έστω $f,g : \Omega \to R$ και $\iiint_\Omega \frac{df}{dx}\,g\,dxdydz =$

$$= -\iiint_{\Omega} f \frac{dg}{dx}\, dx\,dy\,dz + \iint_S f g\, v_1\, ds$$

και $\int_0^1 f'(t) g(t)\, dt = -\int_0^1 f(t) g'(t)\, dt + \underbrace{[fg]_0^1}_{f(1)g(1) - f(0)g(0)}$

Παράδειγμα 1: Βρείτε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\vec{v}\, ds$ όπου η επιφάνεια S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το O και προσανατολισμό το μοναδιαίου διαν. προς τα έξω και $\vec{F} = (2x + e^{y^{2016}}, y^2 + e^{z^{2016}}, z + x^2 e^{y^{2016}} + x^{2016})$

Λύση

$$\text{Gauss} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}\, dx\,dy\,dz \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{d}{dx}(2x + e^{y^{2016}}) + \frac{d}{dy}(y^2 + e^{z^{2016}}) + \frac{d}{dz}(z^2 + x^2 e^{y^{2016}} + x^{2016})$$

$$= 2 + 2y + 2z$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad \rho \in [0,1]$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad \phi \in [0,\pi]$

$z = \rho \cos\phi \qquad \theta \in [0,2\pi]$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι $\left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\phi,\theta)}\right| = \rho^2 \sin\phi$

Άρα η (1) $\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (2 + 2\rho \sin\phi \sin\theta + 2\rho\cos\phi)(\rho^2 \sin\phi)\, d\phi\, d\theta\, d\rho$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2\rho^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho + 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^3 \sin^2\phi \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, d\rho +$$

$$+ 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^3 \sin\phi \cos\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3} \quad \checkmark$$

Παράδειγμα 2ο: Βρείτε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$\iint_S 2x + (y^2+z^2)e^{y^3})x\,ds$ (1) όπου S η επιφάνεια της

μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το 0.

Λύση

Με Θ. Gauss: $\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,dxdydz = \iint_S \vec{F}\,\vec{v}\,ds$

Άρα η (1) $\Rightarrow \iint_S (2x + (y^2+z^2)e^{y^3})\,v_1\,ds$

$\vec{F} = (f,0,0)$

$$\iiint_{B_1} \frac{df}{dx}\,dxdydz = \iint_S f\,v_1\,ds$$

Επιλέγω $f(x,y,z) = 2x + (y^2+z^2)e^{y^3} \Rightarrow \frac{df}{dx}(x,y,z) = 2$

Επομένως $\iint_S 2x + (y^2+z^2)e^{y^3}\,x\,ds =$

$$= 2\iiint_{B_1} dxdydz = \frac{8\pi}{3} \checkmark$$

6/12/16

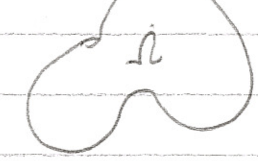
Θ. Gauss

$\vec{F} = (f, 0, 0)$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\,\vec{v} \, ds$$

Ολοκλήρωση κατά μέρη σε πολλές μεταβλητές

$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$



$$\iiint_{\Omega} \frac{df}{dx} \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} f\, v_1 \, ds$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{df}{dx} g \, dx\,dy\,dz = -\iiint_{\Omega} f \frac{dg}{dx} \, dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega} f g\, v_1 \, ds$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{df}{dy} g \, dx\,dy\,dz = -\iiint_{\Omega} f \frac{dg}{dy} \, dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega} f g\, v_2 \, ds$$

$$\iiint \frac{df}{dz} g \, dx\,dy\,dz = -\iiint_{\Omega} f \frac{dg}{dz} \, dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega} f g\, v_3 \, ds$$

Ταυτότητες Green

- 1η $\iiint_{\Omega} f \Delta g \, dx\,dy\,dz = -\iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \vec{v} \, ds$

$$\Delta g(x,y,z) = \frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{d^2 g}{dz^2}$$

$$H(g) = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix} \qquad \Delta g(x,y,z) = \operatorname{tr} H(g)$$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\, g_{xx}(x,y,z) \, dx\,dy\,dz = -\int_{\Omega} f_x\, g_x \, dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega} f g_x \cdot \vec{v} \, ds$$

$$\int_{\Omega} f g_{yy}\, dx dy dz = -\int_{\Omega} f_y g_y\, dx dy dz + \iint_{\partial\Omega} f g_y\, v_2\, ds$$

$$\int_{\Omega} f g_{zz}\, dx dy dz = -\int_{\Omega} f_z g_z\, dx dy dz + \iint_{\partial\Omega} f g_z\, v_3\, ds$$

- 2ο $\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} [f\nabla g - g\nabla f] \vec{v}\, ds$

Άσκηση: Έστω Ω φραγμένο στερεό στον R^3 και $f: \Omega \to R$, $\vec{G}: \Omega \to R^3$, $g: \partial\Omega \to R$ ομαλές συναρτήσεις ώστε να υπάρχει διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: \Omega \to R^3$ ώστε:

$$\nabla \cdot \vec{F}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$
$$\nabla \times \vec{F}(x) = \vec{G}(x) \quad \forall x \in \Omega$$
$$\vec{F}(x)\, \vec{v}(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

Λύση

Έστω $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ δυο διαφορετικές λύσεις του συστήματος,

δηλ: $\nabla \cdot \vec{F_1}(x) = f(x) = \nabla \cdot \vec{F_2}(x)$, $x \in \Omega$

$\nabla \times \vec{F_1}(x) = \vec{G}(x) = \nabla \times \vec{F_2}(x)$, $x \in \Omega$

$\vec{F_1} \cdot \vec{v} = g = \vec{F_2} \cdot \vec{v}$ $\partial\Omega$

Αν $\vec{F} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$ τότε έχουμε:

$\nabla \cdot \vec{F}(x) = 0$, $x \in \Omega$

$\nabla \times \vec{F}(x) = 0$, $x \in \Omega$

$\vec{F}(x) \cdot \vec{v}(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$ (1)

Έστω $\nabla \times \vec{F}(x) = 0$, $x \in \Omega \Rightarrow \exists f : \Omega \to R$ ώστε $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$, $x \in \Omega$ οπότε από $\nabla \cdot \vec{F}(x) = 0$, $x \in \Omega$

$$\nabla \cdot (\nabla f(x)) = 0, \ x \in \Omega$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right) = 0$$

$$\Delta f(x) = 0, \ x \in \Omega$$

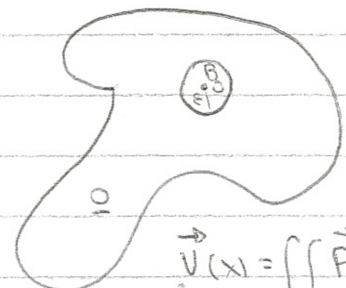
$$\nabla f(x)\, \vec{v}(x) = 0, \ x \in \partial\Omega$$

1^{η} ταυτότητα: $\int_{\Omega} g\,\Delta f\,\cancel{dx}^{\,0} = -\int \nabla g\cdot\nabla f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,\nabla f\,\cancel{\vec{v}\,ds}^{\,0}$

Επιλέγουμε $h = f$

Οπότε: $\int_{\Omega} \nabla g\cdot\nabla f\,dx = 0 \quad , \forall g\in C^{1}(\overline{\Omega})$

Επιλέγουμε $g = Q(f) \Rightarrow \nabla g = Q'(f)\,\nabla f \Rightarrow \int Q'(f)\,|\nabla f|^2\,dx =$



Άσκηση: Έστω $0\in\Omega$ φραγμένο στερεό

Αποδείξτε ότι: $\iiint_{\Omega} \dfrac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} =$

$= \iint_{\partial\Omega} \dfrac{x\,\vec{v}}{x^2+y^2+z^2}\,ds$

$\vec{V}(x) = \iint_{\partial(\Omega - B)} \vec{F}\,\vec{v}\,d$

Λύση

$\vec{F}(x) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,x = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{F} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) =$

$= \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2x\,x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2y\,y}{(x^2+y^2+z^2)^2} +$

$+ \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2z\cdot z}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \dfrac{3}{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2\cancel{(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

$\iiint_{\Omega - B_\varepsilon} \dfrac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\partial(\Omega - B_\varepsilon)} \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{v}\,d$

$= \iint_{\partial\Omega} \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{v}\,ds + \iint_{\partial\Omega}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2},\right.$

$\left.\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{v}\,ds$

$$\vec{v} = -\frac{1}{\varepsilon}(x, y, z)$$

Όμως: $-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial B_\varepsilon}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)(x,y,z)\,dS$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial B_\varepsilon}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dS = -\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial B_\varepsilon} dS = -\frac{1}{\cancel{\varepsilon}}4\pi\varepsilon^{\cancel{2}} = -4\pi$$

Helmholtz (Ανάλυση)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \vec{F}$

Θεώρημα:

Έστω Ω ανοιχτό φραγμένο (απλά συνεκτικό). Τότε $\forall \vec{F}$ ομαλό, υπάρχουν μοναδικά διανυσματικά πεδία $\vec{G}, \vec{Q}$ τ.ω. να ισχύουν:

$$\vec{F}(x) = \vec{G}(x) + Q(x), \quad x \in \Omega$$
$$\nabla \times \vec{G}(x) = 0, \quad x \in \Omega$$
$$\nabla \vec{Q}(x) = 0, \quad x \in \Omega$$
$$\vec{G}(x)\,\vec{v}(x) = \vec{F}(x)\,\vec{v}(x) \quad x \in \partial\Omega$$

$\nabla \times \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{G} = \nabla f$

$\vec{F} = \nabla f + \vec{Q}$

$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla f + \vec{Q}) = \Delta f + 0$

Οπότε η f : $\Delta f(x) = \nabla \cdot \vec{F}$ (Poisson)

$$\nabla f(x)\,\vec{v}(x) = \vec{F}(x)\,\vec{v} \quad x \in \partial\Omega$$

8/12/16

Helmholtz: Έστω $\vec{f}: \Omega \to R^3$ (ομαλό) τότε $\exists\ \vec{Q}, \vec{G}$ τ.ω. $\vec{F} = \vec{Q} + \vec{G}$ τ.ω:

$$\nabla \times \vec{G}(x) = \vec{0}, \quad x \in \Omega$$
$$\nabla \cdot \vec{G}(x) = \vec{0}, \quad x \in \Omega$$
$$\vec{F}(x)\,\vec{u} = \vec{G}(x)\,\vec{u}, \quad x \in \partial\Omega$$

Πρόβλημα Poissou

$$(*) \begin{cases} \Delta f(x) = g(x), & x \in \Omega \\ \nabla f(x) n = h(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

έχει λύση όταν $\int_\Omega g(x)\, d = \int_{\partial\Omega} h(x)\, ds$

$$F(x) = \nabla f(x) + Q$$
$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(x) = \Delta f(x) + 0$$
$$\Rightarrow \Delta f(x) = \nabla \vec{F}(x), \quad x \in \Omega$$
$$\nabla f(x)\,\vec{n} = \underbrace{\vec{F}(x)\,\vec{u}}_{h(x)}, \quad x \in \partial\Omega$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}(x)\,\vec{n}\, ds = \int_\Omega \nabla \cdot \vec{F}(x)\, dx$$

Έχουμε βρει μια f τότε $\vec{F}(x) = \nabla f(x) + \vec{Q}(x) \Rightarrow$

$$\vec{Q}(x) = \vec{F}(x) - \nabla f(x), \quad x \in \partial\Omega$$

τότε $\nabla \vec{Q}(x) = \nabla \cdot (\vec{F}(x) - \nabla f(x)) = \nabla \cdot \vec{F}(x) - \nabla^2 f(x) =$

$= \nabla \vec{F}(x) - \Delta f(x) = 0$

Για το μονοσήμαντο. Έστω $\vec{G_1}, \vec{G_2}, \vec{Q_1}, \vec{Q_2}$ $(\vec{G_1}, \vec{Q_1})$, $(\vec{G_2}, \vec{Q_2})$ δύο διαφορετικές διατάξεις

$$\vec{F} = \vec{G_1} + \vec{Q_1} = \vec{Q_2} + \vec{G_2} \Leftrightarrow \vec{G_1} - \vec{G_2} = \vec{Q_1} - \vec{Q_2}$$
$$\nabla \times \vec{G_1} = \nabla \times \vec{G_2} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{Q_1} = \nabla \cdot \vec{Q_2} = 0$$
$$\vec{G_1} \cdot \vec{u} = \vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{G_2} \cdot \vec{u}$$

Οπότε, αν θέσουμε $\vec{G} = \vec{G_1} - \vec{G_2}$

$\vec{Q} = \vec{Q_1} - \vec{Q_2}$ τότε έχουμε:

$$\nabla \times \vec{G} = \nabla \times \vec{G_1} - \nabla \times \vec{G_2} = \vec{0}$$
$$\nabla \cdot \vec{Q} = \nabla \cdot \vec{G_1} - \nabla \cdot \vec{Q_2} = 0$$

$\vec{G}\cdot\vec{u} = \vec{G_1}\cdot\vec{u} - \vec{G_2}\vec{u} = \vec{F}(x)\vec{u} - \vec{F}(x)\cdot\vec{u} = 0$

$\nabla\times\vec{G} = \vec{0}, \quad x\in\Omega \Rightarrow \exists\, f.\ \vec{G} = \nabla f \quad x\in\Omega$

$\vec{G}\cdot\vec{u} = 0, \quad x\in\partial\Omega \Rightarrow \nabla f\vec{u} = 0 \quad x\in\partial\Omega$

$\vec{G}(x) - Q(x) \quad x\in\Omega$

$\vec{G} = (g_1, g_2, g_3)$ και επειδή $\nabla\vec{Q} = 0$ τότε $\nabla\vec{G}(x) = 0, \ x\in\Omega$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \nabla f\vec{u} = 0, & x\in\partial\Omega \\ \Delta f(x) = 0, & x\in\Omega \end{array}}$

Έστω g: $g\Delta f(x) = 0$

$\Downarrow$

$\int_\Omega g\Delta f(x)dx = 0$

$\shortparallel$

1η ταυτότητα Green

$-\int_\Omega \nabla g\nabla f dx + \int_{\partial\Omega} g\nabla f\vec{u}\, ds$, με $\nabla f\vec{u} = 0$

$\Rightarrow \int_\Omega \nabla g\nabla f\, dx = 0$

$\int_\Omega (\nabla f)^2 dx = 0$

$\Uparrow$

επιλέγουμε $g = f$

$\Rightarrow \nabla f(x) = \vec{0}, \quad x\in\Omega \Rightarrow$

$\vec{G}(x) = 0, \quad x\in\Omega \Rightarrow$

$\vec{Q}(x) = 0, \quad x\in\Omega$

Άσκηση: Έστω $f: B_1\to\mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση που ικανοποιεί $\Delta f(x) = 2, \quad x\in B_1$

$f(x) = 1/3, \quad x\in\partial B_1$

με $B_1 = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

Αποδείξτε ότι η $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2), \quad x = (x,y,z)\in B_1$

Λύση

Έστω f τυχαία λύση ∇

$\Delta f(x) = 2, \quad x\in B$

$f(x) = 1/3, \quad x\in\partial B$

Ψάχνουμε $g(x)\ f(x) - \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)$

Τότε η g ικανοποιεί: $\Delta g(x) = \Delta f(x) - \frac{1}{3}\Delta(x^2+y^2+z^2)$

$\Rightarrow 2 - \frac{1}{3}\left(\frac{d^2}{dx^2}(\ ) + \frac{d^2}{dy^2}(\ ) + \frac{d^2}{dz^2}(\ )\right) = 2 - \frac{1}{3}(2+2+2) = 0$

$x \in \partial B_1 \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad , \partial B_1$

Ταυτοτητα 1η Green: $\int_{B_1} f \Delta g \, dx = \int_{B_1} 0 dx = 0$

$$= -\int_{B_1} \nabla f \nabla g \, dx + \int_{\partial B_1} f \nabla g(x) \vec{u} \, ds = 0$$

Επιλέγω $f = g$ τοτε έχω $-\int_{B_1} \nabla g \nabla g \, dx + \int_{\partial B_1} \cancel{g \nabla g \vec{u}}^{\,0} ds = 0$

$-\int_{B_1} |\nabla g|^2 dx = 0 = \nabla g(x) = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ τω.

$g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 = 0 \quad g(x) = c_1 \ \forall x \in B_1$

$\Rightarrow g(x) = g(0) \ \forall x \in B_1 \quad h(t) = g(tx) \quad t \in [0,1]$

ΘΜΤ στο h $\quad h(1) - h(0) = (1-0) h'(s)$

$h(t) = g(tx, ty, tz)$

$h'(t) = \frac{dg}{dx}(tx, ty, tz)\, x + \frac{dg}{dy}(tx, ty, tz) \frac{d}{dt}(ty) +$

$+ \frac{dg}{dz}(tx, ty, tz) \frac{d}{dz}(tz)$

$g(x) - g(0) = \cancel{\frac{dg}{dx}(sx, sy, sz)\, x}^{\,0} + \frac{dg}{dy}(sx, sy, sz)\, y +$

$+ \frac{dg}{dz}(sx, sy, sz)\, z$

$g(x) = g(0) \ \forall x \in B_1$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \ g(x) = c \ \forall x \in B$

$x \in B_1$ (στο σύνορο) $g(x) = 0$ $\Big\} \Rightarrow c = 0$

$\Downarrow$

$g(x) \equiv 0$

Άσκηση: Αποδείξτε ότι $\iint_{\partial\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\cos(x,v)\,ds =$

$= 3\iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz$

$\vec F(x)\,\vec v(x) = |\vec F(x)|\cos(\vec F,\vec v)$

Λύση

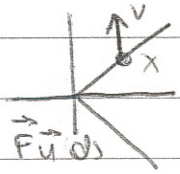
$|\vec F(x)| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec F(x) = \lambda(x)\,x \Rightarrow |\vec F(x)| = |\lambda(x)|\,|x| = |x| \Rightarrow$

$\vec F(x) = (x,y,z) = x$ ($\Rightarrow$ γιατί $\lambda(x)=1$)

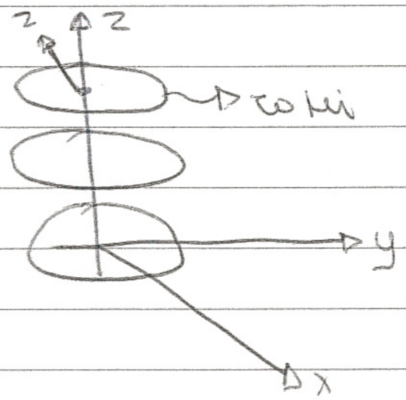
Άρα $\iiint_{\Omega} \underbrace{\nabla\cdot\vec F}_{= 3}\,dx\,dy\,dz$

cos(x,v) είναι η γωνία που σχηματίζει το $x(x,y,z)$ με το μοναδιαίο κάθετο



Άσκηση: Με Θ. Gauss να υπολογίσετε $\iint_S \vec F\vec u\,ds$
όπου $\vec F(x^2, -x^2z^2, 4xy^3z)$ όπου
S είναι η επιφάνεια του στερεού $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le x+$
και $\vec u$ προς τα έξω του στερεού

Λύση



Gauss

$\iiint \nabla\vec F\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \vec F(x)\vec u\,ds$

$\iiint \underbrace{\nabla\vec F}_{4x^3+4xy^3} = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{2+x} \cdots\, dz\right)dx\,dy$

15/12/16

Ανακεφαλαίωση

1) $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$

2) $\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}$

3) $\vec{F} = (P, Q, R) \qquad \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

4) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

5) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

Θεώρημα: $\underline{\Omega}$ απλά συνεκτικό. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = 0 \quad \forall\, C \subseteq \underline{\Omega}$ κλειστή καμπύλη

ii) $\forall\, C_1, C_2 \subseteq \underline{\Omega}$ να ξεκινάει και τελειώνει στα ίδια σημεία τότε:

$$\int_{C_1} \vec{F}\, ds = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{s}$$

iii) $\nabla \times \vec{F} = 0$, $\underline{\Omega}$

iv) $\exists f : \underline{\Omega} \to R$ ώστε $\vec{F} = \nabla f$

Άσκηση: Βρείτε τις σταθερές a, b, γ ώστε το Δ.Π. $\vec{F}(x,y,z) = (axy + z^3,\ x^2 + byz,\ y^2 + \gamma x z^2 + 1)$ να είναι αστρόβιλο.

Για τις προηγούμενες τιμές των α, β, γ

β) Βρείτε τη βαθμωτή $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f = \vec{F}$

γ) Βρείτε την επιφάνεια S | $P \in S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ ώστε να ισχύει $\int_{\beta} \vec{F}\, d\vec{s} = 0$, άρα η β ξεκινά από το $(1,1,1)$ και καταλήγει στο σημείο P.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ axy + z^3 & x^2 + bzy & y^2 + \gamma x z^2 + 1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{d}{dy}(y^2 + \gamma x z^2 + 1) - \frac{d}{dz}(x^2 + bzy)\right)\vec{i} +$$

$$\left(-\frac{d}{dx}\left(y^2 + \gamma z^2 x + 1\right) + \frac{d}{dz}(axy + z^3)\right)\vec{j} +$$

$$\left(\frac{d}{dx}(x^2 + byz) - \frac{d}{dy}(axy + z^3)\right)\vec{k} = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (2y - by)\vec{i} - (\gamma z^2 - 3z^2)\vec{j} + (2x - ax)\vec{k} = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} y(2-b) = 0 \\ z^2(\gamma - 3) = 0 \\ x(2-a) = 0 \end{matrix} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} b = 2 \\ \gamma = 3 \\ a = 2 \end{matrix}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy + z^3,\ x^2 + 2yz,\ y^2 + 3xz^2 + 1)$$

β) Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι βαθμωτή ώστε: $\nabla f = \vec{F}$

θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{d f(x,y,z)}{dx} = 2xy + z^3$$

$$\frac{d f(x,y,z)}{dy} = x^2 + 2yz \qquad x, y, z \in R$$

$$\frac{d f(x,y,z)}{dz} = y^2 + 3xz^2 + 1$$

$$\frac{df}{dx} = 2xy + z^3 = \frac{d}{dx}(x^2y + xz^3) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f(x,y,z) - x^2y - xz^3\right) = 0$$

$\Rightarrow \exists\, g = g(y,z)$ ώστε $f(x,y,z) - x^2y - xz^3 = g(y,z)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + g(y,z)$ με αντικατάσταση στην

$$\frac{df}{dy} = x^2 + 2yz \iff \frac{d}{dy}\left(x^2y + xz^3 + g(y,z)\right) = x^2 + 2yz \Rightarrow$$

$\exists\, h = h(z)$ ώστε:

$g(y,z) - y^2z = h(z) \iff g(y,z) = y^2z + h(z) \Rightarrow$

$f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + y^2z + h(z)$

Η τρίτη μας δίνει: $\frac{d}{dz} f(x,y,z) = y^2 + 3xz^2 + 1 \iff$

$$\frac{d}{dz}\left(x^2y + xz^3 + y^2z + h(z)\right) = y^2 + 3xz^2 + 1 \iff$$

$$\cancel{3xz^2} + \cancel{y^2} + h'(z) = \cancel{y^2} + \cancel{3xz^2} + 1 \iff h'(z) = 1 \iff h(z) = z$$

$\Rightarrow \exists\, c \in R : h(z) - z = c \Rightarrow h(z) = z + c$

Οπότε $f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + y^2z + z + c$ με $c \in R$

γ) Έστω $P=(x,y,z)\in S$ τότε θα έχουμε:

$$\int_B \vec{F}\, d\vec{s} = 0 \iff \int_B \nabla f(x,y,z)\, d\vec{s} = 0$$

Αν $\vec{\sigma}(t)$ $t\in[0,1]$ καμπύλη στον χώρο ώστε:

$\vec{\sigma}(0)=(1,1,1)$, $\vec{\sigma}(1)=(x,y,z)=P$

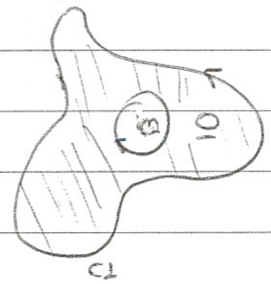
Τότε θα πρέπει $\int_0^1 \nabla f(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}'(t)\, dt=0 \iff f(\vec{\sigma}(1))-f(\vec{\sigma}(0))$

$=0$

Άρα $f(x,y,z)-f(1,1,1)=0 \iff$

$x^2y+xz^3+y^2z+z+c-(1+1+1+1+c)=0 \iff$

$$\boxed{x^2y+xz^3+y^2z+z-4=0}$$



Θ. Green

$$\iint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy = \int_{d\Omega} \vec{F}\,\vec{u}\, ds$$

$$\int_{d\Omega} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_\Omega \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{d.}{dy}\right) dx\,dy$$

Το Green με μορφή θεωρήματος απόκλισης

$$\iint_\Omega \left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\right) dx\,dy = \int_{B_1}\vec{F}\,\vec{u}\, ds + \int_{B_2}\vec{F}\,\vec{u}\, ds = \int_{d\Omega}(P,Q)\,\vec{u}\, ds$$

Θ. Stokes

$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}\, dx\,dy\,dz = \iint_{d\Omega}\vec{F}\,\vec{u}\, ds$$

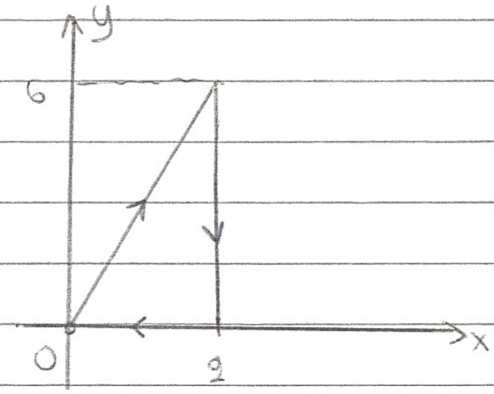
$$\int_{B=\partial S} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε $\int_B \vec{F}\, d\vec{s}$ όπου α) $\vec{F} = (y^2\cos x + \sin(\sin x),$ $15x + x^2 + 2y\sin x + \sin(\sin y))$ όπου B είναι το περίγραμμα τριγώνου με διαδρομή $(0,0) \to (2,6) \to (2,0) \to (0,0)$

β) $\vec{F}(x,y) = (8y - \ln(x^2+y^2),\ 2\arctan(\frac{y}{x}))$ όπου B είναι ο κύκλος $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$ με θετικό προσανατολισμό.

Λύση

α)



$P(x,y) = y^2\cos x + \sin(\sin x)$

$Q(x,y) = 15x + x^2 + 2y\sin x + \sin(\sin y)$

$$\left.\begin{aligned} &y = ax \\ &6 = 2a \Rightarrow a = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Άρα } \boxed{y = 3x}$$

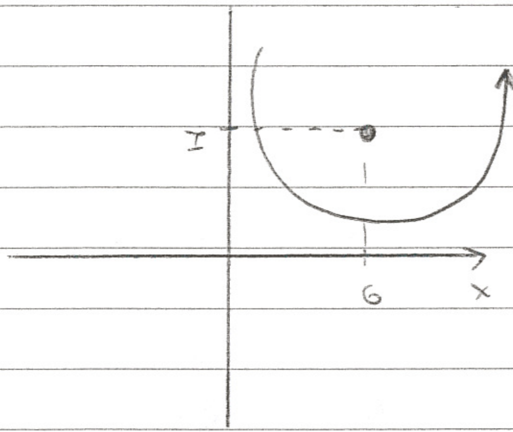
$$\int_B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_B (P\,dx + Q\,dy) = -\iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy =$$

$$= -\iint (15 + 2x)\, dx\,dy = -\int_0^2 \int_0^{3x} (15 + 2x)\, dy\, dx =$$

$$= -\int_0^2 \Big[(15 + 2x)y\Big]_0^{3x} dx = -\int_0^2 (45x + 6x^2)\, dx =$$

$$= -\left[\frac{45x^2}{2} + \frac{6x^3}{3}\right]_0^2 = -\left[\frac{45\cdot 4}{2} + 2\cdot 2^3\right] =$$

$$= -90 + 2\cdot 8 = -90 + 16 = -74.$$



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \iint \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dx\,dy \quad (*)$$

$$\frac{d}{dx} Q = 2 \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 2 (\arctan)'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= 2 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2\cancel{x^2}}{x^2+y^2} \left(-\frac{y}{\cancel{x^2}}\right) = -\frac{2y}{x^2+y^2} \quad ①$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d}{dy} \left(8y - \ln(x^2+y^2)\right) = 8 - (\ln)'(x^2+y^2) \frac{d}{dy}(x^2+y^2) =$$

$$= 8 - \frac{2y}{x^2+y^2} \quad ②$$

Άρα η $(*) \rightsquigarrow -8 \iint_\Omega dx\,dy = -8 \cdot 25\pi = -200\pi$

<u>Ταυτότητες Green</u>

▶ $1^{\text{η}}$ $\iiint_\Omega f \Delta g \, dx\,dy\,dt = -\iiint_\Omega \nabla f \nabla g \, dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \, \vec{n} \, dS$

▶ $2^{\text{η}}$ $\iint_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \, \vec{n} \, ds$

$$\iint_{\Omega} \frac{df}{dx} g \, dx\,dy = -\iint_{\Omega} f \frac{dg}{dx} \, dx\,dy + \int_{d\Omega} fg \, u_1 \, ds$$

Πολλαπλασιασμός βαθμωτής με Δ.Π.

$$\nabla g \cdot \vec{F} + g \nabla \cdot \vec{F} = g_x P + g \frac{d}{dx} P + g \frac{d}{dy} Q + g_y Q + g_z R + g \frac{d}{dz} R$$

$$\nabla \cdot (g \vec{F}) = \frac{d}{dx}(gP) + \frac{d}{dy}(gQ) + \frac{d}{dz}(gR)$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dX = \iint_{d\Omega} \vec{F} \, \vec{u} \, ds$$

$$\iiint_{\Omega} g \nabla \vec{F} \, dX = -\iiint_{\Omega} \nabla g \cdot \vec{F} + \iint_{d\Omega} g \vec{F} \vec{u} \, ds$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (g \vec{F}) = \iiint_{\Omega} \nabla g \cdot \vec{F} + \iiint_{\Omega} g \, \nabla \cdot \vec{F}$$

$$\|$$

$$\iint_{d\Omega} g \vec{F} \vec{u} \, ds$$

Άσκηση 6 φυλλάδιο 11

$$B_1 = \{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

$$| \nabla f(x) |^2 = 2 f(x)$$

$$\nabla \cdot (f(x) \nabla f(x)) = - f(x)$$

ΝΔο το $\iint_{dB_1} \nabla f \cdot \vec{n} \, ds = -4\pi$

Λύση

α) $$\iiint_{B_1} \nabla \cdot \vec{F} \, dX = \iint_{dB_1} \vec{F} \, \vec{u} \, ds$$

Επιλέγουμε $\vec{F}(x) = \nabla f(x)$

Άρα $\iint_{\partial B_1} \nabla f(x)\, \vec{n}\, ds = \iiint_{B_1} \underbrace{\nabla \cdot (\nabla f(x))}_{\Delta f(x)} dx$

B) $\nabla (f(x) \nabla f(x)) = - f(x) \Leftrightarrow$

$\underbrace{\nabla f(x) \cdot \nabla f(x)} + f(x)\ \nabla \cdot (\nabla f(x)) = - f(x)$

$|\nabla f(x)|^2 + f(x)\, \Delta f(x) = - f(x) \Leftrightarrow$

$2 f(x) + f(x)\, \Delta f(x) = - f(x) \Leftrightarrow$

$f(x)\, \Delta f(x) = -3 f(x) \Leftrightarrow f(x)\,(3 + \Delta f(x)) = f(x) \Leftrightarrow$

$\boxed{\Delta f(x) = -3}$