Τρίτη 06/02/18 Λιλή Γεωργία

Πράξεις διανυσμάτων: πρόσθεση, πολ. με πραγμ.

Γραμμική Εξάρτηση (παραλληλία)

$\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u} // \vec{v} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \ \vec{u}=\lambda\vec{v}$

δηλ. $\exists$ λ,μ που δεν είναι ταυτοχρ. 0 ώστε $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$.

Καθετότητα

$\vec{u}\perp\vec{v}$ (κάθετο, ορθογώνιο)

Εσωτερικό γινόμενο $\cdot$, $\langle , \rangle$, $(,)$

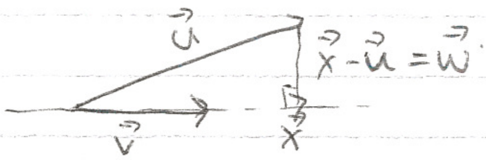
$\vec{u}\cdot\vec{v} = (a_1,b_1,\gamma_1)\cdot(a_2,b_2,\gamma_2) = a_1a_2+b_1b_2+\gamma_1\gamma_2$

επίσης $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

το οποίο προκύπτει από Νόμο συνημιτόνων

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ ... πράξεις!

Προβολή διαν. σε διαν.



$\exists \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\vec{x}=\lambda\vec{v}$ και $\vec{x}\perp\vec{x}-\vec{u}$ $\qquad \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\vec{\eta}$

$\Rightarrow \vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{u})=0$

$\lambda\vec{u}(\lambda\vec{v}-\vec{u})=0 \quad \lambda^2\vec{v}\,\vec{v}-\lambda\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

$\Rightarrow \vec{x}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u} \qquad \lambda\|\vec{v}\|^2=\vec{v}\cdot\vec{u} \Rightarrow \lambda=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$

$\vec{\eta}$: μοναδιαίο

άρα $\vec{x}=\left(\vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \boxed{\vec{x}=(\vec{u}\cdot\vec{\eta})\vec{\eta}}$

μετά από πράξεις (Πυθαγόρειο)

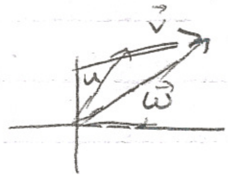
$\|\vec{w}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{\eta})^2=\|\vec{u}\|^2$

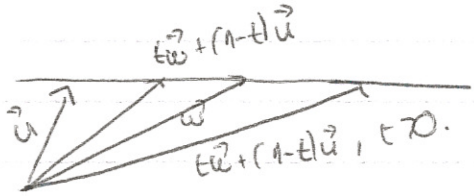
Εξίσωση Ευθείας

Παραμετρική μορφή $t \in \mathbb{R}$.

$(x,y,z) = \vec{u} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = \vec{\omega} - \vec{u} = u$



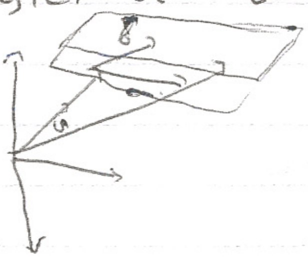


κυρτός συνδυασμός των $\vec{u}, \vec{\omega}$

Επίπεδο

Παραμετρική μορφή

$(x,y,z) = \vec{u} + t\vec{a} + s\vec{\beta}$; $t,s \in \mathbb{R}$.



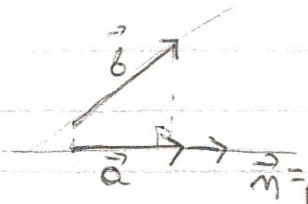
Παραμετρικά Εξισ.

$(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma) + t(\delta,\varepsilon,\zeta)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\frac{x-\alpha}{\delta} = \frac{y-\beta}{\varepsilon}}_{\text{επιπε.}} \underbrace{= \frac{z-\gamma}{\zeta}}_{\text{επίπεδο.}}$$

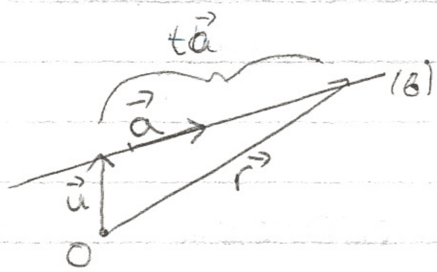
$|\vec{a} \times \vec{\beta}| =$ εμβαδόν του παρ/μου.
που ορίζεται $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Πέμπτη 08/02/18



$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

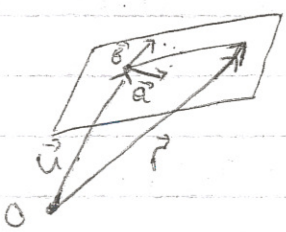
$pr_{\vec{a}}\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{m})\cdot\vec{m}$ (στην κατεύθυνση του $\vec{m}$)



Ευθείες • παραμετρικά

$\vec{r} = \vec{u} + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$

Επίπεδο • παραμετρικά



$\vec{r} = \vec{u} + t\vec{a} + s\vec{b}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Ευθεία

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{a} = (a_1, b_1, \gamma_1)$

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, \gamma_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + tb_1 \\ z = z_0 + t\gamma_1 \end{bmatrix}$$

Επίπεδο

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{a} = (a_1, b_1, \gamma_1)$

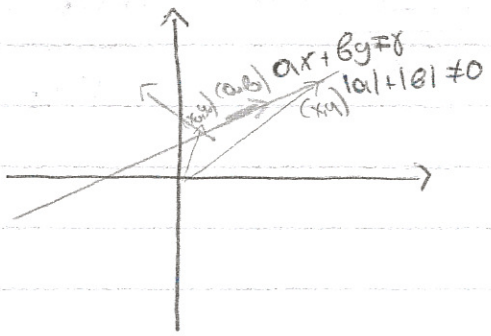
$\vec{b} = (a_2, b_2, \gamma_2)$

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, \gamma_1) + s(a_2, b_2, \gamma_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = x_0 + ta_1 + sa_2 \\ y = y_0 + tb_1 + sb_2 \\ z = z_0 + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Καρτεσιανή αναπαράσταση ευθείας

$(n=2)$



Από παραμετρικά έχω

$$\left.\begin{aligned} b_1 x &= b_1 x_0 + t a_1 b_1 \\ a_1 y &= a_1 y_0 + t b_1 a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$a_1 y - b_1 x = a_1 y_0 - b_1 x_0$ Το σημείο (x_0,y_0) είναι σημείο της ευθείας.

Με το (a_1,b_1) $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$

Στην καρτεσιανή μορφή

$(-b_1,a_1)((x-x_0),(y-y_0)) = 0$.

$(-b_1,a_1)\cdot(x,y) = (-b_1,a_1)(x_0,y_0) \Leftrightarrow$ ουσιαστικά μου δίνει το κάθετο διάνυσμα στην ευθεία μου.

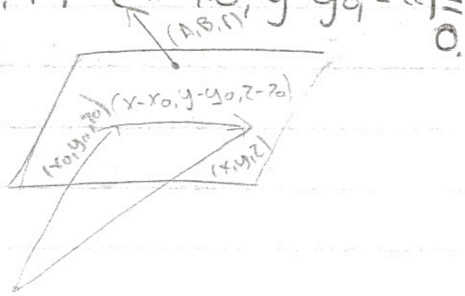
αντίστοιχα απαλείφω τις παραμέτρους και στην εξίσωση του επιπέδου, και προκύπτει η καρτεσιανή μορφή

$Ax + By + \Gamma z = \Delta$ (x_0,y_0,z_0) σημείου του επιπέδου

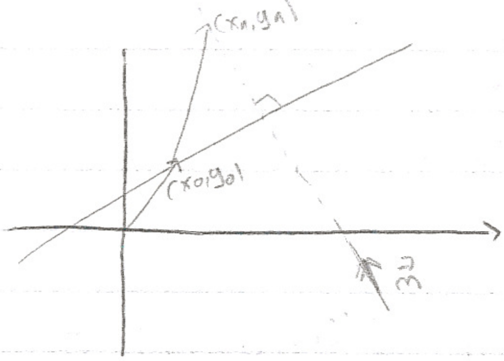
$Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 = \Delta$

$Ax + By + \Gamma z - \cancel{\Delta} = Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 - \cancel{\Delta} \Leftrightarrow$

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0) = 0 \Rightarrow (A,B,\Gamma)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$



$(AB\Gamma) \parallel \vec{a} \times \vec{b}$



$(x_1,y_1) - (x_0,y_0)$
$= (x_1-x_0, y_1-y_0)$

$d = \|((x_1-x_0, y_1-y_0)\vec{m})\vec{m}\|$
$= |(x_1-x_0, y_1-y_0)\vec{m}|\,\|\vec{m}\|$

Αν (ε): $Ax + By = \Gamma$

$(A,B) \perp (\varepsilon)$

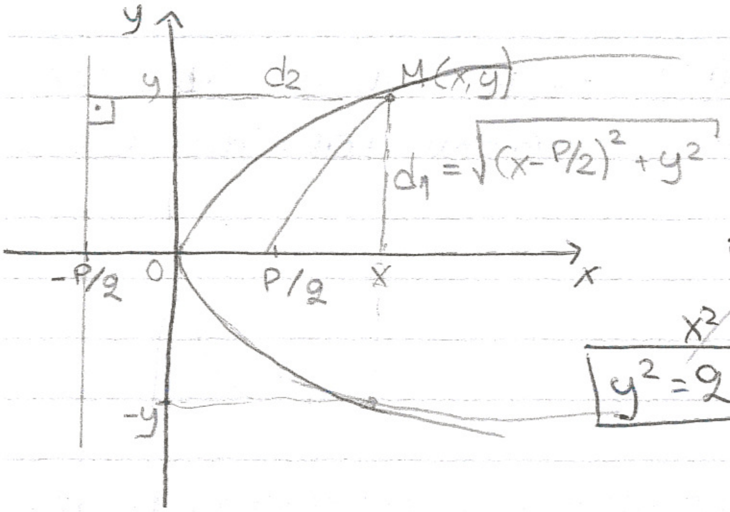
$\vec{m} = \frac{1}{\|(A,B)\|}(A,B) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$

$$d(x_1,y_1,\varepsilon) = \frac{|(x_1-x_0, y_1-y_0)\cdot(A,B)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_1+By_1-\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Τρίτη 13/02/18

Παραβολή

Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σημείο f μία ευθεία.



$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$

$(x,y)\in\mathcal{C}$

$(x,-y)\in\mathcal{C}$

$d_2=\left|x+\frac{p}{2}\right|$

$d_1=d_2 \iff d_1^2=d_2^2 \iff$

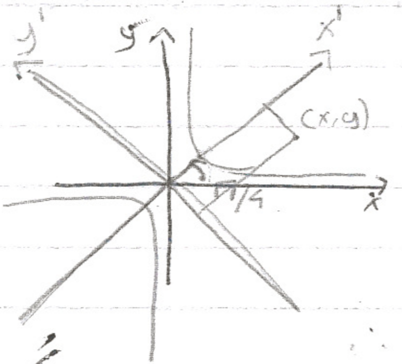
$|x+p/2|^2=(x-p/2)^2+y^2 \iff$

$\cancel{x^2}+px+\cancel{\frac{p^2}{4}}=\cancel{x^2}-px+\cancel{\frac{p^2}{4}}+y^2 \iff$

$\boxed{y^2=2px}$

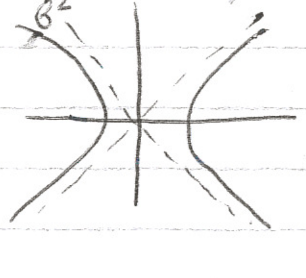
Υπερβολή

$xy=1$



(στροφή κατά π/4)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

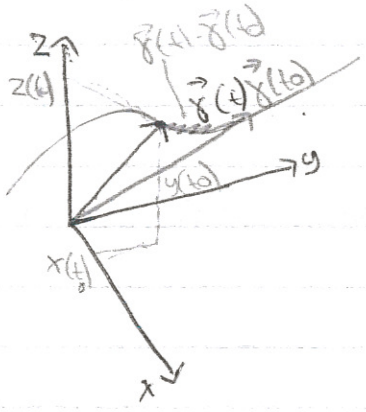


Καμπύλες

Είναι μια απεικόνιση / διανυσματική συνάρτηση $\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$
$\vec{\gamma}(t)$, $t\in\mathbb{R}$

(π.χ. $x(1,1,1)$, $x\in\mathbb{R}$ | $\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $\vec{\gamma}(t)=(t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$)

$\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ όπου $t\in(0,1)$, $\vec{\gamma}:(0,1)\to\mathbb{R}^3$



$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

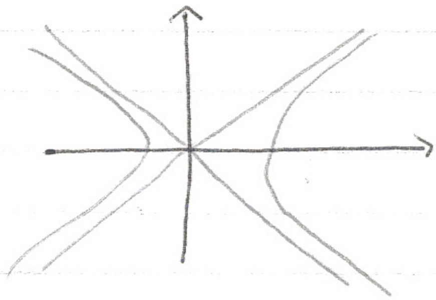
είναι παραγωγίσιμη στο t_0.

$$\frac{\vec{\gamma}(t)-\vec{\gamma}(t_0)}{t-t_0} = \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}, \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)$$

$$\vec{\gamma}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{\gamma}(t)-\vec{\gamma}(t_0)}{t-t_0}$$: εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο t_0

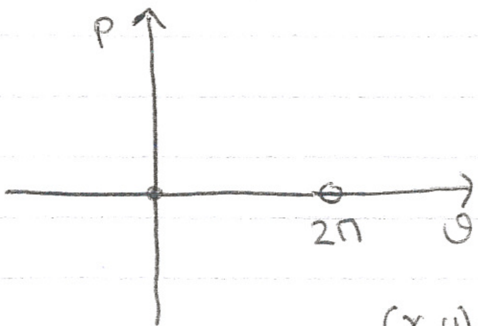
Παραμετρικοποίηση καμπύλης

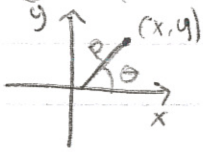
• Συστήματα συντεταγμένων



γεωμ. αναπαράσταση σε καρτεσιανή μορφή

▸ Πολικό Σύστημα συντεταγμένων





Καρτ. ⇒ Πολ.

$0 \leq \theta < 2\pi$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

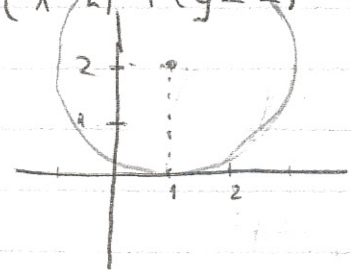
$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

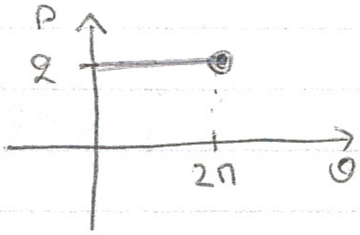
$(x,y) \neq 0 \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

π.χ.

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$



σε πολικό →



(στις πολικές έχω ευθεία, είναι σταθερό το ρ.)

$x = 1 + 2\cos\theta$

$y = 2 + 2\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(2\pi)$: έχω κλειστή καμπύλη

$\rightarrow \vec{\gamma}(\theta) = (\underset{x}{a\cos\theta}, \underset{y}{b\sin\theta}) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ έλλειψη

$\rightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ υπερβολή παίρνω ένα απλό παραδ. όπου $a = b$

δηλ. έχω $x^2 - y^2 = 1$

Από τύπο Euler έχω: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh\theta = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Υπερβολικό ημίτονο: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

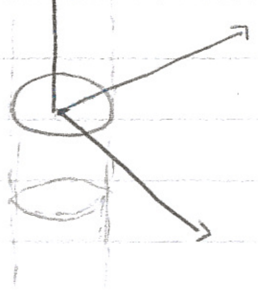
είναι εύχρηστα γιατί: $(\cosh\theta)' = \sinh x$, $(\sinh\theta)' = \cosh x$

$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.}$

για την παραμετρ. της υπερβολής έχουμε:

$\vec{\gamma}(\theta) = (a\cosh\theta, b\sinh\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

▸ Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμ.

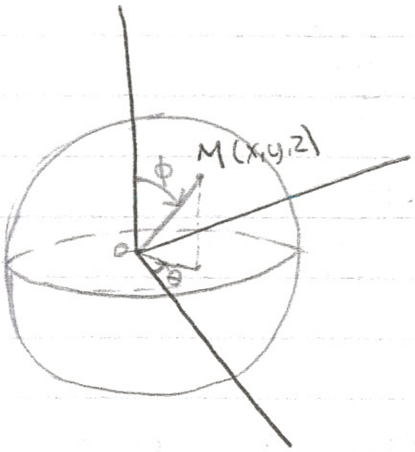


$x^2 + y^2 \leq \rho \qquad \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = \rho^2, z \in \mathbb{R}\}$.

$(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

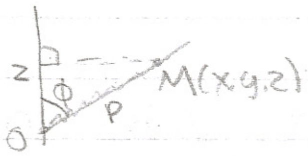
ουσιαστικά "τρέχει" το θ και το z.

Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

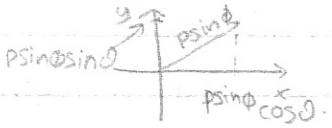


$$x^2+y^2+z^2=\rho^2 \quad , \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$0\leq\varphi\leq\pi$$
$$0\leq\theta<2\pi$$



$$\left.\begin{aligned} z&=\rho\cos\varphi\\ x&=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y&=\rho\sin\varphi\sin\theta\end{aligned}\right\}$$



Πέμπτη 15/02/18

(σπείρα από προηγούμενο)

Πραγματική μεταβλητή t (παράμετρος)

$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \to \vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Έλλειψη : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Παραβολή. $y^2 = 2px$

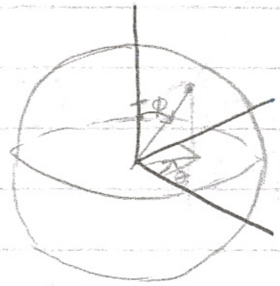
Πολικές : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ $\quad 0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \rho$

Κυλινδρικές : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$ $\quad$ -//-

Σφαιρικές : $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$

$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$

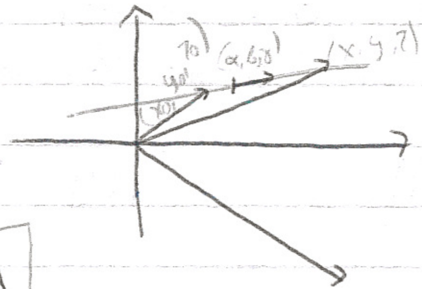
$z = \rho\cos\varphi$



$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

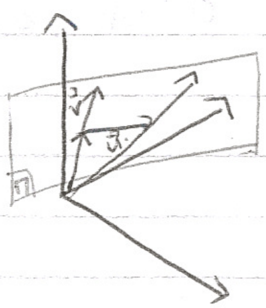
$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ $\qquad \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)$

Ευθεία $\quad (x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, \gamma)$



Επίπεδο: (Π) : (x,y,z)

1º Παραμετρική μορφή επιπέδου



$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{u} + s\vec{v}$, $t, s \in \mathbb{R}$

2º Καρτεσιανή μορφή επιπέδου.

$(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$

κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $\vec{n} \perp (\Pi)$:

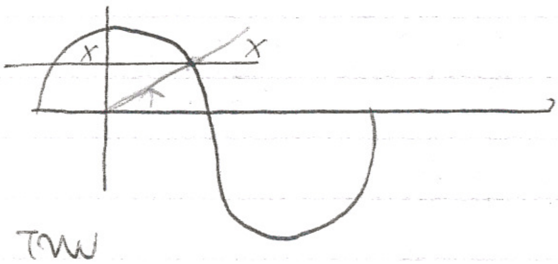
$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad$ (όπου $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$)

π.χ $(\cos\theta, \sin\theta)$ $\theta \in [0, \pi/2]$. → σε καρτεσιανές συντ.

• Για να μετατρέψω από παραμετρικές σε καρτεσιανές αρκεί να απαλείψω την παράμετρο

$x = \cos\theta \qquad \theta = \cos^{-1} x$

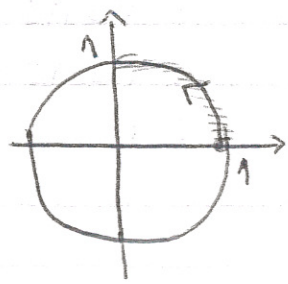
$y = \sin\theta \qquad y = \sin(\cos^{-1} x)$



Ισοδύναμα, μπορώ να βρω την καρτεσ. μορφή με πολικές συντετ.

$x^2 = \cos^2\theta \qquad x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$y^2 = \sin^2\theta \qquad \boxed{x^2 + y^2 = 1}$



(Για μια καμπύλη ψάχνω τα ακραία σημεία).

• $\vec{r}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}'(\theta) = (-a\sin\theta, b\cos\theta) \qquad \vec{r}'(0) = (0, b)$

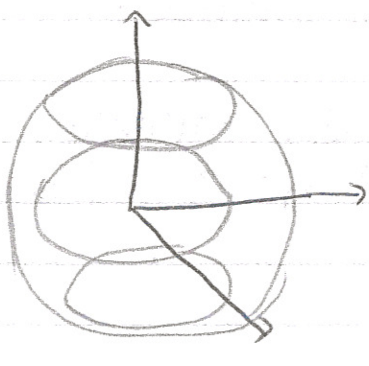
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \vec{r}(t) = (a\cosh t, b\sinh t) \quad t \in \mathbb{R}.$

• $\vec{r}(t) = (\frac{t^2}{2p}, t) \qquad y = 2px$

Ειδικές Επιφάνειες

• Σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \rho > 0$



Για να σχεδιάσω την παραπάνω σφαίρω, παίρνω $z=0$, δηλ είναι στο xy-επίπεδο και έχω $x^2+y^2=\rho^2$ δηλ. κύκλο.

$x^2+y^2=\rho^2-z^2$

Θα πάρω περιπτώσεις:

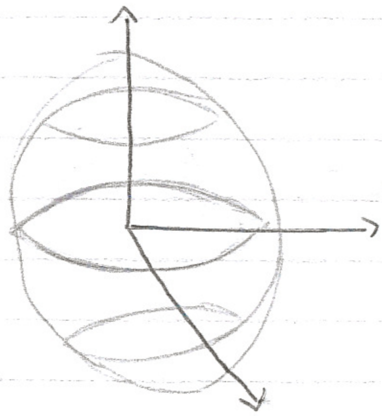
→ αν $\rho^2-z^2<0 \Leftrightarrow \rho^2<z^2 \Leftrightarrow z^2-\rho^2>0$, $(z-\rho)(z+\rho)>0$

$z\in(-\infty,-\rho)\cup(\rho,+\infty)$

→ αν $\rho^2-z^2=0 \Leftrightarrow (z=\pm\rho$

→ αν $\rho^2-z^2>0 \Leftrightarrow -\rho<z<\rho$.

◦ Ελλειψοειδές $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$.



(Με ανάλογο τρόπο όπως σφαίρα)

$z=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1-\dfrac{z^2}{\gamma^2}$.

→ αν $1-\dfrac{z^2}{\gamma^2}<0 \Leftrightarrow z\in(-\infty,-\gamma)\cup(\gamma,+\infty)$

→ αν $1-\dfrac{z^2}{\gamma^2}=0 \Leftrightarrow$

→ αν $1-\dfrac{z^2}{\gamma^2}>0 \Leftrightarrow \mathbb{R}^2$.

▶ $Ax^2+By^2+\Gamma z^2+2\Delta xy+2Exz+2Zyz+Hx+My+Nz=C$.

(i) Ελλειψοειδές $x^2/a^2+y^2/\beta^2+z^2/\gamma^2=1$

(ii) Κύλινδρος

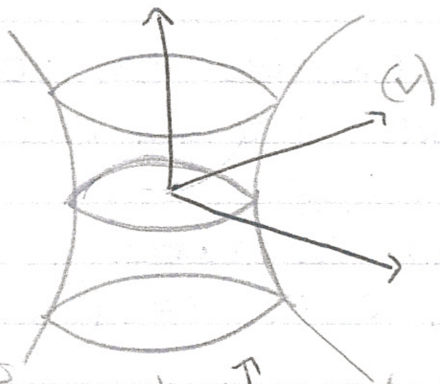
(iii) Ελλειπτικό Παραβολοειδές $z=x^2/a^2+y^2/\beta^2$

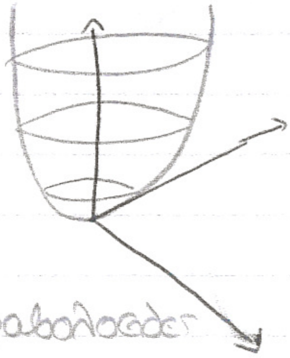
(iv) Υπερβολικό Παραβολοειδές $z=x^2/a^2-y^2/\beta^2$

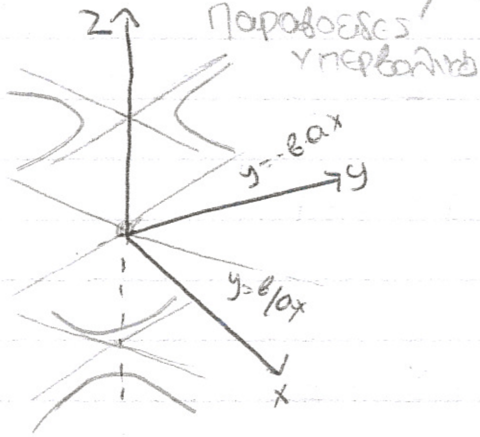
Υπερβολοειδή

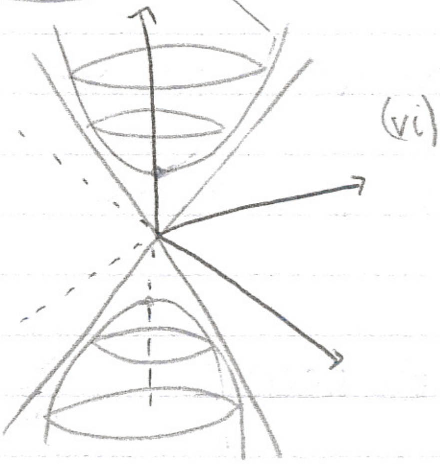
(v) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ (ένα φύλλο)

(vi) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1$ (δύο φύλλα)

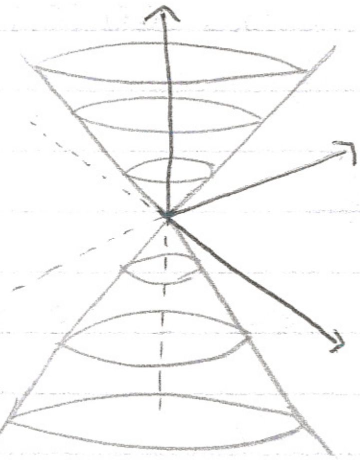








(vii) κώνος $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$



Παραμετρικοποίηση

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$

$\frac{x}{a} = \sin\varphi \cos\theta$

$\frac{y}{\beta} = \sin\varphi \sin\theta$

$\frac{z}{\gamma} = \cos\varphi$

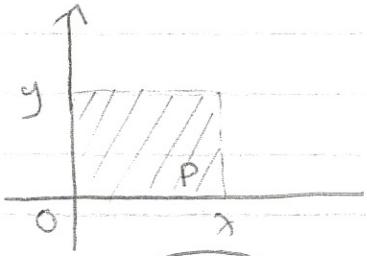
$\left(\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1 \right.$

$\neq$ σφαιρικές $\left. \right)$

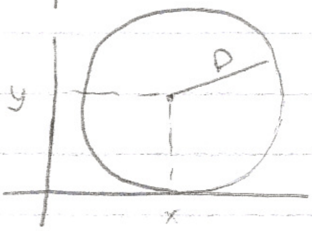
Αποστασn απο επιπεδο $(\Pi): Ax + By + \Gamma z = \Delta$

$$d((x_1, y_1, z_1), (\Pi)) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 - \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Ο κύκλος στο επιπεδο ($\mathbb{R}^2$)



$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

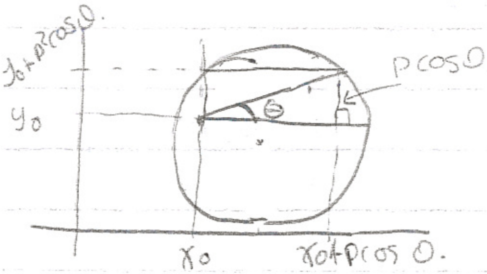


$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$x - x_0 = \rho\cos\theta$ $\Big\}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

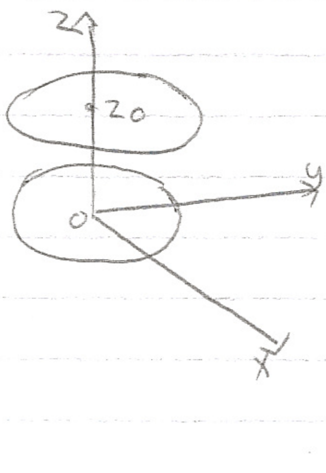
$y - y_0 = \rho\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi))$

Πλήρες συντεταγμένες του κύκλου



$$x = x_0 + \rho\cos\theta$$

Ο κύκλος στον χώρο ($\mathbb{R}^3$)



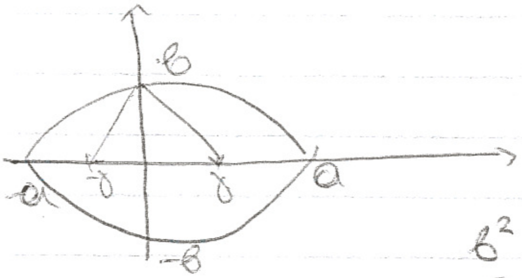
$x^2 + y^2 = \rho^2$ $x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$$(x, y, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$

$0 \le \theta \le 2\pi, \ z \in \mathbb{R}$

Ελλειψη στο επιπεδο



$2\beta > 2\gamma$

$\varsigma - \gamma + \alpha + \gamma = 2\alpha$ (ετσι βγαινει το $= 2\ell$

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\ell.$

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha$ δηλ $\alpha = \ell.$

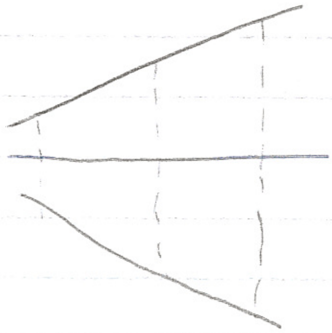
$d_1 = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$

$d_2 = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$

αρα $d_1 + d_2 = 2\alpha = 2\ell$

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (καρτεσιανη μορφη)

(παραμετρικη μορφη) $x = \alpha\cos\theta$, $y = \beta\sin\theta$ $0 \le \theta < 2\pi$

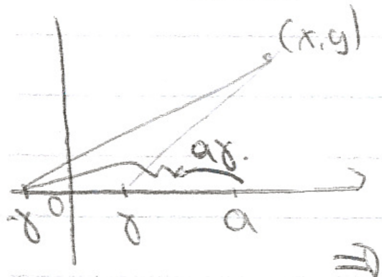


Ο $x'x$ ειναι αξονας συμμετριας στην ελλειψη αν $(x,y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x,-y) \in \mathcal{E}.$

Ο $y'y$ ειναι αξονας συμμετριας.

$\frac{(a-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}$ $x = x_0 + \alpha\cos\theta$ $y = y_0 + \beta\sin\theta$ $\theta \in [0,2$

Υπερβολη



$2\ell = \alpha + \gamma - (\alpha - \gamma) \Rightarrow$

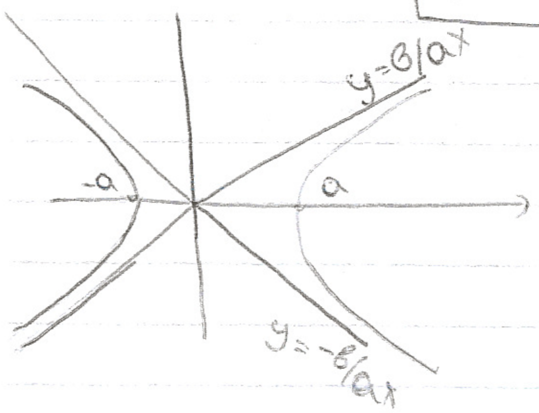
$\ell = \gamma$

$d_1 = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$

$d_2 = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$

$2\gamma = \sqrt{(\alpha+\gamma)^2 + y^2} - \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + y^2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.}$



Τρίτη 20/02/18

Επαναληπτικά:

· Για να περιγράψω παραμετρικά μια καμπύλη χρειάζομαι μια παράμετρο. $(x,y,z)=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

· Ευθεία: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(\alpha,\beta,\gamma)$ $t\in\mathbb{R}$

· Επίπεδο: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+s(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ $t,s\in\mathbb{R}$

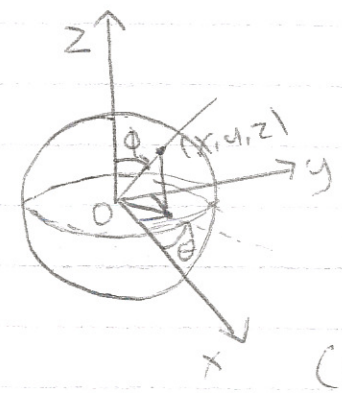
⇔ όπου $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\times(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ ⇔

$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\vec{n}=0$ $\vec{n}=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\times(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$

· Επιφάνεια: $(x,y,z)=(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$ $(t,s)\in\mathbb{R}^2$

· $x^2+y^2+z^2=1$ (σφαιρικές συντεταγμ.)

(· γιατί η σφαίρα είναι επιφάνεια και όχι καμπύλη?)



$x=\sin\varphi\cos\theta$ $0\le\varphi\le\pi$

$y=\sin\varphi\sin\theta$ $0\le\theta<2\pi$

$z=\cos\varphi$

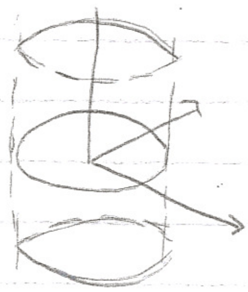
$(x,y,z)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$

Είναι καμπύλη γιατί χρειαζόμαστε δύο παραμέτρους.

Κύλινδροι

· ελλειπτ. κύλινδρος $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(a\cos\theta,b\sin\theta,z)$



· υπερβολ. κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(a\cosh t,b\sinh t,z)$ $t,z\in\mathbb{R}$

· Παραβολ. κύλινδρος: $y^2=2px$, $z\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)=(\frac{t^2}{2p},t,s)$ $t,s\in\mathbb{R}$

__Ελλειψοειδές__ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$

$(x,y,z)=(a\sin\varphi\cos\theta,\ \beta\sin\varphi\sin\theta,\ \gamma\cdot\cos\varphi)$ $0\le\varphi\le\pi$

όπου $\begin{cases} x/a=\sin\varphi\cos\theta \\ y/\beta=\sin\varphi\sin\theta \\ z/\gamma=\cos\varphi. \end{cases}$ $0\le\theta<2\pi.$

__Παραβολοειδές__

→ __Ελλειπτικό__ $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$

Μια $(x,y,z)=(x,\ y,\ x^2/a^2+y^2/\beta^2)$ $(x,y)\in\mathbb{R}.$

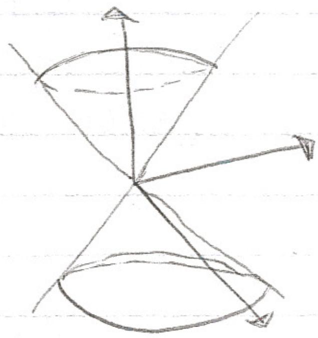
όμως $(x,y,z)=(\rho a\cos\theta,\ \rho\beta\sin\theta,\ \rho^2)$, $\rho\geq0$, $\theta\in[0,2\pi)$

→ __Υπερβολικό__ $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}$

Μια $(x,y,z)=\left(x,y,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}\right)$ $x,y\in\mathbb{R}$

όμως $(x,y,z)=(\rho a\cosh t,\ \rho\beta\sinh t,\ \rho^2)$ $\rho\geq0$, $t\in\mathbb{R}$..

__Κώνος__ $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$



Μια $(x,y,z)=\left(x,y,\sqrt{x^2/a^2+y^2/\beta^2}\right)$ $x,y\in\mathbb{R}$

$=(x,y,-\sqrt{\ldots}\ )$

όμως $(x,y,z)=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \pm\rho)$

$\rho\geq0.$

__Υπερβολοειδές__ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ (ένα φύλλο) (i)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=-1$ (δύο φύλλα)

$\frac{x}{a}=\cos\theta\cosh t$

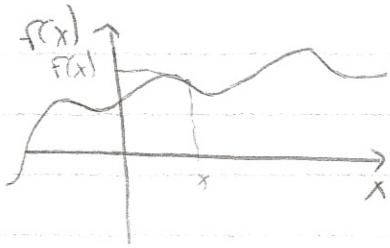
(i) $(x,y,z)=(a\cos\theta\cosh t,\ \beta\sin\theta\cosh t,\ \gamma\sinh t)$

$\frac{y}{\beta}=\sin\theta\cosh t$ $\theta\in[0,2\pi)$ $t\in\mathbb{R}$

$\frac{z}{\gamma}=\sinh t$ (ii) $(x,y,z)=(a\cos\theta\sinh t,\ \beta\sin\theta\sinh t,\ \gamma\cosh t)$.

Γράφημα Συνάρτησης

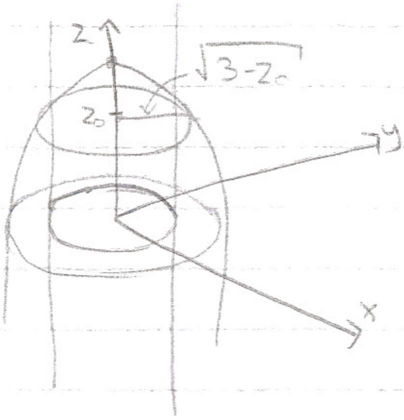
▸ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (πραγμ. συνάρτηση)
$G_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$
(μονοσήμαντα)



▸ $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$

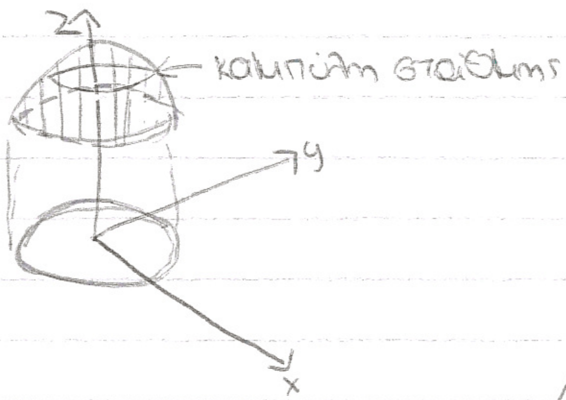
Παράδειγμα $f: \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$(z=) f(x,y) = 3 - x^2 - y^2, \quad x^2+y^2<1$

$G_f = \{(x, y, 3-x^2-y^2),\ x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2<1\}$



Έστω $z_0 \in \mathbb{R}$
$z_0 = 3 - x^2 - y^2$
$\boxed{x^2+y^2 = 3-z_0}\ (=\rho^2)$ i) αν $3-z_0>0 \Leftrightarrow z_0<3$
ii) αν $3-z_0=0 \Leftrightarrow z_0=3$
iii) αν $3-z_0<0 \Leftrightarrow z_0<3$
αδύνατο

ουσιαστικά έχω:



▸ $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$
$G_f = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y,z) \in \Omega\}$
$w_0 = f(x,y,z)$

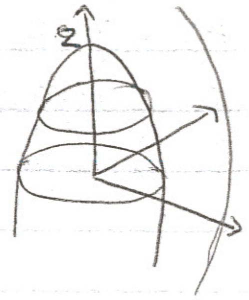
τη διαφορά με το $\mathbb{R}^2$ είναι ότι στο $\mathbb{R}^3$ αντί για καμπύλη στάθμης έχω επιφάνεια στάθμης

Πέμπτη 22/09/18

• <u>Καμπύλη στάθμης</u>

$z=f(x,y)$, $z=c$ $\boxed{f(x,y)=c}$

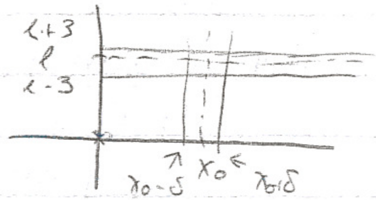
π.χ. $z=2-x^2-y^2=c \iff x^2+y^2=2-c$ $\quad 2-c>0 \iff c<2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =(\sqrt{2-c})^2$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0, πότε $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ $\quad \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

π.χ. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \Rightarrow \exists \delta_0>0$:
$1-\delta_0<x<1+\delta_0$
$x\neq 1. \Rightarrow \frac{3}{2}<f(x)<\frac{5}{2}$



▶ <u>Ανοιχτό σύνολο και όρια</u>

• $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Το Ω το λέμε ανοιχτό τότε $\forall a\in\Omega, \exists \delta>0$:
$\forall x\ |x-a|<\delta \Rightarrow x\in A$.

(π.χ. $B(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$

Το B είναι ανοιχτό.

• $\forall a\in\Omega, \exists \delta>0 \quad B(a,\delta)\subseteq\Omega$.

Αν $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ($\Omega\subseteq\mathbb{R}^{2 \text{ ή } 3}$) και είτε $(x_0,y_0)\in\Omega$, $\exists \delta>0: B((x_0,y_0),\delta)\subseteq$ είτε είναι συνοριακό σημείο του Ω.

$(x_0,y_0): B((x_0,y_0),\delta)\subseteq\Omega$ (στο πεδίο ορισμού της f)

$\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell}$ $\quad \forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0\ (\delta_1\le\delta)$ τω : $\forall X=(x,y)$,
$X\in B(x_0,\delta_1)\setminus\{x_0\}$: $|f(X)-\ell|<\varepsilon$

· Τα όρια στην μία μεταβλητή είναι ανάλογα των ορίων στις πολλές μεταβλητές.

Πράξεις ορίων

1 μεταβλητή:

Αν $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ και $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \Rightarrow$

(i) $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

2,3 μεταβλητές

Αν $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ και $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x,y) = m \Rightarrow$

(i) $\exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (f+g)(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x,y)$

Αποδ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 \ \forall \overset{(x,y)}{x} \in B(x_0, \delta_1) \setminus \{x_0\} : |f(x) - \ell| < \varepsilon/2$

$\exists \delta_2 \ \forall x \in B(x_0, \delta_2) \setminus \{x_0\} \quad |g(x) - m| < \varepsilon/2$

Επιλέγω $\underline{\delta = \min(\delta_1, \delta_2)}$, τότε $\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$

$|g(x) - m| < \varepsilon/2$ τότε $|(f+g)(x) - (\ell+m)| = |(f(x) - \ell) + (g(x) - m)|$

$\leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(ii) Έστω $f: \mathbb{R} \to A \ (A \subseteq \mathbb{R})$, $g: A \to \mathbb{R}$

$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(f \circ g: A \to \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)))$

Αν $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. $\exists \lim_{y \to \ell} g(y) = m$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = m$

(ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g \circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

Αν $\exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ και $\exists \lim_{t \to \ell} g(t) = m$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g \circ f(x,y) = m$

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \to x_0$

$\Rightarrow f(x_n) \to \ell$

(iii)

Πότε $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$?

Αν $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \to x_0$, $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \to x_0$ και

$f(x_n) \to \ell$ $f(y_n) \to m$ $m \neq \ell$

Παράδειγμα $\quad \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y}{x^2 + y^2}$?

Έχω απροσδιοριστία. Θα χρησιμοποιήσω πολικές.

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad xy = \rho^2\cos\theta\sin\theta$ $\quad x^2+y^2 = \rho^2$ $\quad \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \sin\theta\cos\theta$

$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \rho\to 0^+$

Άρα, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \sin\theta\cos\theta = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cos 2\theta}{2}$ $\begin{cases} \theta = 0 \to 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \to 1/2. \end{cases}$

$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,x)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$

Τρίτη 27/02/18

<u>Όρια συναρτήσεων</u>

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Πότε $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$?

Για $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \mid 0 < |(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

Αν $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = m$ • $\Rightarrow \lim\limits_{X\to X_0} (f \pm g)(X) = \lim\limits_{X\to X_0} f(X) \pm \lim\limits_{X\to X_0} g(X)$

• $\lim\limits_{X\to X_0} (fg)(X) = \lim\limits_{X\to X_0} f(X) \cdot \lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ (όπου $X = (x,y)$, $X_0 = (x_0,y_0)$)

• Εάν $m \neq 0$ ορίζεται $\lim\limits_{X\to X_0} \dfrac{f(X)}{g(X)} = \dfrac{\lim\limits_{X\to X_0} f(X)}{\lim\limits_{X\to X_0} g(X)}$

Έχουμε $\exists \lim\limits_{X\to X_0} g(X) = m \neq 0 \begin{cases} m>0 \\ m<0 \end{cases}$, τότε:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |X - X_0| < \delta \Rightarrow |g(X) - m| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < g(X) - m < \varepsilon \Leftrightarrow$
$m - \varepsilon < g(X) < \varepsilon + m$

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{m}{2} > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ τ.ω $0 < |X - X_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(X) - m| < \frac{m}{2}$
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{m}{2} < g(X)} < \frac{3m}{2}$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = 0$ και $g: B(X_0, 1) \to \mathbb{R}$ φραγμένη

τότε:

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{X\to X_0} (f \cdot g)(X) = 0$

$g: \quad \to \mathbb{R}$ φραγμένη όταν $\exists M > 0 : |g(X)| \leq M \quad \forall X \in B(X_0, 1) \setminus \{X_0\}$
$\Leftrightarrow 0 < |X - X_0| < 1$

Έστω $\varepsilon > 0$ επειδή $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = 0$ $\exists \delta > 0$ $|f(X)| < \varepsilon/M$, $0 < |X - X_0| < \delta$

τότε για $0 < |X - X_0| < \delta$ $\delta < 1$ έχουμε $|f(X) g(X)| = |f(X)| \cdot |g(X)|$
$\leq M |f(X)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

$\exists \lim\limits_{X\to X_0} f(X) g(X) = 0$

Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω $f, g, h : B(x_0, 1) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ τ.ω $g(x) \le f(x) \le h(x)$ $\forall x \in B(x_0, 1) \setminus \{x_0\}$

Εάν επίσης $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, $\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ τότε:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

• Έστω $f : B(x_0, 1) \setminus \{x_0\} \to (\ell - 1, \ell + 1) \setminus \{\ell\}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$g : (\ell - 1, \ell + 1) \setminus \{\ell\} \to \mathbb{R}$, $\lim_{t \to \ell} g(t) = m$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{t \to \ell} g(t) = m$

Αποδ

Επειδή $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \delta_1 > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ $(\delta < 1)$ $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow$ $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Επειδή $\lim_{t \to \ell} g(t) = m$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ $\boxed{0 < |t - \ell| < \delta_1}^{*} \Rightarrow |g(t) - m| < \varepsilon$

τότε

$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \boxed{0 < |f(x) - \ell| < \delta_1}$

Οπότε στην * θέτω $t = f(x)$ οπότε παίρνω $|g(f(x)) - m| < \varepsilon$ για $0 < |x - x_0| < \delta_2$

Συνέχεια

Πότε η f είναι συνεχής στο x_0?

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, να υπάρχει $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ και μάλιστα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Παράδειγμα 1

Αποδ. ότι υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

Κάνουμε αλλαγή ώστε ο παρανομαστής να δηλώσει "απόσταση" στο τετράγωνο.

Αποδ

Θέτουμε $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, επειδή $\lim (x, y) \to (0, 0) \iff$ $\lim \rho = 0^+$

Τοτε εχουμε $\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{(\rho\cos\theta)\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} = \rho\cos\theta\sin^2\theta$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |\rho\cos\theta\sin^2\theta| = \rho|\cos\theta|\sin^2\theta$$
$$\leq \rho\cdot 1\cdot 1 = \rho$$

Επειδη $\lim_{\rho\to 0^+}\rho = 0$ ανεξαρτητα απο θ (ομοιομορφα ως προς θ)

$$-\rho \leq \frac{xy^2}{x^2+y^2} \leq \rho \iff -\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\to \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |x|\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|$$

$$\to \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right||y|$$

Ανισότητα: $2|xy| \leq |x|^2+|y|^2 \iff$

$(|x|-|y|)^2 \geq 0 \quad x,y\in\mathbb{R}^2$

$|x\cdot y| \leq |x|\cdot|y| \iff |(x_1y_1+\dots+x_ny_n)| \leq \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$

($\to x,y>0$, $q,p>0$, $xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ $\left(x\leq\frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}\right)$)

Παραδειγμα 2

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^6+y^2}$ υπαρχει? $\boxed{y=\lambda x}$

$$\frac{x^3y}{x^6+y^2} = \frac{\lambda x^4}{x^6+\lambda^2x^2} = \frac{\lambda x^2}{x^4+\lambda^2}$$

$\boxed{y=x^3}$

$$\frac{x^3y}{x^6+y^2} = \frac{x^6}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}.$$

ουσιαστικα θελω $x^6+y^2=\rho^2$ $\left.\begin{array}{l} y=\rho\sin\theta \\ x^3=\rho\cos\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \rho=\sqrt{x^6+y^2}$

$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^6+y^2}}$

$\cos\theta = \frac{x^3}{\sqrt{x^6+y^2}}$

Αρα $\frac{x^3y}{x^6+y^2} = \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2} = \sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}.$

($\cos\theta = a$, $\sin\theta = b$, ποια ειναι λυση πρεπει $a^2+b^2=1$)

Παράδειγμα 3

Έστω $a,b>0$ Υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a|y|^b}{x^2+|y|^3}$?

Αποδ

$x=\rho\cos\theta$

$|y|^{3/2}=\rho\sin\theta$, $|y|=\rho^{2/3}(\sin^2\theta)^{1/3}$

$\rho^2=x^2+|y|^3$

$$\frac{|x|^a|y|^b}{x^2+|y|^3}=\frac{|\rho\cos\theta|^a|\rho^{2/3}\sin^{2/3}\theta|^b}{\rho^2}=\rho^{a+\frac{2b}{3}-2}|\cos\theta|^a|\sin\theta|^{2b/3}$$
$$\leq \rho^{a+\frac{2b}{3}-2}$$

→ Εάν $a+\frac{2b}{3}-2>0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^a|y|^b}{x^2+|y|^3}=\lim_{\rho\to0^+}\rho^{a+\frac{2b}{3}-2}=0.$$

→ Εάν $a+\frac{2b}{3}-2=0$

• αν $\theta=0$ $\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{|x|^a\cdot|y|^b}{x^2+|y|^3}=0.$

• αν $\theta=\frac{\pi}{4}$ $\lim\frac{|x|^a|y|^b}{x^2+|y|^3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{a+\frac{2b}{3}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\neq0.$

→ Εάν $a+\frac{2b}{3}-2<0$

αν επιλέξω $\theta=\frac{\pi}{4}$ έπεται $\frac{|x|^a|y|^b}{x^2+|y|^3}=\rho^{a+\frac{2b}{3}-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{a+\frac{2b}{3}}\xrightarrow[\rho\to0^+]{}+\infty$

Πέμπτη 01/03/18

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω
$|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \delta$.

$x \in \mathbb{R}^2$ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$
$f_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $i = 1,2,3$
$\sqrt{(f_1(x) - \ell_1)^2 + (f_2(x) - \ell_2)^2 + (f_3(x) - \ell_3)^2} < \varepsilon \Rightarrow$
$\sqrt{(f_i(x) - \ell_i)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$

Επιλέγοντας $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ τότε για $0 < |x - x_0| < \delta$
$|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$ τότε έχουμε
$|f(x) - \ell| = \sqrt{(f_1(x) - \ell_1)^2 + (f_2(x) - \ell_2)^2 + (f_3(x) - \ell_3)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{3}$

Παραγώγιση

(για μια μεταβλητή)

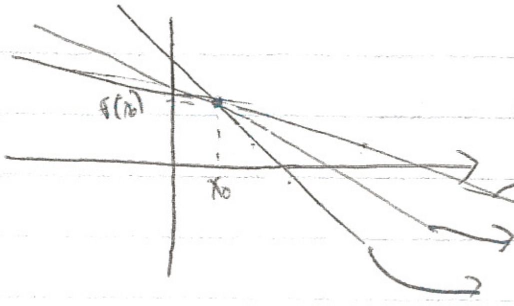
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0)$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta$ $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow$

$\left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$
$\Leftrightarrow$

Γεωμετρική Ερμηνεία

$-\varepsilon|x - x_0| < f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < \varepsilon|x - x_0|$

(i) $x_0 + \delta > x > x_0$: $-\varepsilon(x - x_0) < f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < \varepsilon(x - x_0)$



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$f(x) < f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$
$y = f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$
$y = f(x) + f(x_0)(x - x_0)$
$y = f(x) + (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)$

(δύο μεταβλητές)

• $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = 2-x^2-y^2$, $x,y\in\mathbb{R}$

Έστω (x_0,y_0)

Πως είναι για την μία μεταβλ.
Το y είναι φιξαρισμένο

$$\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \frac{2-x^2-y_0^2-(2-x_0^2-y_0^2)}{x-x_0} = \frac{-x^2+x_0^2}{x-x_0}$$

$$= \frac{(x_0-x)(x_0+x)}{x-x_0} = -(x+x_0)$$

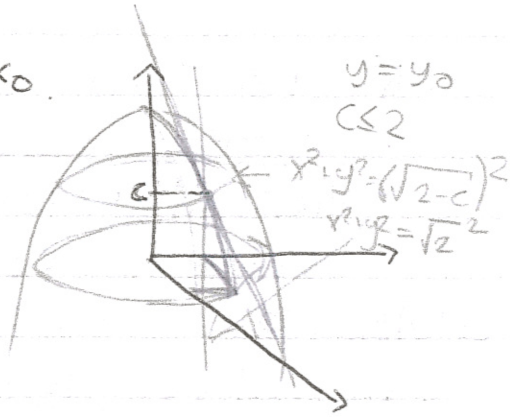
Μερική Παράγωγος:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) =: \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = -2x_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

ή

$f_y(x,y_0)$



Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Ερώτημα: είναι η f συνεχής στο (x_0,y_0)? Όχι!

π.χ

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , xy\neq 0 \\ -1 & , xy=0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1-(-1)}{0} = 0.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = 0$$

Εφαπτόμενο Επίπεδο

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Ορισμός

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) αν υπάρχουν: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0.$$

δηλ. $\forall \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0:\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{|x-x_0|}\right|<\varepsilon$$

Πρόταση

Αν f παραγ. στο (x_0,y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0,y_0)

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$

$$\Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right|+\varepsilon|x-x_0|$$

$$(\delta\le\varepsilon)\qquad \le \varepsilon\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|+\varepsilon\right)$$

• $f(x,y)=2-x^2-y^2$ είναι παραγωγ. σε κάθε σημείο;

→ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-2x_0$

→ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-2y_0$

$$\rightarrow \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{|X-X_0|}$$

$$=\frac{2-x^2-y^2-2+x_0^2+y_0^2+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)}{|X-X_0|}$$

$$=\frac{2-x^2-y^2-2+x_0^2+y_0^2+2x_0x-2x_0^2+2y_0y-2y_0^2}{|X-X_0|}$$

$$=\frac{-x^2+2x_0x-x_0^2-y^2+2y_0y-y_0^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=\frac{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=$$

$$=-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=-|X-X_0| \Rightarrow \lim_{X\to X_0}(\dots)=\lim_{X\to X_0}(-|X-X_0|)=0$$

όπου $X=(x,y)$
$X_0=(x_0,y_0)$

Δινεται η συνάρτηση
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Είναι η f παραγ. στο (0,0)?

Θεώρημα
Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\forall (x,y)$
$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
και $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς
τοτε
$\Rightarrow$ f παραγωγ. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Απαντηση.

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$? $\quad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x-0} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ Επίσης $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)}{|x-0|}$$

$$= \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0x - 0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$y=0$: $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \ldots = 0$

$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

Άρα f δεν είναι παραγ. στο (0,0).

Δευτέρα 06/03/18

$f: U \to \mathbb{R}$, U ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
$(x_0, y_0) \in U$
Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0)?
<u>Απ</u> (i) Θα πρέπει αρχικά να υπάρχει (∃) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

"εφαπτόμενο επίπεδο" που διέρχεται από το $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(ii) $$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}$$

$f: U \to \mathbb{R}$, $\overset{\text{ανοιχτό}}{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ (x_0, y_0, z_0)
Η f παραγ. στο $(x_0, y_0, z_0) \in U$ θα πρέπει ∃ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$

και

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0, y_0, z_0)} \frac{f(x,y,z) - f(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0)}{\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|}$$

▶ <u>Κλίση της f στο (x_0, y_0)</u> ή (ανάδελτα)

$f(x, y)$ $\qquad$ $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$

Τότε $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

Αν $f(x,y,z)$, η κλίση είναι:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$$

και αντίστοιχα

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

(διανυσματική συνάρτηση)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{R}^{1\times n}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{R}^{n\times 1}$

$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \nabla f_i(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right).$

$$DF(x_0 := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα

Έστω $f: U \to \mathbb{R}^m$, U ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ και γνωρίζουμε ότι υπάρχουν όλοι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ $\forall x \in U$ $\forall j = 1, \dots, n$ $i = 1, \dots, m$ και επιπρόσθετα ο $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ είναι συνεχείς

Τότε η f είναι παραγωγ. στο U.

Απόδειξη

Θα το αποδείξουμε αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δηλ αν η f είναι τέτοια ώστε να $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Τότε θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγ. συνάρτηση

// Πρόχειρο $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$

Το $f(x,y)-f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x,y)-f(x,y_0)} + f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$

ΘΜΤ ως προς την y μεταβλητή

στο διάστημα y, y_0 $\exists\ \xi$ $y_0<\xi<y$ στο ενδιάμεσο διάστημα
$\xi=\xi(x,y_0,y)$ ώστε $f(x,y)-f(x,y_0)=(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)$
Αντίστοιχα, $\exists\ \eta$ ώστε $f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)$
$f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y-y_0)$

$\Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y-y_0)$
$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=$

$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\dfrac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\dfrac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$

όμως $\eta\to x_0$ καθώς $(x,y)\to(x_0,y_0)$
$\xi\to y_0$ ... και λόγω συνέχειας των $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ έχουμε: //

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)=0$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=0$

και $\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|\leq 1$

$\left|\dfrac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|\leq 1$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(g\circ f)x = g(f(x))$
Πότε η $g\circ f$ είναι παραγωγ. και πόσο είναι η $(g\circ f)'(x)$
Θέλουμε:

f παραγωγ. στο x_0 και g παραγ. στο $f(x_0)$
$\Rightarrow g\circ f$ παραγ. στο x_0

$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$ (1)

Συμβολισμός
$g\circ f = h$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx}$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$
$\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $(f\circ\vec{\gamma})(t) = f(\vec{\gamma}(t))$ $t\in\mathbb{R}$
$f\circ\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Πότε η $f\circ\vec{\gamma}$ είναι παραγωγ. στο $t_0\in\mathbb{R}$
Αν $\vec{\gamma}$ παραγ. στο t_0 και η f είναι παραγ. στο $\vec{\gamma}(t_0)$
τότε η $(f\circ\vec{\gamma})$ είναι παραγ. στο t_0 και μάλιστα

$$\boxed{(f\circ\vec{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\vec{\gamma}(t_0))\cdot\vec{\gamma}'(t_0)}$$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\vec{\gamma}'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \gamma_3'(t_0))$

$$\nabla f(\vec{\gamma}(t_0))\cdot\vec{\gamma}'(t_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\gamma}(t_0)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\gamma}(t_0)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{\gamma}(t_0))\right)\cdot(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \gamma_3'(t_0))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\gamma}(t_0))\gamma_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\gamma}(t_0))\gamma_2'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{\gamma}(t_0))\cdot\gamma_3'(t_0)$$

$$Df(\vec{\gamma}(t_0)) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\gamma}(t_0)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\gamma}(t_0)) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{\gamma}(t_0))\right]$$ ((οι συνιστώσες γίνονται γραμμές)

$$D\gamma(t_0) = \begin{bmatrix}\gamma_1'(t_0)\\ \gamma_2'(t_0)\\ \gamma_3'(t_0)\end{bmatrix}$$

$$D f(\vec{\gamma}(t_0))\, D\vec{\gamma}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\gamma_1' + \frac{\partial f}{\partial y}\gamma_2' + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma_3'$$

Παράδειγμα

Δίνεται η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = e^{x^2} + 2ye^{y^2} + e^{z^2}$ $x,y,z \in \mathbb{R}$
και $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{\gamma}(t) = (t, \sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$
Αποδείξτε ότι η $f \circ \vec{\gamma}$ είναι παραγ. και βρείτε την παράγωγο αυτής.

1η $f(\vec{\gamma}(t)) = e^{t^2} + 2\sin t\, e^{\sin^2 t} + e^{\cos^2 t}$

η $f \circ \vec{\gamma}$ είναι παραγωγ. σαν άθροισμα και σύνθεση παραγωγ. συναρτήσεων. και μάλιστα

$$\frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = e^{t^2}\cdot(t^2)' + 2\cos t\, e^{\sin^2 t} + 2\sin t\, e^{\sin^2 t}(\sin^2 t)' + e^{\cos^2 t}(\cos^2 t)'$$

$$= 2te^{t^2} + 2\cos t\, e^{\sin^2 t} + 4\sin^2 t\cos t\, e^{\sin^2 t} - 2\sin t\cos t\, e^{\cos^2 t}$$

Πέμπτη 08/03/18

$f(x,y,z) = e^{x^2} + 2y e^{y^2} + e^{z^2}$ $\qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\gamma(t) = (t, \sin t, \cos t) \quad t \in \mathbb{R}$ $\qquad Df \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$D\gamma \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Στόχος εύρεση $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$

<u>1ος τρόπος</u> (με αντικατάσταση)

$(f\circ\gamma)(t) = f(t, \sin t, \cos t) = e^{t^2} + 2\sin t\, e^{\sin^2 t} + e^{\cos^2 t}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = 2t e^{t^2} + 2\cos t\, e^{\sin^2 t} + 4\sin^2 t \cos t\, e^{\sin^2 t} - 2\sin t \cos t\, e^{\cos^2 t}$

<u>2ος τρόπος</u> (πινάκων)

Έστω $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ παραγωγίσιμη συνάρτηση

$(Dg)(x,y)$

$$(Dg)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g_2(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial z} g_3(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g_3(x,y) \end{bmatrix}$$

$g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y))$

Γενικότερα, Αν $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\mathbb{R}^{m\times n}}{Dg} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x,y) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x,y) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x,y) & \cdots & \frac{\partial g_3}{\partial x_n}(x,y) \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

Στο παράδειγμα

$D(f\circ\gamma)(t) = (Df)(\gamma(t))\, D\gamma(t)$

Αν $Df(x,y,z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial f}{\partial y} \ \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \left[2x e^{x^2} \quad 2(1+2y^2)e^{y^2} \quad 2z e^{z^2}\right]$

όμως εμείς δεν το θέλουμε για (x,y,z) αλλά για t.

$$(D\gamma)(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$(Df)(\gamma(t))(D\gamma)(t) = \begin{bmatrix} 2te^{t^2} & 2(1+2\sin^2 t)\cdot e^{\sin^2 t} & 2\cos t e^{\cos^2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$
$$= 2te^{t^2} + 2\cos t\,(1+2\sin^2 t) - 2\sin t \cos t\, e^{\cos^2 t}$$

Παράδειγμα 2

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x,y) = (x^2+1, xy, yx^2)$ και
$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $g(x,y,z) = (x^2, y^2)$
Βρείτε $D(f\circ g)(x,y,z)$

Απ

Οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι πολυωνυμικές σε κάθε συνιστώσα οπότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς συναρτήσεις και επομένως από το θεώρημα πρόκειται για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Οπότε $D(f\circ g)(x,y,z) = (Df)(g(x,y,z))\cdot(Dg)(x,y,z)$

$Df \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$Dg \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow D(f\circ g) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$(Df)(u,v) = \begin{bmatrix} \partial/\partial u\, f_1 & \partial/\partial v\, f_1 \\ \partial/\partial u\, f_2 & \partial/\partial v\, f_2 \\ \partial/\partial u\, f_3 & \partial/\partial v\, f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 2uv & u^2 \end{bmatrix}$$

$$(Df)(g(x,y,z)) = (Df)(x^2,y^2) = \begin{bmatrix} 2x^2 & 0 \\ y^2 & x^2 \\ 2x^2y^2 & x\cdot \end{bmatrix}$$

$$(Dg)(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial x & \partial g_1/\partial y & \partial g_1/\partial z \\ \partial g_2/\partial x & \partial g_2/\partial y & \partial g_2/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (D(f\circ g))(x,y,z) = (Df)(g(x,y,z)) \cdot (Dg)(x,y,z) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x^2 & 0 \\ y^2 & x^2 \\ 2x^2y^2 & x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3 & 0 & 0 \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 4x^3y^2 & 2x^4y & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω $f,g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έστω $f(x_0,y_0,z_0) = g(x_0,y_0,z_0)$ | $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έστω $f(x_0)=g(x_0)$

· Πότε f,g τέμνονται εφαπτομενικά στο (x_0,y_0,z_0);

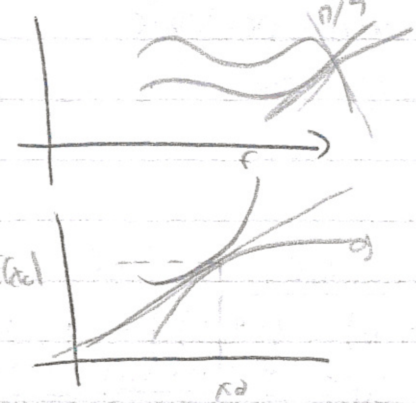
Έχουμε $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$g(x,y,z) = -x^2+y^2+z^2$ τέμνονται στο 0

αφού $f(0,0,0)=0=g(0,0,0)$

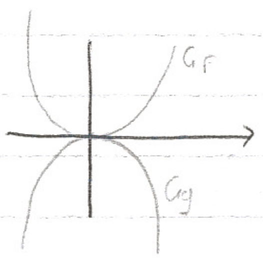
Πότε τέμνονται εφαπτομενικά κατά συγκεκριμένη γωνία;

Τέμνονται εφαπτομενικά σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες ευθείες ταυτίζονται για τον $\mathbb{R}^2$ και τα επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$



$f(x)=x^2$

$g(x)=-x^2$



$f'(0) = (2x)\big|_{x=0} = 0$

Εφαπτομ. ευθεία $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0$

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\cancel{+z^2}$

$f(x,y) = -x^2$ $\cancel{+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\Rightarrow f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$

Εφαπτομ. επίπεδο $z = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) = 0.$

Άρα θέλω μια έξτρα μεταβλητή.

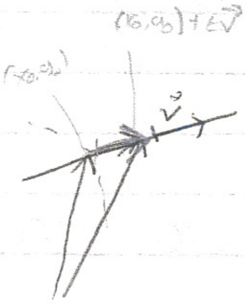
Παράγωγος σε κατεύθυνση

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Έστω (x_0, y_0) τυχαίο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

Επιλέγω τυχαία $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ με $|\vec{v}| = 1$



$$\lim_{t \to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t\vec{v}) - f(x_0,y_0)}{t}$$: στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

$= D_{\vec{v}} f(x_0,y_0)$

μαθηματική ορολογία:

παράγωγος της f σε κατεύθυνση $\vec{v}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) \quad \frac{d}{dt} f((x_0,y_0)+t\vec{v})\Big|_{t=0}$.

Έστω $\vec{v} = (1,0)$ ~~ή $(-1,0)$~~

$f((x_0,y_0) + t(1,0)) = f(x_0+t, y_0)$

τότε $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

αν $\vec{v} = (0,1)$ ~~ή $(0,-1)$~~

τότε $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0,y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

για $\vec{v} = (-1,0)$

$$\frac{f(\overbrace{x_0-t}^{x},y_0) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$t \to 0 \quad x \to x_0$

$x = x_0 - t \iff t = x_0 - x$

$$= \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x_0 - x} = -\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

όμως $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(-1,0))-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Αντίστοιχα και για $\vec{v}=(0,-1)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0-t)-f(x_0,y_0)}{t} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

(δεν χρειάζεται να είναι συνεχής) μο

*

(ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0,y_0) \Rightarrow$
$\forall \vec{v},\ |\vec{v}|=1 \quad \exists \quad D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$

(Ερώτηση: Αν $\forall |\vec{v}|=1,\ \exists\ D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) \Rightarrow$ f παραγ. στο (x_0,y_0)?)

Αν f παραγ. στο (x_0,y_0) $\quad \gamma(t)=(x_0,y_0)+t\vec{v}$
$D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$ $\quad \gamma'(t)=\vec{v}$

$$D(f(\gamma(t)))\Big|_{t=0} = (Df)(\gamma(0))\cdot D(\gamma(0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= v_1\frac{\partial f}{\partial x} + v_2\frac{\partial f}{\partial y}$$

Άρα $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\vec{v}$

Τρίτη 13/03/18

Άσκηση 3 από Φυλλάδιο 2:

Κάθε ευθεία στον κώνο $x^2+y^2-z^2=0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια βρείτε όλες τις ευθείες της μορφής $(x,y,z)=t(a,b,c)$ $t\in\mathbb{R}$ που βρίσκονται πάνω στον κώνο.

Λύση

Έστω $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)$ $t\in\mathbb{R}$ είναι ευθεία του κώνο.

Το (x_0,y_0,z_0) είναι σημείο του κώνου.

και $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Επομένως έχουμε $\left.\begin{array}{l} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \\ z=z_0+tc \end{array}\right\}$

$(x_0+ta)^2+(y_0+tb)^2-(z_0+tc)^2=0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$x_0^2+y_0^2-z_0^2+2(x_0a+y_0b-z_0c)t+(a^2+b^2-c^2)t^2=0$

Ουσιαστικά έχω πολυώνυμο β' βαθμού του t.

$\Leftrightarrow$ (1) $\left[\begin{array}{l} x_0^2+y_0^2-z_0^2=0 \\ x_0a+y_0b-z_0c=0 \\ a^2+b^2-c^2=0 \end{array}\right.$

Πότε η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Υπάρχει για $t\in\mathbb{R}$ τ.ω: $\left\{\begin{array}{l} x_0+ta=0 \\ y_0+tb=0 \\ z_0+tc=0 \end{array}\right.$

Το $c\neq0$, γιατί αν $c=0 \Rightarrow a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$ άρα το $(a,b,c)=(0,0,0)$ αδύνατο, άρα $c\neq0$.

$t=\frac{-z_0}{c}$

Θα αποδείξω ότι: $\left\{\begin{array}{l} x_0-\frac{z_0}{c}a=0 \Leftrightarrow cx_0-az_0=0 \\ y_0-\frac{z_0}{c}b=0 \Leftrightarrow cy_0-bz_0=0 \end{array}\right.$

(1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2+y_0^2=z_0^2 \\ \boxed{x_0a+y_0b=z_0c} \\ a^2+b^2=c^2 \end{array}\right.$ $\rightarrow$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των (x_0,y_0) και (a,b)

$$\Rightarrow (z_0 c)^2 = z_0^2 c^2 \iff (x_0 a + y_0 b)^2 = (a^2+b^2)(x_0^2+y_0^2)$$

$$\left[(xy)^2 = |x|^2|y|^2 \cos^2\theta \Rightarrow y = \lambda x \right]$$

αρα $(x_0, y_0) = \lambda(a, b)$

$x_0 = \lambda a$

$y_0 = \lambda b$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \lambda^2(a^2+b^2) = z_0^2 \\ a^2+b^2 = c^2 \\ \lambda(a^2+b^2) = z_0 c \end{array}\right. \Rightarrow \lambda c^2 = z_0 c \Rightarrow \boxed{z_0 = \lambda c}$$

$c x_0 - a z_0 = \lambda a c - a \lambda c = 0.$

$c y_0 - b z_0 = \lambda b c - b \lambda c = 0.$ Αρα η ευθεια διερχεται απο την αρχη των αξονων.

Αφού όλες οι ευθείες διερχονται απο την αρχη των αξονων θα έχουμε: $(x,y,z) = t(a,b,c)$, $t \in \mathbb{R}$.

θα πρεπει $a^2+b^2 = c^2$ $\quad a = c\cos\theta$

$b = c\sin\theta$

Αρα $(x,y,z) = t(c\cos\theta, c\sin\theta, c)$

$= tc(\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$\Rightarrow (x,y,z) = s(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ $s \in \mathbb{R}$ $\theta \in [0, 2\pi)$

<u>2η λυση</u>-αποδ.

Θα αποδ. αρχικα ότι διερχεται απο ένα σημείο της μορφης $(x_0, y_0, 0)$

Αυτό συμβαίνει επιλέγοντας $t = -\frac{z_0}{c}$

Η ευθεια έχει τη μορφη:

$(x,y,z) = (x_0, y_0, 0) + t(a,b,c)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = tc \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0+ta)^2 + (y_0+tb)^2 - t^2c^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + 2(a x_0 + b y_0)t - t^2c^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

αρα $x_0^2 + y_0^2 = 0 \iff x_0 = y_0 = 0.$

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(x_0^2+y_0^2+z_0^2) - \left((a,b,c)\cdot(x_0,y_0,z_0)\right)^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ x_0 & z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2$$

(ταυτότητα Lagrange)

Άσκηση 1

Έστω $f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v,\ u^2 - v^2)$

$g(x,y) = (e^{x-y},\ x-y)$

Να υπολογίσετε $D(f \circ g)(1,1)$

Λύση

$$Dh(1,1) = \left[\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1)\right]$$

$$\nabla h(1,1) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial h}{\partial y}(1,1)\right)$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(\ldots) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}(\ldots) \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(e^{x-y}, x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(f \circ g)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{x-y}) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x-y)$$

$$D(f \circ g)(x,y) = Df(g(x,y)) \cdot Dg(x,y)$$

$$(Dg)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} e^{x-y} & \frac{\partial}{\partial y} e^{x-y} \\ \frac{\partial}{\partial x}(x-y) & \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{x-y} \frac{\partial}{\partial x}(x-y) & e^{x-y} \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(DF)(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(u-1)} & -e^{v} \\ 2u & -2v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (DF)(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(e^{x-y}-1)} & -e^{x-y} \\ 2e^{x-y} & -2(x-y) \end{bmatrix}$$

$$D(f\circ g)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(e^{x-y}-1)} & -e^{x-y} \\ 2e^{x-y} & -2(x-y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{e^{x-y}}{\cos^2(e^{x-y}-1)} - e^{x-y} & -\frac{e^{x-y}}{\cos^2(e^{x-y}-1)} + e^{x-y} \\ 2e^{2(x-y)} - 2(x-y) & -2e^{2(x-y)} + 2(x-y) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D(f\circ g)(1,1) = \begin{bmatrix} 1-1 & -\frac{1}{1}+1 \\ 2-2(1-1) & -2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Έστω f διαφορίσιμη και θέτουμε $f(x,y) = F(r,\theta)$ όπου $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Να υπολογίσετε $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

Λύση

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= f_x(x,y)\cdot\cos\theta + f_y(x,y)\cdot\sin\theta$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

$$F(r,\theta) = f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}\left(f(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(f(x,y)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$= -r\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (*)$$

$$r^2 = x^2+y^2 \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

παραγ. μια ισοτητας ως προς την παραμετρο x

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \qquad = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

αριστερο μελο

$$= -\sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial\theta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

δεξιο μελος

$$(*) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r}\left(\sqrt{x^2+y^2}, \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial F}{\partial \theta}(\quad)\frac{y}{x^2+y^2}$$

Πέμπτη 15/03/18

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

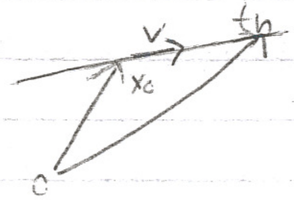
$x_0=(x_0, y_0, \dots x_{n_0})$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \ni v$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ή $Df_v(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$

$u \in |v|=1$

Αν f παραγωγ. στο $x_0 \Rightarrow$ Πρόταση

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \nabla f(x_0)\, v$



<u>Παραδοχή</u>: Αν f παραγ. στο x_0, $\vec{\gamma}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ τ.ω $\gamma(t_0)=x_0$ και γ παραγωγίσιμη στο $t_0 \Rightarrow$
$f\circ\gamma$ είναι παραγ. στο t_0 και μάλιστα $(f\circ\gamma)'(t_0)=\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)$
$\gamma(t)=x_0+tv$ (παίρνω την πιο απλή που έχει κλίση το x_0)(?)

$t=0 \Rightarrow (f\circ\gamma)(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_0+tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$
$= \nabla f(x_0)\cdot\vec{v}$

$\left(f(x,y)=\frac{|x|^{\alpha}|y|^{c}}{x^2+y^{c}} \right)$

Έχουμε την f στο x_0 παραγωγ. στο x_0.
$\forall v \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\nabla f(x_0)\cdot v$
Υπάρχουν κατευθύνσεις v που μεγιστοποιείται ο ρυθμός μεταβολής στο x_0? (αντίστοιχα, να ελαχιστοποιούνται).

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\nabla f(x_0)\cdot v = |\nabla f(x_0)|\cdot \cancel{|v|}^{1}\cdot\cos\theta.$

<u>για μέγιστο ρυθμό μετ.</u> επιλέγω $\theta=0$ επειδή $\cos\theta \overset{\theta=0}{=} 1$.

άρα $v \parallel \nabla f(x_0)\ (\neq 0)$

άρα $v=\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

αντίστοιχα <u>για ελάχιστο ρυθμό μετ.</u> επιλέγω $\theta=\pi$ $\cos\theta=-1$

άρα

$v=-\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

Για τυχαίο v $\quad \nabla f(x_0)\left(-\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}\right) < \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \le \nabla f(x_0)\cdot\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \Rightarrow$

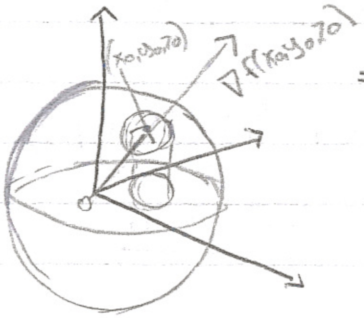
$$-|\nabla f(x_0)| \le \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \le |\nabla f(x_0)|$$

Επιφάνεια στάθμης $\quad (f(x,y,z)$, επιφ $\Rightarrow f(x,y,z)=c$

(Θέλω να δω τι σχέση έχει η κλίση της συν. με την επιφάνεια)

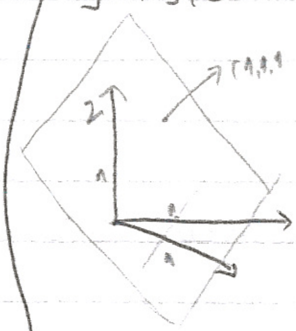
Π.χ $\quad f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad x^2+y^2+z^2=c$

Άρα $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right) = 2(x_0,y_0,z_0)$



$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0,z_0) = 2(x_0,y_0,z_0)$

$g(x,y,z) = x+y+z$



$g(x,y,z)=c \Leftrightarrow x+y+z=1$

$\nabla g(x,y,z)=(1,1,1) \perp$

$\Leftrightarrow (x-1)+y+z=0 \Leftrightarrow$

$(x-1,y,z)\cdot(1,1,1)=0$

Τώρα για την σφαίρα: $\quad$ Έστω $x^2+y^2+z^2=1 \quad (x_0,y_0,z_0)$

Έστω $\boxed{z_0>0}$

$\Rightarrow z_0^2 = 1-x_0^2-y_0^2 \Rightarrow z_0 = \pm\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

$z_0 = +\sqrt{1-x_0^2-y_0^2} \qquad z=\sqrt{1-x^2-y^2}=\phi(x,y)$

$z=\phi(x_0,y_0)+\nabla\phi(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) \Rightarrow$

$z=\phi(x_0,y_0)+\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

$\varphi_x(x,y) = \frac{1}{2}(\quad)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$\varphi_x(x_0,y_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}$

$\varphi_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ $\qquad$ $\varphi_y(x_0,y_0) = -\frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}$

Άρα $z = \sqrt{1-x_0^2-y_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(x-x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(y-y_0) \iff$ $z_0=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

$z = z_0 - \frac{x_0(x-x_0)}{z_0} - \frac{y_0(y-y_0)}{z_0}$

$\iff (z-z_0)z_0 + (x-x_0)x_0 + (y-y_0)y_0 = 0$: εφαπτ. επίπεδο στο (x_0,y_0,z_0)

$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\cdot(x_0,y_0,z_0) = 0 \Rightarrow$

$(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2}\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ $\perp$ εφαπτ. επίπεδο που διέρχεται από το (x_0,y_0,z_0).

<u>Θεώρημα</u>

Έστω ότι η $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι C^1 συνάρτηση (C^1: συνεχής κ' υπάρχουν μερικές) και (x_0,y_0,z_0) σημείο της επιφάνειας στάθμης $f(x,y,z)=c$.

Τότε $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια στάθμης στο (x_0,y_0,z_0)

<u>Αποδ</u>

Έστω $\gamma:\mathbb{R}\to$ Επιφάνεια $\subseteq\mathbb{R}^3$, παραγωγίσιμη $\gamma(0)=(x_0,y_0,z_0)$.

Τότε $f(\gamma(t))=c$ $\forall t\in(-\delta,\delta)$ για $\delta>0$

Επειδή η $f\circ\gamma$ είναι διαφορίσιμη $\Rightarrow \frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(t)) = \frac{d}{dt}c$

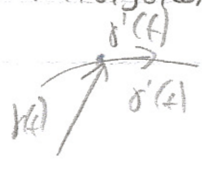
Από κανόνα της αλυσίδας

$\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0 \quad t\in(-\delta,\delta)$

και για $t=0$ $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\gamma'(0)=0 \Rightarrow \forall\ \gamma'(0)$ εφαπτομ. διάνυσμα

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ $\perp$ εφαπτομ. επίπεδο

όπου το εφαπτομ. επίπεδο είναι: $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\nabla f(x_0,y_0,z_0)=0$



Θεώρημα

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g: V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ U, V ανοιχτά

και $g(V) \subseteq U$

$\Rightarrow$ $f \circ g: V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

Αν η g είναι παραγωγ. στο $x_0 \in V$ και η f είναι παραγωγ. στο $g(x_0) \in U$ τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει

$$D(f \circ g)(x_0) = (Df)(g(x_0)) \cdot (Dg)(x_0)$$

Αποδ

Υπενθύμιση: Αν $g: V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ τότε $(Dg)(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times k}$

και $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0) - (Dg)(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$ $(x - x_0)$ → $k \times 1$ διάνυσμα

$$\left(\underbrace{(Dg)(x_0) \cdot (x - x_0)}_{n \times 1} \right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|g(x) - g(x_0) - (Dg)(x_0)(x - x_0)|_{\mathbb{R}^n}}{|x - x_0|_{\mathbb{R}^k}} = 0$$

Τρίτη 20/03/18 *
(από προηγούμενο, περιληπτικά)
Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad |\vec{v}|=1$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \nabla f(x_0)\cdot v$

Εάν η f παραγωγ. στο x_0.

Αν $f(x,y,z)=0$ είναι μία επιφάνεια στάθμης τότε:
$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp$ επιφάνεια στο (x_0,y_0,z_0)
Εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (x_0,y_0,z_0) είναι:
$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$
$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

Μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση της παραγώγου κατά κατεύθυνση (ρυθμού μεταβολής), στην διεύθυνση $v=\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f(x_0)\cdot v = \nabla f(x_0)\cdot \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} = |\nabla f(x_0)|$

Ενώ η επιλογή $v=-\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ μας δίνει ρυθμό μεταβολής $-|\nabla f(x_0)|$

<u>Θεώρημα</u>
Έστω $g: V\subseteq\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ V ανοιχτό $\subseteq\mathbb{R}^k$
$f: U\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ U -||- $\subseteq\mathbb{R}^n$
ώστε $g(V)\subseteq U$ τότε ορίζεται $f\circ g: V\to\mathbb{R}^m$
Εάν επιπρόσθετα, η g είναι παραγ. στο $x_0\in V$ και f παραγ. στο $g(x_0)\in U$ τότε η $f\circ g$ παραγ. στο x_0 και μάλιστα
$D(f\circ g)(x_0) = (Df)(g(x_0))\cdot Dg(x_0)$.

Η g είναι παραγ. στο x_0.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$$

$Dg(x_0)\in \mathbb{R}^{n\times k}$
$x-x_0 \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ $\Rightarrow Dg(x_0)\cdot(x-x_0)\in \mathbb{R}^{n\times 1}$
$g: V\to \mathbb{R}^{n\times 1}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 \ : \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow \dfrac{|g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|}<\varepsilon.$

Αντίστοιχα, επειδή η f παραγ. στο $g(x_0)=z_0$ έχουμε $z_0=g(x_0)$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-Df(z_0)(z-z_0)}{|z-z_0|}=0$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta'=\delta(\varepsilon): \ |z-z_0|<\delta' \Rightarrow \dfrac{|f(z)-f(z_0)-Df(z_0)(z-z_0)|}{|z-z_0|}<\varepsilon$

θα αποδείξουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))-D(f(g(x_0)))(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$

μάλιστα θέλουμε

$$\lim_{x\to x_0.} \frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)-(Df)(g(x_0))Dg(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$$

Για το $\varepsilon>0$ έχουμε

$|(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)-Df(g(x_0))\cdot Dg(x_0)(x-x_0)| = |f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot Dg(x_0)(x-x_0)|$

Από τον ορισμό της παραγώγ. της f στο $g(x_0)=z_0$ έχουμε ότι
$\exists\ \delta'=\delta'(\varepsilon)$:

$z=g(x)$ $\quad |f(z)-f(g(x_0))-Df(g(x_0))\cdot(z-g(x_0))| < \varepsilon|z-g(x_0)|.$ (1)

$\forall\ \delta'>0,\ \exists\ \delta''>0 \quad |x-x_0|<\delta'' \Rightarrow$
$\dfrac{|g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|}<\delta'$

$$\Leftrightarrow |g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x-x_0)| < \delta' |x-x_0| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |g(x)-g(x_0)| - |Dg(x_0)(x-x_0)| < \delta' |x-x_0|$$
$$|g(x)-g(x_0)| < |Dg(x_0)(x-x_0)| + \delta' |x-x_0|$$
$$< (\underbrace{\|Dg(x_0)\| + \delta'}_{M}) |x-x_0| \overset{\text{θέτω}}{<} \delta' \qquad (|g(x)-g(x_0)| \leq (1+M)|x-x_0|)$$

Επιλέγω δ'' τ.ω.:

$$(M+1)\delta'' < \delta' \qquad \text{π.χ } \delta'' = \frac{\delta'}{2(M+1)}$$

Οπότε για $|x-x_0| < \delta'' = \dfrac{\delta'}{2(M+1)}$

$\Rightarrow |g(x)-g(x_0)| < \delta'$ στην (2), θέτω $z = g(x)$ και τότε παίρνουμε

$$|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0))| \leq \varepsilon |g(x)-g(x_0)|$$

Όμως $|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0)) Dg(x_0)(x-x_0)| =$

$$|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0)) + Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0)) - Df(g(x_0)) Dg(x_0)(x-x_0)|$$

$$\leq |f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0))| + |Df(g(x_0))\{(g(x)-g(x_0)) - Dg(x_0)(x-x_0)\}|$$

$$\leq \varepsilon |g(x)-g(x_0)| + \|Df(g(x_0))\| \, |g(x)-g(x_0) - Dg(x_0)(x-x_0)|$$
$$\leq \varepsilon (1+M)|x-x_0| + M\delta' |x-x_0|$$
$$= \{\varepsilon(1+M) + M\delta'\} |x-x_0| < \varepsilon [1 + M + \tfrac{1}{2}] |x-x_0|$$
$$< \varepsilon |x-x_0|$$

$\blacksquare$

Επιφάνεια στάθμης $F(x,y,z)=c$

$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$

$\nabla F(0,0,f(0,0))=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),1\right)$

$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),1\right)(x,y,z-f(0,0))=0$

Αν $z=f(x,y)$ στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ το εφαπτ. επίπεδο είναι:

$z-f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$

$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

Θέτουμε $F(x,y,z)=c$

$z\overset{\shortparallel}{-}f(x,y)=0$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ $F(x_0,y_0,z_0)=0 \Leftrightarrow z_0=f(x_0,y_0)$

$\overset{\Delta}{=}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial F}{\partial y}(\ldots),\frac{\partial F}{\partial z}(\ldots)\right)$

$=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1\right)$

Εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0,y_0,z_0)

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$

$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1\right)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-f(x_0,y_0))=0 \Leftrightarrow$

$z-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

Ερώτημα: Μπορεί $\forall\vec{v}$, $|\vec{v}|$, $\exists\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ <u>και</u> f να μην είναι παραγ. στο (0,0)?

<u>ΝΑΙ</u>.

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{t^a|v_1|^a\cdot t^b|v_2|^b}{t^2}-0}{t}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^a|y|^b}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$v=(v_1,v_2)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(tv)}{t}=\lim\frac{\frac{t^{a+b}|v_1|^a|v_2|^b}{t^2v_1^2+t^4\cdot v_2^4}}{t}$$

$$=\lim t^{a+b-3}\frac{|v_1|^a|v_2|^b}{v_1^2+t^2v_2^4}$$

$v_1\neq 0$

$a+b-3>0$

* *

Πίσω η συνέχεια

Παράγωγος ανώτερης τάξης

$z=f(x,y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)$ $\quad$ f παραγ. στο x_0.

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right)$$

Θεώρημα

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ώστε 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη

Τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)$

(**)

$\alpha+\beta-3>0$

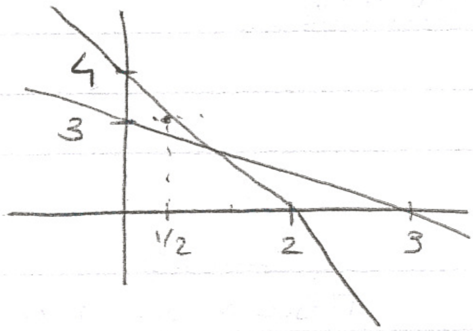
Ποτε ΜΗ δεν είναι συνεχής;

$x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\theta$

$$\frac{\rho^{\alpha}|\cos\theta|^{\alpha}\rho^{\beta/2}|\sin\theta|^{\beta/2}}{\rho^2}=\rho^{\alpha+\frac{\beta}{2}-2}|\cos\theta|^{\alpha}|\sin\theta|^{\beta/2}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\frac{\beta}{2}-2\le 0\\ \alpha+\beta-3>0\end{pmatrix}$$



$a+3/2-2=0$

$\Rightarrow a=1/2$

$\beta=4-2a=3$

Πέμπτη 22/03/18

<u>Άσκηση</u>

Έστω $f: \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$ και γνωρίζουμε ότι:

$f(1,0) \leq f(x,y) \leq f(0,0)$ και η f είναι C^2 συνάρτηση. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε

<u>Λύση</u>

Απλοποίηση: <u>(αν είχα μία μεταβλητή)</u> $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$ $\forall x \in [-1,1]$

f: 2 φορές παραγωγ. και ξέρω ότι $\underline{f'(0)=0}$ από Fermat.

δηλ. $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \underline{f'(x_0)=0}$ και $f''(x_0) \leq 0$

$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) \leq 0$ (1)

$x - x_0 < 0$ (2) $\quad$ (1)/(2) $\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) \geq 0$

$x - x_0 > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0.$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_0)=0}$$

Για το 1 έχω μόνο: $x < 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \Rightarrow$

$f(x) - f(1) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq 0 \quad \lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq 0$

$= f'(1) \leq 0$

<u>(για τις δύο μεταβλητές)</u>

Για εσωτερικό σημείο

$f(x,0) \leq f(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$

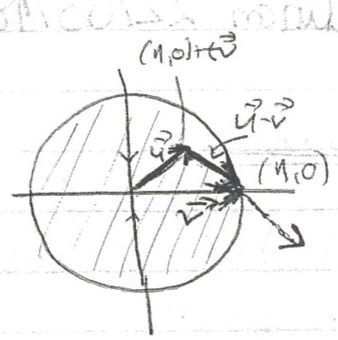
$f(0,y) \leq f(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Για συνοριακό σημείο

$f(1,0) \leq f(x,y) \Rightarrow f(x,0) - f(1,0) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1} \leq 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) \leq 0$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((1,0)+tv)-f(1,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)v.$$



$(1,0)+tv = \vec{u}$

$\cancel{\alpha}(1,0)=\vec{v}$

$t\vec{v} = \vec{u}-\vec{v} \Rightarrow \vec{v}-\vec{u} = -t\vec{v}, \quad t>0.$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ οπου $-v_1 \geq 0 \Leftrightarrow v_1 \leq 0.$

$f((1,0)+tv) \geq f(1,0) \quad \forall t>0 \quad v: v_1 \leq 0$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f((1,0)+t\vec{v})-f(1,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\vec{v}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)\cdot(v_1, v_2) \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}v_2 \geq 0$$

$v_1 < 0$
$v_1^2+v_2^2=1$
$\Rightarrow v_1 = -\sqrt{1-v_2^2}$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{1-v_2^2} + \frac{\partial f}{\partial y}v_2 \geq 0 \quad \forall v_2 \in (-1,1) \Rightarrow v_2 = 1.$$

$v_1 = 0 \quad \begin{cases} v_2 = 1 \\ v_2 = -1 \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\cdot 1 \geq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(-1) \geq 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \leq 0$

$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$f(\gamma(\theta)) \qquad \theta = 0$

$(f\circ\gamma)(0) \leq (f\circ\gamma)(\theta) \Rightarrow (f\circ\gamma)'(0) = 0.$

$\nabla f(1,0)\cdot\gamma'(0) = 0$

$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta) \qquad \nabla f(1,0)\cdot(0,1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

Άσκηση

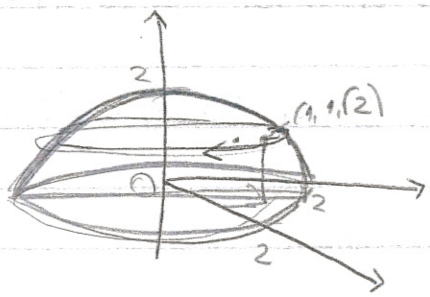
Είμαστε στη μισή σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$, στο σημείο $(1,1)$, $z\geq 0$

(i) Σε ποια κατεύθυνση να κινηθούμε για να διατηρηθεί το ύψος;

(ii) Σε ποια κατεύθυνση να κινηθούμε ώστε να έχουμε τη μέγιστη δυνατή αύξηση;

Λύση

$(x(t), y(t), z(t))$ η καμπύλη



Είμαστε στη σφαίρα άρα:

$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=4$

(i) Για να διατηρηθεί το ύψος $\Rightarrow z(t)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2(t)+y^2(t)=2$. $\quad x(0)=1,\ y(0)=1$

$\Rightarrow 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \quad \forall t\in(-1,1)$

$\overset{t=0}{\Rightarrow} 2x(0)\cdot x'(0)+2y(0)y'(0)=0 \Leftrightarrow \quad x'(0)+y'(0)=0$

$\gamma(t)=(x(t),y(t),\sqrt{2})$, $\gamma'(0)=(x'(0),y'(0),0)=(x'(0),-x'(0),0)$
$=x'(0)(1,-1,0)$

$\vec{v}=\dfrac{x'(0)}{\sqrt{(x'(0))^2 2}}(1,-1,0)=\dfrac{x'(0)}{|x'(0)|}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

(ii). $z'(0)$.

$\cancel{2}x(0)x'(0)+\cancel{2}y(0)y'(0)+\cancel{2}z(0)z'(0)=0$ (συνέχεια την επόμενη φορά)

$x'(0)+y'(0)+\sqrt{2}z'(0)=0$

$z'(0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'(0),y'(0))$.

Θεώρημα: Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που είναι $C^2(\mathbb{R}^n)$ τότε.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} F(x_1, \ldots, x_n)$$

Απόδ. Θα αποδείξουμε ότι αν $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} g(x,y)$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x,y) - g(x,y_0) - g(x_0,y) + g(x_0,y_0) = Q(x,y)$$

(για τον συμβ. του βιβλίου) $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f(x,y,z) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}(f)\right)\right)$

ή $f_{zyx}(x,y,z)$

(ΘΜΤ $f(x,y) - f(x_0,y) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{x_0 x}, y)$)

καλούμε $x_0 < \xi < x$ $\quad y_0 < m < y$.

$$G(x) = g(x,y) - g(x,y_0)$$

$$Q(x,y) = G(x) - G(x_0) = (x-x_0) G'(\xi) = (x-x_0)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(\xi,y_0)\right)$$

$$= (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} g(\xi, m)$$

καλούμε $H(y) = g(x,y) - g(x_0,y)$, $H(y_0) = g(x,y_0) - g(x_0,y_0)$

$$Q(x,y) = H(y) - H(y_0) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} (y-y_0)\left(\frac{\partial}{\partial y} g(x,m_2) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,m_2)\right)$$

$\exists\, m_2 : y_0 < m_2 < y$

$$= (y-y_0)(x-x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} g(\xi_2, m_2)\right)\right)$$

$$= (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(\xi_2, m_2)$$

$x_0 < \xi, \xi_1 < x$

$y_0 < m, m_1 < y$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(\xi_1, m_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(\xi, m) \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\ldots) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\ldots) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

Τρίτη 27/03/18

Άσκηση

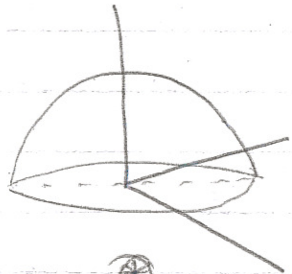
Ένα βουνό περιγράφεται από $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$

Κάποια στιγμή είμαστε στο σημείο $(1,1,\sqrt{2})$

(i) Σε ποια κατεύθυνση μπορούμε να κινηθούμε για να διατηρεί το ύψος;

(ii) Σε ποια κατεύθυνση -||- ώστε να έχουμε τη μέγιστη αύξηση ρυθμού ύψους

Λύση



$\gamma:(-1,1)\to\mathbb{R}^3$

$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$

Για να είναι πάνω στη σφαίρα θα πρέπει

$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=4$, $t\in(-1,1)$ (*)

Αν είναι παραγωγίσιμη τότε $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)+2z(t)z'(t)=0$

i) Για να διατηρείται το ύψος, $z(t)=\sqrt{2}\Rightarrow z'(t)=0$

Οπότε $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0 \Rightarrow x'(0)+y'(0)=0 \Rightarrow$

Για $t=0$ $x(0)=1$, $y(0)=1$

$y'(0)=-x'(0)$

$(x'(0),y'(0),z'(0))=(x'(0),-x'(0),0)=x'(0)(1,-1,0)$

$\vec{v}=\frac{x'(0)}{|x'(0)|}(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$

$x'(0)>0$: $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$

$x'(0)<0$: $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$

ii) Για $t=0$ $(x(0),y(0),z(0))=(1,1,\sqrt{2})$

οπότε από (*) $x'(0)+y'(0)+\sqrt{2}z'(0)=0$

$z'(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x'(0)+y'(0))=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x'(0),y'(0))(1,1)=(x'(0),y'(0))(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\leq|\vec{a}||\vec{b}|,\quad \vec{b}=\lambda\vec{a},\ \lambda>0.\right.$

$\vec{b}=(x'(0),y'(0))$

$\vec{a}=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$

$\leq|\vec{a}||(x'(0),y'(0))|\cdot\cos(\dots)$

$z'(0)\leq\lambda\underbrace{(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})}_{1}\Rightarrow=\lambda$

$\Rightarrow z'(0) \le \lambda.$

Όμως $v=(x'(0),y'(0),z'(0))=(x'(0),y'(0),-1/\sqrt{2}(x'(0),y'(0)))$

$|\vec{v}|=1 \iff (x'(0))^2+(y'(0))^2+(z'(0))^2=1.$

$z'(0)=(x'(0),y'(0))\cdot(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}) \le \sqrt{x'(0)^2+(y'(0))^2}\cdot 1$

$(z'(0))^2 \le (x'(0))^2+(y'(0))^2$

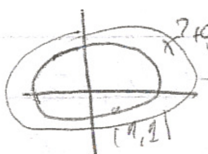
$\Rightarrow 2(x'(0)^2+y'(0)^2)=1 \Rightarrow (x'(0))^2+(y'(0))^2=1/2$

$\lambda^2=1/2 \Rightarrow \lambda=1/\sqrt{2}$

$\vec{v}=(x'(0),y'(0),z'(0))$
$=(-\lambda/\sqrt{2},-\lambda/\sqrt{2},\lambda)=(-1/2,-1/2,1/\sqrt{2})$

2ος τρόπος

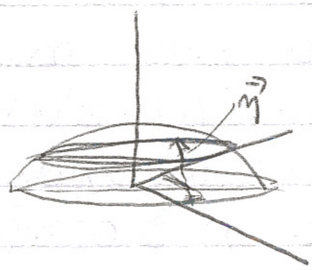
$z(t)=\sqrt{2}$



$z(t)=\sqrt{2}$

$x^2(t)+y^2(t)=4-z^2(t)$

$c<2$



$f(x,y)=x^2+y^2$

$v=-\frac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(2,2)$ άρα $\vec{v}=-(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$

$\vec{m}=(m_1,m_2,m_3)$ η προβολή του $\vec{m}$ στο xy επίπεδο πρέπει να είναι παράλληλη στο $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$

$(m_1,m_2)=\lambda(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ $\lambda>0$ $\Rightarrow m_1=-\lambda/\sqrt{2}$ $m_2=-\lambda/\sqrt{2}$

Για να είναι εφαπτόμενο $(x'(0),y'(0),z'(0))=\vec{m}$

ικανοποιείται $\underbrace{x(0)}_{1}x'(0)+\underbrace{y(0)}_{1}y'(0)+\underbrace{z(0)}_{\sqrt{2}}z'(0)=0 \Rightarrow m_1+m_2+\sqrt{2}m_3=0$

$\Rightarrow m_3=-1/\sqrt{2}(m_1+m_2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(-\lambda/\sqrt{2}-\lambda/\sqrt{2})=\frac{2\lambda}{2}=\lambda.$

$\vec{m}=\left(\frac{-\lambda}{\sqrt{2}},\frac{-\lambda}{\sqrt{2}},\lambda\right)$ $|\vec{m}|=1.$

$\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}+\lambda^2=1 \Rightarrow 2\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1/\sqrt{2}$

αλλά $\lambda>0$

$\vec{m}=(-1/2,-1/2,1/\sqrt{2}).$

Άρα $\lambda=1/\sqrt{2}.$

Θεώρημα

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που είναι $C^2(\mathbb{R}^n)$ τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$ $\forall i \neq j$

Άσκηση

Έστω $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$. Τότε ισχύει

$f_{xxy}(x,y) = f_{yxx}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Αποδ

$$f_{xxy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x^2}f(x,y) = \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}f(x,y)$$

Αν $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \Rightarrow f_{xxy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\right) \overset{\text{από θεώρημα}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\right)$

Επειδή $f \in C^3(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \underset{g}{\frac{\partial f}{\partial x}} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\qquad = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right)$

Όμως επειδή $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ έχουμε $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right) = f_{yxx}(x,y)$$

Άσκηση

Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 3 φορές παραγωγίσιμη.

Τότε $f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Άσκηση (σπίτι)

Έστω $\gamma:[0,1] \to \mathbb{R}^2$ παραγωγ. καμπ. και

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγ. σωστά, που επιπρόσθετα ικανοποιεί:

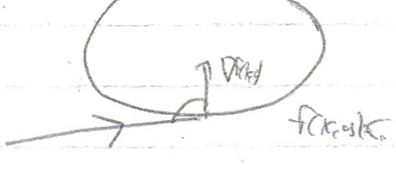
$x f_x(x,y) + y f_y(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Αποδ. ότι $f(\gamma(1)) \leq f(\gamma(0))$.

Λύση

$x f_x + y f_y \leq 0$

$(x,y) \cdot \nabla f(x,y) \leq 0$



Άσκηση

Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και ικανοποιεί $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
(=αρμονικές συναρτήσεις)

Αποδείξτε ότι την ίδια εξίσωση ικανοποιεί η συναρτ.
$\phi(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

<u>Λύση</u>

Η $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ ως σύνθεση της $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ και της

$(u,v) = g(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

είναι $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \Rightarrow \phi = f \circ g$ είναι $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

Απομένει να ελέγξουμε ότι $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\phi(x,y) = f\Big(\overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{u}, \overbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}^{v}\Big)$$

$$\phi(x,y) = f(g(x,y)) \Rightarrow \phi_x(x,y) = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x} = f_u(u,v) \quad (*)$$

$$\left(u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)(x^2+y^2) - x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad u_x = \frac{x^2+y^2-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right.$$

$$* \Rightarrow \boxed{\phi_x = f_u(u,v) \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_v(u,v)\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)}$$

$$\phi_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_u(u,v)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_v(u,v)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_u(u,v)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_v(u,v)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[f(u,v)\right]\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_u(u,v)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) f_u(u,v) - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[f_v(u,v)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f_u(u,v)\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left(f_u(u,v)\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(f_u(u,v)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= f_{uu}(u,v)\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{uv}(u,v)\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= f_{uu}\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,f_{uv}(u,v).$$

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left[f_v(u,v)\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left(f_v(u,v)\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(f_v(u,v)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= f_{uv}(u,v)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,f_{uv}(u,v)$$

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(y^2-x^2)_x(x^2+y^2)^2 - \left((x^2+y^2)^2\right)_x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2+y^2)}\cdot 2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x(x^2+y^2) - 4x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{-2x\left[x^2+y^2+2(y^2-x^2)\right]}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(2xy)_x(x^2+y^2)^2 - \left((x^2+y^2)^2\right)_x 2xy}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2+y^2)}\cdot 2x^2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2y\left[x^2+y^2-4x^2\right]}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Πέμπτη 29/03/18

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ αρμονική συνάρτηση
$f_{uu}(u,v) + f_{vv}(u,v) = 0$ και θέτουμε $\phi(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$
$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \phi \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ και είναι αρμονική συνάρτηση.
Επίσης $\phi_{xx}(x,y) + \phi_{yy}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Αν $g(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Είναι $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \Rightarrow \phi \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$$\phi_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= f_u(u,v) \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - f_v(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\phi_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) + f_v \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\phi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f_u \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - f_v \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) =$$

$$= f_u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) + \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \left[f_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right] -$$

$$- f_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \left[f_{vu} \frac{\partial u}{\partial x} + f_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \dots \text{(πράξεις)}$$

$$\dots = \frac{-2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} f_u + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} f_{vu} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_{uv} \right]$$

$$- \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} f_v \quad \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \cdot \left[f_{vu} \cdot \frac{y^2-x^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} f_{uv} \right]$$

$$\varphi_{xx}(x,y) = \frac{-2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} f_u - \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} f_v + \frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4} f_{uu} +$$
$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} f_{vv} - \frac{4xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} f_{uv} = \dots \text{ πράξεις.}$$

$$= f_u \cdot u_{xx} + f_v \cdot v_{xx} + u_x^2 v_{xx} + 2u_x v_x f_{uv} + v_x^2 f_{vv}$$
$$\Rightarrow \varphi_{xx}(x,y) + \varphi_{yy}(x,y) = f_u(\cancel{u_{xx}+u_{yy}}^{0}) + f_v(\cancel{v_{xx}+v_{yy}}^{0}) + (v_x^2+v_y^2) f_{uu}$$
$$+ 2(u_x v_y + u_y v_y) f_{uv} + (v_x^2 + v_y^2) f_{vv}$$

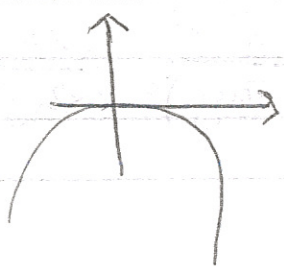
Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ και το $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι σημείο τοπ. ακρότατα
$\exists\, \delta>0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (\alpha,\beta)$
$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Τοπικά ακρότατα
$g: B(0,R)\to\mathbb{R} \qquad B\subseteq\mathbb{R}^n \quad n=2$ ή 3
$x_0 \in B(0,R) := B_R$
Το x_0 είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την g όταν
$\exists\, \delta>0$ (μικρό) $\quad B(x_0,\delta) \subseteq B(0,R)$:
$g(x) \leq g(x_0) \quad \forall x\in B(x_0,\delta)$

$n=1 \quad f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ τ.ω η f έχει τοπ. ακρότατο στο $x_0\in(\alpha,\beta)$
Αν επιπρόσθετα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$.
$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, f παραγωγ. $\Rightarrow x_0$ τοπ. ακροτατ. $\Rightarrow f'(x_0)=0$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη και 2 φορές παραγ. στο x_0
και x_0 τοπικό μέγιστο της f $\exists\, \delta>0 : \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq$

$f(x)\leq f(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0 \Rightarrow f''(x_0)\leq 0$
π.χ $f(x)=-x^4$
$f''(0)=0$



Έστω $f''(x_0)>0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\cancel{f'(x_0)}^{=0}}{x-x_0}=f''(x_0)>0\Rightarrow$$

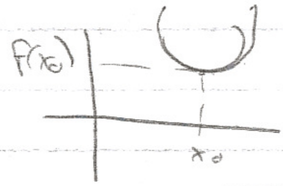
$$\Rightarrow \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{f'(x)}{x-x_0}-f''(x_0)<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad f''(x_0)-\varepsilon<\frac{f'(x)}{x-x_0}<f''(x_0)+\varepsilon$$

Άρα $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ $\quad(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

$x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0\quad x\in(x_0-\delta,x_0)$

$f'(x)>0\quad x\in(x_0,x_0+\delta)$



$\Rightarrow x_0$ είναι σημείο τοπ. ακροτάτου

x_0 τ.μ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f'(x_0)=0\\ f''(x_0)\le 0\end{array}}$

Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0\Rightarrow$ το x_0 είναι τοπικό μέγιστο της f. $g:\Omega$(ανοιχτό)$\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $x_0\in\Omega$ τοπ. ακροτ.

$\Rightarrow \nabla g(x_0)=0$

Αν x_0 τοπ. μέγιστο για την g

$n=2$ $\quad g_{xx}(x_0,y_0)$

$g_{yy}(x_0,y_0)$ $\qquad g(x_0)\quad v,\ |\vec{v}|=1$

$g_{xy},g_{yx}(x_0,y_0)$ $\qquad f(t)=g(\overbrace{x_0+tv}^{x})$

$\Rightarrow g(x)\le g(x_0)\quad \forall|x-x_0|<\delta$

$g(x_0+tv)\le g(x_0)\quad |t|<\delta.$

$f(t)=g(x_0+tv)\quad |t|<\delta$

$f(t)\le f(0)\quad |t|<\delta$

$\Rightarrow f'(0)=0$

$f''(0)\le 0$

$f'(0)=\frac{\partial g}{\partial v}(x_0)=\nabla g(x_0)\cdot v\quad \forall v,\ |\vec{v}|=1$

$\Rightarrow \nabla g(x_0)\cdot v=0\quad\forall\,|v|=1\quad\Rightarrow\ \boxed{\nabla g(x_0)=0}$

$$Αν\ \nabla g(x_0) \neq 0 \Rightarrow v = \frac{\nabla g(x_0)}{|\nabla g(x_0)|} \Rightarrow |\nabla g(x_0)| = 0 \Rightarrow \nabla g(x_0) = 0$$

$$f'(t) = \nabla g(x_0 + tv) \cdot v$$

$$f''(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t - 0}$$

$$f(t) = g(x_0 + tv)$$

$$f'(t) = \nabla g(x_0 + tv) = g_{x_1}(x_0 + tv) \cdot v_1 + g_{x_2}(x_0 + tv) \cdot v_2 + \dots + g_{x_n}(x_0 + tv) v_n$$

$$f''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}(g_{x_1}(x_0 + tv))\right) v_1 + \frac{\partial}{\partial t}(g_{x_2}(\cdot)) v_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial t}(g_{x_n}(x_0 + tv)) v_n$$

$$= \underbrace{g_{x_1 x_1} v_1 + g_{x_1 x_2} v_2 + \dots + g_{x_1 x_n} v_n}_{\nabla g_{x_1} \cdot v}) v_1 + (\nabla g_{x_2} \cdot v) v_2 + \dots + (\nabla g_{x_n} v) v_n$$

$$f''(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{x_i x_j}(x_0) v_i v_j$$

$$= (v) \begin{pmatrix} g_{x_1 x_1} & \dots & g_{x_1 x_n} \\ g_{x_2 x_1} & & g_{x_2 x_n} \\ \vdots & & \\ g_{x_n x_1} & \dots & g_{x_n x_n} \end{pmatrix} v^t = v(\;)v^t \leq 0 \quad \forall\, |v| = 1$$

$\Rightarrow$ Αρνητικά ορισμένος $D^2 g \leq 0$

Τρίτη 17/04/18

Στόχος: <u>Τοπικά Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.</u>

<u>Μια μεταβλητή</u>

$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ το $x_0\in(\alpha,\beta)$, η f έχει <u>τοπικό μέγιστο</u> στο x_0, όταν $\exists\,\delta>0$ τ.ω $f(x)\le f(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(\alpha,\beta)$
ανάλογα και το <u>τοπικό ελάχιστο</u>.

<u>Πολλές μεταβλητές</u>

$g:\Omega\to\mathbb{R}$, Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$
($\forall a\in\Omega$, $\exists\,\delta>0$: $B(a,\delta)\subseteq\Omega$) σφαίρα

Πότε $x_0\in\Omega$ είναι σημείο <u>τοπικού μεγίστου</u> για την g?
όταν $\exists\,\delta>0$ (μικρό) ώστε $\forall x\in B(a,\delta)\subseteq\Omega$, $g(x)\le g(x_0)$.
Το x_0 είναι σημείο <u>τοπικού ελαχίστου</u> όταν $\exists\,\delta>0$ ώστε $\forall x\in B(a,\delta)\subseteq\Omega$ $g(x)\ge g(x_0)$

<u>Βασικό κριτήριο αναγνώρισης πιθανών σημείων τοπ. ακροτάτων</u>

Υποθέτω ότι f παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε τα πιθανά τοπ. ακρότατα (θεωρ. Fermat) αναγκαστικά ικανοποιούν $f'(x)=0$

αντίστοιχα στις πολλές μεταβλητές έχουμε:
Αν η g παραγωγίσιμη στο Ω. τότε τα πιθανά τοπ. ακρότατα ικανοποιούν $\nabla g(x)=0$
(Το $\nabla g(x)=0$ βγήκε από:
$f(x,y_0)\le f(x_0,y_0)\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ $\quad f(x_0,y)\le f(x_0,y_0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Αν v, $|v|=1$ $\quad h(t)=g(x_0+tv)$ $\quad h:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$
$g(x_0+tv)=h(t)\le h(0)=g(x_0)$

$x_0+tv\in B(x_0,\delta)\Leftrightarrow |x_0+tv-x_0|<\delta\Leftrightarrow |t||v|<\delta\Rightarrow -\delta<t<\delta$

Κριτήριο αναγνωρ. τοπ. ακρ. της g
Απ. $\nabla g(x)=0$.

$\Rightarrow$ Η $h'(0)$ υπάρχει
$h'(0)=\nabla g(x_0)\cdot v=\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=0$ $\forall v$.
$\Rightarrow \nabla g(x_0)=0$ όπου αν $\nabla g(x_0)\ne 0$
$\Rightarrow v=\frac{\nabla g(x_0)}{|\nabla g(x_0)|}$

ΤΟΤΕ $\frac{\partial g}{\partial v}(x_0) = \nabla g(x_0)\cdot v = \nabla g(x_0)\cdot \frac{\nabla g(x_0)}{|\nabla g(x_0)|} = \frac{|\nabla g(x_0)|}{\cancel{\nabla g(x_0)}}$ ΑΤΟΠΟ ΓΙ $|\nabla g(x_0)| \neq 0$

Μία μεταβλητή

Κριτήριο τοπικού μεγίστου της f στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$:

(i) $f'(x_0) = 0$. $\underset{\text{παραγ. στο}}{\overset{f\ 2\ \text{φορές}}{\Longrightarrow}}$

(ii) $f''(x_0) \leq 0$

Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0 \overset{\text{ΤΟΤΕ}}{\Longrightarrow}$ το x_0 σημ. τοπ. μεγίστου για

Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0 \overset{\text{ΤΟΤΕ}}{\Longrightarrow}$ το x_0 σημ. τοπ. ελαχίστου για την f. για την f.

$h(t) = g(x_0 + tv)$

Αν στο x_0, η g δέχεται τοπικό μέγιστο και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $\begin{cases} h'(0) = 0 \Leftrightarrow \nabla g(x_0)\cdot v = 0 \quad \forall v \ |v| = 1 \\ h''(0) \leq 0 \Leftrightarrow v D^2 g(x_0) v^t \leq 0. \end{cases}$

$\boxed{\text{αναγκαία συνθήκη}}$

$$(v_1, v_2)\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \leq 0$$

ισοδύναμα

Πίνακας του Hess (εσιανή)

$$\boxed{\Rightarrow g_{xx}(x_0)v_1^2 + 2g_{xy}(x_0)v_1 v_2 + g_{yy}(x_0)v_2^2 \leq 0}$$

$h(t) = g(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)\frac{\partial}{\partial t}(x_0 + tv_1) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)\frac{\partial}{\partial t}(y_0 + tv_2)$$

$$= g_x(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)v_1 + g_y(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)\cdot v_2$$

$$h''(t) = g_{xx}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)v_1\frac{\partial}{\partial t}(x_0 + tv_1) + g_{xy}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)\cdot v_1 \frac{\partial}{\partial t}(y_0 + tv_2) +$$

$$+ g_{yx}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)\cdot v_2 \frac{\partial}{\partial t}(x_0 + tv_1) + g_{yy}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)\cdot v_2 \frac{\partial}{\partial t}(y_0 + t$$

$$= g_{xx}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)v_1^2 + g_{xy} v_1 v_2 + g_{yx} v_2 v_1 + g_{yy} v_2^2.$$

Πότε $D^2g(x_0)<0$? ($\Leftrightarrow$ $v, |v|=1$ $\quad vD^2g(x_0)v^T<0$)

Θέλουμε $g_{xx}(x_0,y_0)v_1^2+2g_{xy}(x_0,y_0)v_1v_2+g_{yy}(x_0,y_0)v_2^2<0$

Αν επιλέξουμε • $v=(1,0) \Rightarrow g_{xx}(x_0,y_0)<0$

$t=\frac{v_1}{v_2}$ $\quad g_{xx}(x_0,y_0)t^2+2g_{xy}(x_0,y_0)t+g_{yy}(x_0,y_0)<0$

$\Delta<0 \quad 4g_{xy}^2-4g_{xx}g_{yy}<0.$

$g_{xx}(x_0,y_0)\,g_{yy}(x_0,y_0)-g_{xy}^2(x_0,y_0)>0.$

<u>Ικανή συνθήκη τοπ. μεγίστου</u> : $\nabla g(x_0)=0$
$D^2g(x_0)<0$

<u>Ικανή συνθήκη τοπ. ελαχίστου</u> : $\nabla g(x_0)=0$
$D^2g(x_0)>0.$

<u>Άσκηση</u>: Βρείτε τα πιθανά τοπ. ακροτ. της $f(x,y)=x^2y+y^2x$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$

" <u>Σαγματικό σημείο</u>: $\nabla g(x_0)=0$ και $g_{xx}(x_0)g_{yy}(x_0)-g_{xy}^2(x_0)<0$ "

<u>Λύση</u>: Τα πιθανά τοπ. ακρ. ικανοποιούν $\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2xy+y^2=0\\ x^2+2yx=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+y)y=0\\ x^2+2yx=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y=0\\ x^2+2yx=0 \quad ①\end{cases} \qquad ① \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x^2=0\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

$$\begin{cases}2x+y=0\\ x^2+2yx=0 \quad ②\end{cases} \qquad ② \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\ x^2-4x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\ -3x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y)=(0,0)$

Μόνο το $(0,0)$ είναι πιθανό τοπ. ακρότατο.

<u>Άσκηση</u>: Βρείτε και χαρίστε τα πιθανά τοπ. ακρότατα της $f(x,y)\,x^2-y^2$

Λύση Τα πιθανά τοπ. ακροτ. ικανοποιούν $\nabla f(x,y)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

Ο πίνακας του Hess είναι:

$f_{xx}(x,y)=2$

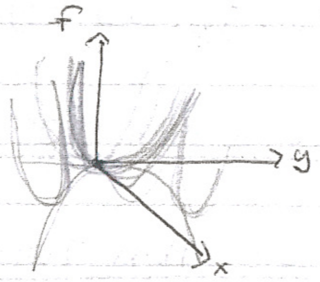
$f_{xy}(x,y)=0$ οπότε $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$f_{yy}(x,y)=-2$.

↑ δύο κατευθύνσεις

2: τοπ. ελαχ.

-2: τοπ. μεγ.



Το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

$$D(0,0)=g_{xx}(0,0)\,g_{yy}(0,0)-g_{xy}^2(0,0)=2\cdot(-2)-0=-4<0.$$

Τρίτη 24/04/18

Επανάληψη για Πρόοδο

Βρίσκω τις καμπύλες στάθμης με στόχο να σχεδιάσω την γραφική παράσταση

• **Εξίσωση ευθείας**

Χρειαζόμαστε ένα τουλ. σημείο της ευθείας (x_0, y_0, z_0) και:

είτε (i) ένα διαν. παράλληλο της ευθείας $\neq \vec{0}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$ $t \in \mathbb{R}$.

είτε (ii) ένα δεύτερο σημείο $(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow$

$(a, b, c) = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0)$

$\Pi_1: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ όπου $\Pi_1 \parallel \Pi_2$

$\Pi_2: Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta_1 = 0$

• **Καμπύλες** (χρειάζονται μία παράμετρο t)

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $t \in \mathbb{R}$ $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Η καμπύλη $\vec{r}$ είναι παραγωγ. αν κάθε συνιστώσα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$ εφαπ. διαν. ή ταχύτητα (ρυθμός μεταβ.)

$\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$ επιτάχυνση.

• **Επιφάνειες**

Επίπεδα → Καρτεσιανή μορφή

→ Παραμετρική μορφή

Χρειαζόμαστε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) του επιπέδου και ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

Για την παραμετρική μορφή θέλουμε:

$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, c_1) + s(a_2, b_2, c_2) \quad t,s \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \quad t,s \in \mathbb{R}.$

$\vec{r}_t(t,s) = (x_t(t,s), y_t(t,s), z_t(t,s))$

$\vec{r}_s(t,s) = (x_s(t,s), y_s(t,s), z_s(t,s))$

$\vec{r}_t \times \vec{r}_s$: κάθετο στην επιφάνεια.

$((x,y,z) - r(t_0,s_0)) \cdot (\vec{r}_t(t_0,s_0) \times \vec{r}_s(t_0,s_0)) = 0.$

▸ Ειδικές Επιφάνειες

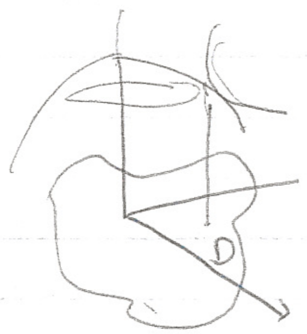
(i) Γραφήματα Συνάρτησης

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$z = f(x,y) \quad (x,y) \in D$

$\Rightarrow (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ένα τυχαίο σημείο της συνάρτησης

$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$



Εφαπτόμενο Επίπεδο στο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

σταθερό χρώμα για να έχω επιφ

$(F(x,y,z) = 0$: Επιφάν. στάθμ.) → (δεν έχει σημασία ότι 2, απλά θέλω

$(F(x,y,z) = 2$ και $F(x_0,y_0,z_0) = 2)$ Ποιο είναι το εφ. επ. στο (x_0,y_0,z_0)?

$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \perp$ Επιφάν στο (x_0,y_0,z_0)

όπου $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$.

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$

όπου $F_x = -f_x$

$F_y = -f_y$

$F_z = 1.$

$(-f_x, -f_y, 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$

$f_x(x - x_0) - f_y(y - y_0) + z - z_0 = 0.$

$z = f(x_0,y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$

Θέλω εφ. επ. της $x^2+y^2+z^2=1$.

$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

$F(x,y,z)=0$

$$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\cdot \nabla F(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)(2x_0,\ 2y_0,\ 2z_0)=0$$

• **Όρια**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0^+$

$$-r \le \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin^2\theta \le r$$

και επειδή $\lim_{r\to 0+} r=0=\lim_{r\to 0+}(-r)$ Από κριτήριο Παρεμβολής

έχουμε ότι $\lim_{r\to 0^+} r\cos\theta\sin^2\theta=0$

ή (χωρίς κριτήριο Παρεμβολής)

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le |x|$$

≤ 1.

• **Παραγωγισιμότητα**

Μια συνάρτηση $F(x,y)$ είναι παραγωγ. στο (x_0,y_0) όταν:

(i) $\exists\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$

(ii). $$\lim \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}=0.$$

$$|(x,y)-(x_0,y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$h(x,y) = f(\underbrace{u(x,y), v(x,y), w(x,y)})$

$h_{xx}(x,y) = ?$

$h_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\quad) = f_u(\,)u_x + f_v(\,)v_x + f_w(\,)w_x$

$h_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x)$

$= (f_u u_x)_x + (f_v v_x)_x + (f_w w_x)_x$

$= u_{xx} f_u + u_x (f_u)_x + v_{xx} f_v + v_x (f_v)_x + w_{xx} f_w + w_x (f_w)_x$

$\circ \; \circ \; \circ$ (πράξεις, κοινό παράγοντα)

Πέμπτη 03/05/18

Θεώρημα Taylor (στόχος είναι την $f(x)$ να την προσεγγίσει από ένα πολυώνυμο)

π.χ $\underbrace{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-a)^k}_{\text{πολυώνυμο Taylor } k \text{ βαθμού}} + R_k(x,a)$ → διαφορά

Αν $\lim_{k\to\infty} R_k = 0$ τότε $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($\sqrt{0,97} \simeq 1$)

Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής

$f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγ. στο (α,β) τότε:
$\forall x \in (\alpha,\beta)$: $\exists\ \xi_x \in (\alpha, x)$: $f(x) = f(\alpha) + f'(\xi)\cdot(x-a)$
Άρα το γενικευμένο ΘΜΤ / Θ. Taylor

1) Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f να είναι k-φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $(k+2)$-φορές στο (α,β) τότε $\exists\ \xi \in (\alpha, x)$ ώστε:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-\alpha)^{k+1}$$

2) (περισσότερες υποθέσεις)
Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ που είναι $C^{k+1}[\alpha,\beta]$ τότε

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-a)^k + R$$

$$R = \int_\alpha^x (x-t)^k/k!\ f^{(k+1)}(t)\,dt \ ($$

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-a)^2 + \int_\alpha^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)\,dt$$

$\exists\, \xi \in (a,b)$

Αν το a είναι τοπικό ακρότατο $f:[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ τότε

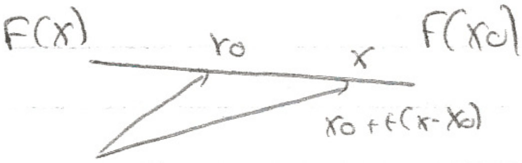
$$F(x) = f(\alpha) + 0 + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-a)^2 + \frac{F'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

$$= f(\alpha) + (x-a)^2\left(\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{F'''(\xi)}{3!}(x-a)\right)$$

Θ. Taylor για πολλές μεταβλητές

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$



$g(t) = F(x_0 + t(x-x_0))$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$

γράφω Θ. Taylor για $2^{ου}$ βαθμού $\exists\, \xi \in (0,1)$

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \frac{g''(\xi)}{2!}$$

(Γενικά) $$g(t) = g(0) + \dots + \frac{g^{k}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(k+1)}(\xi)\, t^{k-1}}{(k+1)!}$$

Άρα $F(x) = F(x_0)$

Αν $f \in C^2$: (τότε) $g'(0) = \frac{\partial}{\partial t} F(x_0 + t(x-x_0))\Big|_{t=0}$

$$= \nabla f(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0)\Big|_{t=0} = \nabla F(x_0) \cdot (x-x_0).$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} f\left(x_0^1 + t(x_1 - x_0^1), x_0^2 + t(x_2 - x_0^2), \dots, x_0^n + t(x_n - x_0^n)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(\quad)(x_1 - x_0^1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\quad)(x_2 - x_0^2) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\,)(x_n - x_0^n)$$

$$g''(t) = \frac{\partial}{\partial t} g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla f(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big[f_{x_1}(x_0^1 + t(x_1 - x_0^1), \dots)(x_1 - x_0^1) + f_{x_2}(x_0^1 + t(x_1 - x_0^1)) \cdot (x_2 - x_0^2)$$
$$+ \dots + f_{x_n}(x_0 + t(x-x_0))(x_n - x_0^n)\Big]$$

$=$

$$= \frac{\partial}{\partial t} f_{x_1}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x_1 - x_0^1) + \frac{\partial}{\partial t} f_{x_2}(\ )(x_2 - x_0^2) + \dots +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} f_{x_n}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x_n - x_0^n)$$

$$= \nabla f_{x_1}(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)(x_1 - x_0^1) + \dots + \nabla f_{x_n}(\ )(x-x_0)(x_n - x_0^n)$$

Αρα $g''(x) = \sum_{i=1}^{n} \nabla f_{x_i}(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)(x_i - x_0^i)$

$$= (x-x_0)\, D^2 f(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^t$$

Πολυώνυμα Taylor σε n- μεταβλητές

$$f(x) = f(x_0) + \nabla \frac{f(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{1}{2!} \sum f_{x_i x_j}(x_0)(x_i - x_0^i)(x_j - x_0^j)$$
$$+ \frac{1}{3!} \sum_{j,i,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(x_0)(x_i - x_0^i)(x_j - x_0^j)(x_k - x_0^k) + \quad \exists t$$
$$+ \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} f_{x_i x_j x_k x_l}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x_i - x_0^i) \cdot (x_j - x_0^j)(x_k - x_0^k)(x_l - x_0^l)$$

Τοπικά ακρότατα με δεσμεύσεις (Περιορισμούς)

Πρόβλημα: Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f(x)$, όπου τα x είναι τέτοια ώστε $g(x) = c$

Δίνονται $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το ζητούμενο είναι να βρούμε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f με τη δέσμευση... $\boxed{g(x) = c}$ → επιφάνεια στάθμης

Χωρίς δέσμευση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πιθανά τοπικά ακρότατα;
Απάντηση: Είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = 0$
Αν $D^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. μέγιστο
Αν όμως $f : \overline{B}_1 \to \mathbb{R}$ ποια είναι τα πιθανά τοπικά ακρότατα; όπου $\overline{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,\|\, |x| \leq 1\}$

Απάντηση: Πιθανά τοπικά ακρότατα
- αν x_0 είναι τ.ω. $|x_0|<1 \Rightarrow \nabla f(x_0)=0$
- ελαχιστοποίηση της $f(x)$, $|x|=1$

Μέθοδος των πολλ/στών Lagrange

Έστω $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγ. συναρτήσεις.
Αν το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι τοπικό ακρότατο της $f(x)$ με την δέσμευση το $g(x)=c$ και $\nabla g(x_0) \neq 0$ τότε
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ (διανύσματα κλίσεως // κάθετη δέσμευσ

Άσκηση
Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της
$F(x,y) = x^3+y^3$ για τα x,y που ικανοποιούν $x^2+y^2 \leq 1$.
Απάντηση
Τα πιθανά ακρότατα της $f(x,y)$ που επιπρόσθετα ικανοποιούν $x^2+y^2<1$ θα πρέπει να ικανοποιούν επίσης
$$\nabla F(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$$
$\Rightarrow f(0,0)=0$
σαγματικό σημείο

Τα πιθανά τοπ. ακρότατα της $f(x,y)$ που ικανοποιούν $x^2+y^2=1$
1ος τρόπος: Αρχικά κάνουμε την παραμετρικοποίηση
$x=\cos\theta$
$y=\sin\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$
και τότε $h(\theta) = F(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ $\theta \in [0, 2\pi]$
Τα πιθανά ακρότατα $h'(\theta)=0 \Leftrightarrow$
$-3\cos^2\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta = 0$
$3\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta+\sin\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta(\sin\theta - \cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\theta = 0 \\ \sin\theta = \cos\theta \end{cases}$

$\sin 2\theta = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = 2\kappa\pi + 0 \\ 2\theta = 2\kappa\pi + 0 \end{cases}$

Άρα $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ δηλ. $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

$\sin\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ δηλ. $\theta = \pi/4, \pi + \pi/4$

$h'(\theta) = 6\cos\theta \cdot \sin^2\theta - 3\cos^3\theta + 6\sin\theta\cos^2\theta + 3\sin^3\theta = \ldots$

2ος τρόπος (Μέθοδος πολ/στών Lagrange)

$|x| = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{g(x,y)} = 1$ $\quad \nabla g(x,y) = 2(x,y)$

$\Rightarrow |\nabla g(x,y)| = 2|(x,y)| = 2 \neq 0$

Άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^3 + y^3$ όταν $g(x,y) = 1$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ όπου $g(x,y) = 1$

Άρα $f_x(x,y) = 3x^2$, $f_y(x,y) = 3y^2$

Οπότε το σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 = \lambda \cdot 2x \\ 3y^2 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(3x - 2\lambda) = 0 \\ y(3y - 2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left| \begin{matrix} x = 0 \\ y(3y - 2\lambda) = 0 \\ y^2 = 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \right., \lambda = 3/2 \\ \left| \begin{matrix} x = 0 \\ y = -1 \end{matrix} \right., \lambda = -3/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left| \begin{matrix} 3x - 2\lambda = 0 \\ y(3y - 2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{matrix} \right| \rightarrow \left| \begin{matrix} 3x - 2\lambda = 0 \\ y = 0, x^2 = 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \begin{matrix} y = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \right. \lambda = 3/2 \\ \left| \begin{matrix} y = 0 \\ x = -1 \end{matrix} \right. \lambda = -3/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left| \begin{matrix} 3x - 2\lambda = 0 \\ 3y - 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x = y = \frac{2\lambda}{3} \\ x^2 = 1/2 \end{matrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \begin{matrix} y = 1/\sqrt{2} \\ x = 1/\sqrt{2} \end{matrix} \right. \lambda = 3/2\sqrt{2} \\ \left| \begin{matrix} y = -1/\sqrt{2} \\ x = -1/\sqrt{2} \end{matrix} \right. \lambda = -3/2\sqrt{2} \end{cases}$$

$F(x_0, y_0) = 1 \qquad (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}$

$F(x_0, y_0) = -1 \qquad (x,y) \in \{(0,-1),(-1,0)\}$

$\rightarrow F(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2})^3 + (1/\sqrt{2})^3 = 2/(\sqrt{2})^3 = \frac{2}{2^{3/2}} = 2^{1-3/2} = 2^{-1/2} < 1$

- $F(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -2^{-1/2} > 1$ (για συμμετρικούς λόγους

Άρα η $f(x,y)$ είναι:

$$-1 \leq F(x,y) \leq 1$$

19.26.3

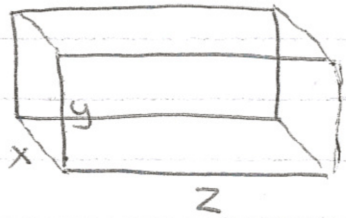
Τρίτη 08/05/18

Τοπικά Ακρότατα (με δέσμευση)

<u>Πρόβλημα 1</u>: Να προσδιοριστούν τα πιθανά ακρότατα της f με τη διεύθυνση $g(x)=c$

<u>Πρόβλημα 2</u>: Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός όγκος ορθογώνιου όταν το εμβαδόν επιφάνειας είναι $10\ m^2$

<u>Απ</u> Έστω x, y, z τα μήκη των πλευρών του (σε m)



Τότε έχουμε $V = xyz$

$$E = 2(xy + xz + yz) = 10$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = 5$$

Στόχος η μεγιστοποίηση της $f(x,y,z) = xyz$ με τη δέσμευση $g(x,y,z) = xy + yz + zx = 5$.

<u>Προβ. 1 Απ:</u> 1) f, g παραγωγ.

2) $\nabla g(x) \neq 0$, $g(x) = c$.

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla g(x) \\ g(x) = c \end{array} \right\}$$

Οι συναρτήσεις f, g ως πολυωνυμικές είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Θα ελέγξουμε αν $\nabla g(x) \neq 0$, $g(x) = 5$

Έστω πως $\exists\ \underset{=(x,y,z)}{X}$ τ.ω $g(X) = 5$ και $\nabla g(X) = 0$, τότε θα έπρεπε

$$\begin{array}{l} g(x) = 5 \\ \nabla g(x) = 0 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy + yz + zx = 5 \\ g_x(x,y,z) = 0 \\ g_y(x,y,z) = 0 \\ g_z(x,y,z) = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{array}{c} xy + yz + zx = 5 \\ \left[\begin{array}{l} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right] \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2(x+y+z) = 0 \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = 0 \\ 0 = 5 \end{array} \right. \quad \text{Αδύνατο}$$

Οπότε τα πιθανά τοπικά ακρότατα, θα $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$
$$g(x) = 5$$

$$\left|\begin{array}{l} f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ \\ xy+yz+zx=5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ \\ xy+yz+zx=5 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \left|\begin{array}{l} \dfrac{yz}{xz} = \dfrac{\lambda(y+z)}{\lambda(x+z)} \\ \dfrac{xz}{xy} = \dfrac{\lambda(x+z)}{\lambda(x+y)} \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy+yz+zx=5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y(x+z) = x(y+z) \\ z(x+y) = y(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ \\ xy+yz+zx=5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} z(x-y)=0 \\ x(z-y)=0 \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy+yz+zx=5 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x=y=z \\ x^2 = 2\lambda x \\ 3x^2 = 5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=y=z \\ x^2 = 2\lambda x \\ x^2 = 5/3 \end{array}\right| < \begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=\sqrt{5/3}=y=z \\ \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{5/3} \end{array}\right| \\ \left|\begin{array}{l} x=y=z=-\sqrt{5/3} \\ \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \end{array}\right. \text{ Απορρίπτεται} \end{array}$$

Για να ολοκληρωθεί

αν $xy+yz+zx=5 \Rightarrow xyz \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}$

(Ανισότητα Cauchy

$$\frac{a+b+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{ab\gamma} \geq \frac{3}{1/a+1/b+1/\gamma}$$).

$$\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2} \Leftrightarrow xyz \leq \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{3/2} \Leftrightarrow xyz \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}$$

<u>Θεώρημα</u> (Τοπικά Ακρότατα με δέσμευση. Μέθοδος <u>πολλαπλασιαστών Lagrange</u>)

Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες.

Αν x_0 είναι τοπ. ακρότατο της f με την δέσμευση $g(x)=c$ και επιπρόσθετα $\nabla g(x_0) \neq 0$. Τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$.

$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$
$g(x_0) = c$

Πρόβλημα: Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή $f'(x)=0 \quad x \in (0,1)$

$x_1, x_2, x_3 \quad f(x_1), f(x_2), f(x_3)$

$f(0), f(1)$

Αποδ

Έστω $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ παραγωγ. καμπύλη ώστε: $\gamma(t)$ στην επιφάνεια $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad g(\gamma(t)) = c \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0)$ είναι διάνυσμα του εφαπτομένου επιπέδου (έχω $n-1$ γραμμ. ανεξαρτ. διανυσμ.)

$g(\gamma(t)) = c \Rightarrow \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = 0$

$\Rightarrow \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

Για $t=0$ $\quad \nabla g(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0 \Leftrightarrow \nabla g(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0$

Τότε $Q(t) = f(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$, αν x_0 είναι τοπ. μέγιστο για την f $\quad f(x_0) \geq f(x)$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \exists \delta': \; f(x_0) = \underbrace{f(\gamma(0))}_{Q(0)} \geq \underbrace{f(\gamma(t))}_{Q(t)} \quad |t| < \delta'$

οπότε $\quad Q'(0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0$

$\forall \gamma'(0) \in \Pi \Rightarrow \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

(Με τις δεσμεύσεις)

Έστω $f, g_1, g_2: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγ. Αν x_0 είναι τοπικό ακρότ. της f με τις δεσμεύσεις $g_1(x) = c_1$, $g_2(x) = c_2$ και επιπρόσθετα $\nabla g_1(x_0)$, $\nabla g_2(x_0)$ γραμμ. ανεξαρτ. διανυσμ. Τότε $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

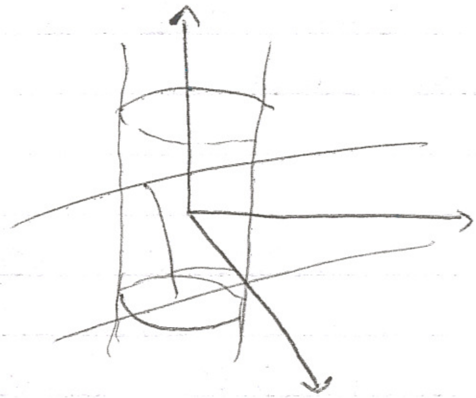
$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0)$
$g_1(x_0) = c_1$
$g_2(x_0) = c_2$

Άσκηση: Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z)=x+y+z$ υπό τις συνθήκες.

$\searrow$ (μέγιστη και ελάχιστη τιμή -χωρίο επιφάνεια)

$x^2+y^2=2$

$x+z=1$



Αποδ

$g_1(x,y,z)=x^2+y^2=2$

$g_2(x,y,z)=x+z=1$

$\nabla g_1(x,y,z)=(2x,2y,0)$

$\nabla g_2(x,y,z)=(1,0,1)$

Έστω πως τα $\nabla g_1(x,y,z)$ δεν είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

$\exists\, \lambda_1,\lambda_2$ όχι ταυτόχρονα 0. $(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0)$ ώστε

$\lambda_1 \nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \lambda_1(2x,2y,0)+\lambda_2(1,0,1)$

$(2\lambda_1 x+\lambda_2,\ 2\lambda_1 y,\ \lambda_2)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x+\underbrace{\lambda_2}_{=0}=(0,0,0) \\ 2\lambda_1 y=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$

Άρα $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda_2=0 \\ (\lambda_1\neq 0 \end{cases}$ $(0,0,z)\notin$ επιφάνεια

$g_1(0,0,z)=0\neq 2$

$\nabla g_1, \nabla g_2$

$\Rightarrow$ Αναγκαστικά είναι γραμμ. ανεξάρτητα $\quad g_1(x)=2$, $g_2(x)=1$

Πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος

άρα $\exists\, \mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ ώστε: $\nabla f(x,y,z)=\mu_1\nabla g_1(x,y,z)+\mu_2\nabla g_2(x,y,z)$

$g_1(x,y,z)=2$

$g_2(x,y,z)=1.$

$\left.\begin{array}{l}(1,1,1)=\mu_1(2x,2y,0)+\mu_2(1,0,1) \\ x^2+y^2=2 \\ x+z=1\end{array}\right| \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\mu_1 x+\mu_2=1 \\ 2\mu y=1 \\ \mu_2=0 \\ x^2+y^2=2 \\ x+\cancel{z}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \circ\circ\circ \quad \Leftrightarrow$ $(x,y,z)=(0,\sqrt{2},1)$ τότε $(0,-\sqrt{2},1)$

$f(0,\sqrt{2},1)=1+\sqrt{2}$

$f(0,-\sqrt{2},1)=1-\sqrt{2}$

$(\Rightarrow\ 1-\sqrt{2}\leq \underset{x^2+y^2=2}{f(x,y,z)}\leq 1+\sqrt{2}$ $\quad x+z=1$

Τρίτη 15/05/18

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = c$

Πιθανά τοπ. ακρότ. $(\nabla g(x) \neq 0)$

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = c \end{cases} \qquad h(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$$x_0 \to \begin{pmatrix} 0 & -g_{x_1} & \cdots & -g_{x_n} \\ -g_{x_1} & h_{x_1x_1} & \cdots & h_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ -g_{x_n} & h_{x_nx_1} & \cdots & h_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

- x_0 τοπ. ελάχιστο όταν: $- - - -$ αρνητικές
- x_0 τοπ. μέγιστο όταν: $+ - + - + \ldots$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τοπικά ακρότατα

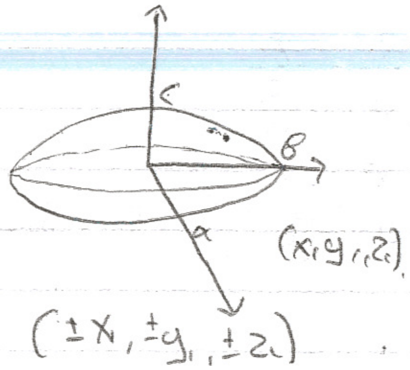
Πιθανά τοπικά ακρότατα $\nabla f(x) = 0$

Αναγνώριση: $D^2 f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$

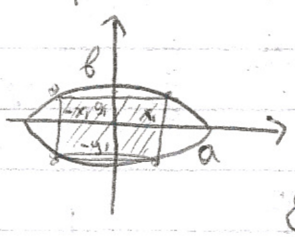
- x_0 τοπ. ελάχιστο $D^2 f(x_0) > 0$ κύριες υποορίζουσες θετικές
- x_0 τοπ. μέγιστο $D^2 f(x_0) < 0$ κύριες υποορίζουσες $- + - + - \ldots$

Άσκηση: Βρείτε τον όγκο του μεγαλύτερου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που εγγράφεται στο ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$



Υποπρόβλημα: (Θα δουλεύαμε αρχικά στις 2 μεταβ)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$E = 4x_1y_1 \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

Άρα $V = 8x_1y_1z_1$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}$$

Απάντηση:

Η επιφάνεια του ελλειψοειδούς είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο

η $f(x,y,z) = 8xyz$ είναι συνεχής και άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Αν $x_0=(x,y,z)$ είναι κρίσιμο σημείο τότε
$$\nabla g(x,y,z)=2\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)$$

Επομένως $\nabla g(x,y,z)\neq 0$ γιατί αν $\nabla g(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$ όμως το $(0,0,0)$ δεν είναι σημείο του ελλειψοειδούς.
Ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Lagrange οπότε $\exists\, \lambda\in\mathbb{R}$ $\nabla f(x,y,z)=\lambda g(x,y,z)$
$g(x,y,z)=1$

$$\left.\begin{aligned} 8yz&=\lambda\frac{2x}{a^2}\\ 8xz&=\lambda\frac{2y}{b^2}\\ 8xy&=\lambda\frac{2z}{c^2}\end{aligned}\right| \Leftrightarrow$$

Αν $\lambda=0 \Rightarrow x=y=0$, $\frac{z^2}{c^2}=1$

$f(0,0,z)=0$

$(0,0,\pm c)$

$(0,\pm b,0)$

$(\pm a,0,0)$

$\lambda\neq 0$
$$\left\{\begin{aligned}\frac{y}{x}&=\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}}\\ \frac{z}{y}&=\frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{z}{a^2}}\end{aligned}\right.$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 8yz=\lambda\frac{2x}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2\\ &\left(\frac{z}{y}\right)^2=\left(\frac{c}{b}\right)^2\\ &4yz=\lambda\frac{x}{a^2}\\ &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{aligned}\right| \Leftrightarrow \begin{aligned}&\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\\ &\frac{z}{y}=\pm\frac{c}{b}\\ &4y^2=\lambda\frac{x}{a^2}\\ &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{aligned}$$

$$\left|\begin{aligned} &y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow x=\pm\frac{a}{b}y \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}y\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\left(\frac{c}{b}y\right)^2}{c^2}=1\\ &\qquad\qquad\quad z=\pm\frac{c}{b}y\\ &\qquad\qquad\quad 4yz=\lambda\frac{x}{a^2} \qquad y=\pm\frac{b}{\sqrt3} \quad z=\pm\frac{c}{\sqrt3} \quad x=\pm\frac{a}{\sqrt3}\end{aligned}\right| \Leftrightarrow$$

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1 \quad 3y^2=b^2 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{\sqrt3}$$

$$(x_0,y_0,z_0)=\pm\frac{8abc}{(\sqrt3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{8\alpha\beta c}{3\sqrt{3}} \leq f(x,y,z) \leq \frac{8\alpha\beta c}{3\sqrt{3}}$$

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

$f(x,y)=0$ Έστω (x_0,y_0) σημείο της καμπύλης $f(x_0,y_0)=0$

Έστω $f\in C^1$ $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$

και έστω $f_y(x_0,y_0)\neq 0$, Τότε $\exists\, y\in C^1(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ώστε $f(x,y(x))=0$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$y(x_0)=y_0$.

με παραγώγιση της σχέσης παίρνουμε

$$\frac{d}{dx} f(x,g(x))=0 \qquad f_x(x,g(x)) + f_y(x,g(x))\cdot g'(x)=0$$

↳ διαφορική εξίσωση

Θεώρημα (Peano)

Αν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής.

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=F(x,g(x)) \\ g(x_0)=y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \delta>0 \text{ (τοπικά) } g\in C^1(x_0-\delta,x_0+\delta) \text{ που λύνει}$$

την διαφορική εξίσωση.

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$$

$$g(x_0)=y_0$$

$$f(x,y(x))=0$$

$$\frac{d}{dx} f(x,y(x)) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\cdot g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x,y(x)) = f(x_0,g(x_0)) = f(x_0,y_0) = 0.$$

Έστω

$$\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0. \end{array}$$

$f_i:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, C^1 συναρτήσεις $i=1,\dots,m$

και (X_0, Y_0) σημείο που λύνει το σύστημα

$\overset{\shortparallel}{}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$

$f_1(X_0, X_0) = 0$

$\vdots$

$f_m(X_0, Y_0) = 0$

$f(x_1, \dots x_n, y) = 0$

$f(x_1^0, \dots x_n^0, y^0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$

Ερώτημα:

Κάτω από τι υποθέσεις $\exists\, y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n)$

$y_2 = y_2(x_1, \dots, x_n)$

$\vdots$

$y_m = y_m(x_1, \dots, x_n)$

$|x - x_0| < \delta$.

$y_i(x_0) = y_i^0$

ΠΟΤΕ $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$?

$i = 1, 2, m$

$\Rightarrow f_{1,x_1}(\quad) + f_{1,y_1} \; y_{1,x_1} + \dots + F_{1,y_m} \; y_{m,x_1} = 0$

$f_{2,x_2}(\quad) + f_{2,y_1} \; y_{y_1,x_1} + \dots + f_{2,y_m} \; y_{m,x_1} = 0$

$\vdots$

$f_{m,x_1} \dots$

$$\left|\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dots & & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}\right| \neq 0$$

Άσκηση:

Εξετάστε την επιλυσιμότητα του συστήματος

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$
$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$
$$x + z + w + u^2 + 2 = 0$$

ως προς u, v, w συναρτήσει των x, y, z κοντά στο σημείο
$x = y = z = 0$, $u = v = 0$, $w = -2$

$\exists\, \delta > 0$ $\quad u = u(x,y,z) \quad\quad x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2$
$\quad v = v(x,y,z) \quad\quad u(0,0,0) = 0$
$\quad w = w(x,y,z) \quad\quad v(0,0,0) = 0$
$\quad\quad\quad\quad w(0,0,0) = -2$

και

$$3x + 2y + z^2 + u(x,y,z) + v^2(x,y,z) = 0$$
$$4x + 3y + z + u^2(x,y,z) + v(x,y,z) + w(x,y,z) + 2 = 0 \qquad (x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2)$$
$$x + z + w(x,y,z) + u^2(x,y,z) + 2 = 0.$$

$$\left| \frac{\partial(f_1 F_2 F_3)}{\partial(u,v,w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2v & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 2u & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2v & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Πέμπτη 17/05/18

Άσκηση

Αποδείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$, ώστε

$$\circledast \quad \alpha(x^2+y^2+z^2) \geq (x^3+y^3+z^3)^{2/3} \geq \beta(x^2+y^2+z^2) \quad , x,y,z>0$$

Ποιες είναι οι βέλτιστες επιλογές για τα α, β?

Λύση

Θέτουμε $(x^3+y^3+z^3)^{2/3} = f(x,y,z)$ $\quad x,y,z>0$

Στόχος: Η μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση της f με τον επιπρόσθετο περιορισμό $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$.
$x,y,z \geq 0$

Η $\circledast$ είναι ομογενής

(ομογενείς: Η ομογενής συνάρτηση με ομογένεια m : $H(\lambda x) = \lambda^m H(x) \quad \forall \lambda > 0$.)

Έστω τυχαία $x,y,z>0$ $\quad x^2+y^2+z^2=\rho^2$

Αν έχω την ανισότητα $\circledast$ και θέσω

$x=\rho X$

$y=\rho Y$ $\quad$ Τότε $x^2+y^2+z^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2X^2+\rho^2Y^2+\rho^2Z^2=\rho^2 \Leftrightarrow$

$z=\rho Z$ $\quad X^2+Y^2+Z^2=1$.

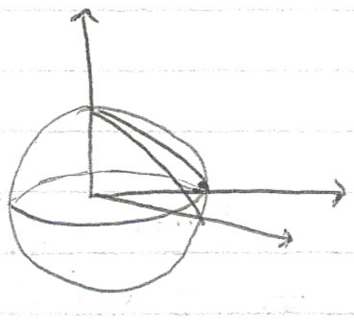
και η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha(\rho^2X^2+\rho^2Y^2+\rho^2Z^2) \geq (\rho^3X^3+\rho^3Y^3+\rho^3Z^3)^{2/3} \geq \beta(\rho^2X^2+\rho^2Y^2+\rho^2Z^2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\rho^2(X^2+Y^2+Z^2) \geq \rho^2(X^3+Y^3+Z^3)^{2/3} \geq \beta\rho^2(X^2+Y^2+Z^2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(X^2+Y^2+Z^2) \geq (X^3+Y^3+Z^3)^{2/3} \geq \beta(X^2+Y^2+Z^2)$$

$$X^2+Y^2+Z^2=1.$$



Αν θεωρήσουμε το πρόβλημα (μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης της f)

$S: x^2+y^2+z^2=1 \quad , x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

Σ (μαζί με το σύνορο)

S: κλειστό και φραγμένο. και επομένως η f επιδέχεται μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θα υπολογίσουμε τα πιθανά σημεία που η f

παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Αν (x_0, y_0, z_0) είναι σημείο τοπ. ακροτάτου, είναι εσωτερικό σημείο.

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$$ διότι το $(0,0,0)$ <u>δεν</u> είναι σημείο της μοναδιαίας σφαίρας.

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$

$$\left(\frac{2}{3} 3x^2 (x^3+y^3+z^3)^{\frac{2}{3}-1}, 2y^2(x^3+y^3+z^3)^{-1/3}, 2z^2(x^2+y^2+z^2)^{-1/3}\right) = 2\lambda(x, y, z), \quad x^2+y^2+z^2=1$$

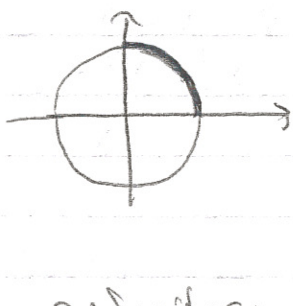
$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{(x^3+y^3+z^3)^{1/3}} = 2\lambda x \\ \dfrac{2y^2}{(\ )^{1/3}} = 2\lambda y \\ \dfrac{2z^2}{(\ )^{1/3}} = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = \lambda(x^3+y^3+z^3)^{1/3} \\ y = \lambda(x^3+y^3+z^3)^{1/3} \\ z = \lambda(x^3+y^3+z^3)^{1/3} \\ 3x^2 = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \lambda\left(\dfrac{3}{3\sqrt{3}}\right)^{2/3} \end{array}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) = \left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right)^{2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Απομένει να δούμε τι κάνει έχει η f στα 3 τόξα

$x=0$, $y^2+z^2=1$

$f_1(y,z) = f(0,y,z)$



$f_1(1,0) = 1 = f_1(0,1)$

Αν υπάρχει τοπ. ακροτ. ενδιάμεσα

$$\begin{array}{l} \nabla f_1(y,z) = \mu \nabla g_1(y,z) \\ g_1(y,z) = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{2y^2}{(y^3+z^3)^{1/3}} = 2\mu y \\ \dfrac{2z^2}{(y^3+z^3)^{1/3}} = 2\mu z \\ y^2+z^2=1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \mu(y^3+z^3)^{1/3} \\ z = \mu(y^3+z^3)^{1/3} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} = z,\ = z \end{array}$$

$$f_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} = \frac{1}{2^{1/3}}$$

2ος). Θα μελετήσουμε την $H(x,y,z) = \frac{(x^3+y^3+z^3)^{2/3}}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad x,y,z>0$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2x^2(x^3+y^3+z^3)^{-1/3}(x^2+y^2+y^2) - 2x(x^3+y^3+y^3)^{2/3}}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3+y^3+z^3)^{-1/3}(x(x^2+y^2+z^2)-x^3-y^3-z^3)}{(\dots)^2}$$

$$= \frac{2x(\ \ )^{-1/3}(\cancel{x^3}+xy^2+xz^2-\cancel{x^3}-y^3-z^2}{(\ \ )^2}$$

$$= \frac{2x(\ )^{-1/3}(\overbrace{y^2(x-y)+z^2(x-z)}^{\varphi(x,y,z)})}{(\dots)^2}$$

2η παράγωγο ως προς x

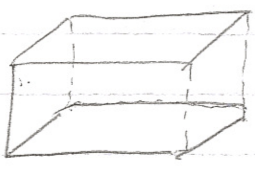
?

$\varphi_x = y^2+z^2>0$

$\varphi(0,y,z) = -y^3-z^3<0.$

Άσκηση 4 Φ9

Αποδ. ότι μεταξύ των ορθογωνίων κουτιών όγκου $1\,m^3$, εκείνο που έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας είναι όταν το κουτί είναι κύβος.



Ο όγκος είναι $xyz=1$.

Το εμβαδόν της επιφανείας είναι:

$E=2(xy+yz+zx)$

Ελαχιστοποίηση της $f(x,y,z)=2(xy+yz+zx)$

$g(x,y,z)=xyz=1.$

$z=\frac{1}{xy}$ $\quad \varphi(x,y)=f(x,y,\frac{1}{xy}) = 2xy+\frac{2y}{xy}+\frac{2x}{xy} = 2xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$

$xy>0$

Ερώτημα

Υπάρχουν τοπ. ακροτ. για την φ?

Αν υπάρχουν, έστω τα (x, y)

$$\nabla\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ 2x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x^2} \\ x - \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x^2} \\ x - x^4 = 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x^2} \\ x^3 = 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 1 \end{array} \right| \quad \varphi(1,2) = 6.$$

$$\varphi_x(x,y) = 2y - \frac{2}{x^2} \qquad \varphi_{xx}(x,y) = \frac{4}{x^3}$$

$$\varphi_y(x,y) = 2x - \frac{2}{y^2} \qquad \varphi_{yy}(x,y) = +\frac{4}{y^3} \qquad \varphi_{xy} = 2.$$

$$\varphi_{xx}(1,2) = 4 > 0$$

$$D(1,2) = \varphi_{xx}(1,2)\,\varphi_{yy}(1,2) - \varphi_{xy}^2(1,2) = 12 > 0$$

ΟΠΟΤΕ ΤΟ (1,2) ΕΙΝΑΙ ΤΟΠΙΚΟ ελάχιστο για την φ.

$$\varphi_x(x,y) = 2y - \frac{2}{x^3}$$

$$x^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^{1/2}}$$

$$\varphi_{xx}(x,y) = \frac{4}{x^3} > 0$$