23/09/2014

# Ανάλυση I

## Παράδοση 1

Ιστοσελίδα : www.math.uoc.gr/~tertikas
Γραφείο : Ε306

| Άλγεβρα | Ανάλυση |
| --- | --- |
| πεπερασμένα βήματα | πεπερασμένα βήματα + κατάλληλες άπειρες διαδικασίες $\boxed{\text{"ΟΡΙΑ"}}$ → με κατάλληλα αξιώματα |

→ Βάση ανάλυσης: προέρχονται όλα από το "αξίωμα της πληρότητας"

## Πραγματικοί Αριθμοί (Real Numbers) : $\mathbb{R}$

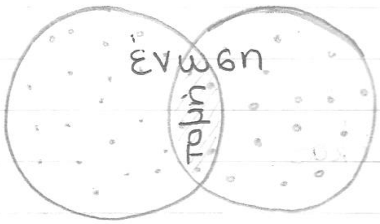
2 πράξεις : πρόσθεση (+)

## Σύνολα (Sets)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ (ένωση) union

$A \cap B \subseteq \mathbb{R}$ (τομή) intersection

## Διαγράμματα Vienn




## Φορμαλισμός

$\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R}$

**Ορισμός** : Κάθε στοιχείο του Γ είναι και στοιχείο του Δ

$\forall x \in \Gamma \Rightarrow x \in \Delta$

## Ισοτητα Συνόλων

Το ένα είναι υποσύνολο του άλλου και το ανάποδο

$\Gamma = \Delta$ όταν περιέχουν R ίδια ακριβώς στοιχεία

$\Gamma \subseteq \Delta$
$\Delta \subseteq \Gamma$ $\Rightarrow \Gamma = \Delta$

$\Delta \supseteq \Gamma$

$\in \quad x \in \Gamma$

$\ni \quad \Gamma \ni x$

**Ασκηση:**

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

**απόδειξη** : Έστω $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x \notin A \Rightarrow x \in A^c \\ x \notin B \Rightarrow x \in B^c \end{array}\right\} \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \Rightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad (1)$$

απόδειξη (ανάποδο): Έστω $x \in A^c \cap B^c \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \\ x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B \end{cases}$

$$\Rightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c$$

δηλαδή

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c \quad (2)$$

$$\text{Από } (1),(2) \Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

άσκηση: Έστω $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} A_j^c$

όταν έχουμε δείκτες το σκεφτόμαστε πάντα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ (induction)

## Αξιώματα

1. $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
2. $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
3. $\exists\ 0$ ουδέτερο στοιχείο
   $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ (-x)$ αντίθετο στοιχείο $x+(-x)=0$
5. $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
6. $a\cdot b = b\cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
7. $\exists\ 1 \in \mathbb{R} \quad a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists\ x^{-1} \in \mathbb{R}$
   ↳ εκτός του μηδέν
   $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
9. $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ σώμα

↳ κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού άρα είναι σώμα.

## Διάταξη

$\forall x \in \mathbb{R}$ είτε $x > 0$
είτε $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
είτε $x = 0$

μη αρνητικοί $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R} \left.\begin{array}{l} \text{είτε } x < y \\ \text{είτε } x > y \\ \text{είτε } x = y \end{array}\right\} \underline{\text{ΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ}}$$

Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε με $A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$
κενό σύνολο

<u>Ορισμός</u>: Το $A \subseteq \mathbb{R}$ το λέμε <u>άνω φραγμένο</u> όταν $\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall a \in A$, $a \leq M$

(κατά αντιστοιχία το $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται <u>κάτω φραγμένο</u> όταν $\exists m \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall a \in A$ $m \leq a$)

## Αξιώματα

10. <u>ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ</u>

Κάθε (μη κενό) άνω φραγμένο απλό $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.
(Υπάρχει αριθμός $S$ (supremum) που είναι ελάχιστο άνω φράγμα).

<u>π.χ</u> $A = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
$\sup A = 1$

Π.Χ $B = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

$\sup B = 1 \rightarrow$ ακόμα και αν το 1 δεν είναι στοιχείο του συνόλου.

Π.Χ $\mathbb{N}$ (Natural - Φυσικοί αριθμοί)

δεν είναι άνω φραγμένο

Επαγωγή
$A \Rightarrow B$
αν τότε

απόδειξη: Απαγωγή σε άτοπο

Έστω ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο

$\Rightarrow$ Από το αξίωμα της πληρότητας

$\exists\, M \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant M$.

$\sup \mathbb{N} = M$

25/09/2014

# Αναλυση Ι

## Παραδοση 2

**ασκηση**

Οι φυσικοι αριθμοί $\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο σύνολο.

**απόδειξη:** Απαγωγη σε ατοπο

Εστω πως $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο σύνολο.

Υπενθύμιση:

Το "Αξίωμα της πληρότητας"

Εάν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, ανω φραγμένο τότε υπαρχει $s = \sup A$ το μικρότερο από $\mathbb{R}$ άνω φράγμα.

(M ανω φραγμα για το A $\forall\, a \in A,\ a \leq M$)

Από το αξιωμα της πληρότητας το $\mathbb{N}$ θα είχε supremum, δηλαδή $\exists\ M = \sup\mathbb{N}$.
Τότε το $M$ είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα, τότε το $M-1$ → (γιατί είμαι στους φυσικούς. Θα μπορούσα να πάρω οτιδήποτε) δεν είναι άνω φράγμα.

→ Τι σημαίνει το $M$ να μην είναι άνω φράγμα για το $A$;

$\exists\, a \in A$ ώστε $a > M$.

Οπότε $\exists\ n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n > M - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\text{φυσικός}} > M$$

αντιφαση γιατί το $M$ ειναι ανω φραγμα επίσης

Αρα ατοπο.

Ανάλυση: όλα βασίζονται στη συσχέτιση.

## Ανισότητες

1. * $\left.\begin{matrix} x \geq \gamma \\ a \geq b \end{matrix}\right|$ $\Leftrightarrow a + x \geq b + \gamma$

$\Leftrightarrow a - b \geq 0$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$ είτε $-x \geq 0$

$\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ , $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

$x, \gamma \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + \gamma \in \mathbb{R}^+$

$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ \gamma > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x + \gamma > 0 \\ x \cdot \gamma > 0 \end{matrix}$

---

$a \geq b$
$\lambda \in \mathbb{R}$ → **Μπορούμε να συσχετίσουμε το $\lambda a$, $\lambda b$;**

Πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις.

- $\lambda > 0$
  $\lambda a \geq \lambda b \Leftrightarrow$
  $\lambda a - \lambda b \geq 0 \Leftrightarrow$
  $\lambda(a - b) \geq 0$
  $\boxed{+ \quad \geq 0}$

- $-\lambda > 0$
  $-\lambda a \geq -\lambda b \Leftrightarrow$
  $\lambda b \geq \lambda a$

---

Με βάση το *

$ax \geq b\gamma$ (άσκηση: γιατί;)

• Αν $\left.\begin{array}{l} 0 \geq a \geq b \\ 0 \geq x \geq \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow ax \leq b\gamma$

<u>απόδειξη:</u> $\left.\begin{array}{l} 0 \leq -a \leq -b \\ 0 \leq -x \leq -\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow ax \leq b\gamma$

## <u>Θεώρημα</u>

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο.
Ο $s$ είναι το $\sup A$ <u>αν και μόνο αν</u> το $s$ έχει δύο ιδιότητες:

1. $\forall a \in A$, $a \leq s$
2. $\forall \varepsilon > 0$ θα $\exists$ $a \in A$ τέτοιο ώστε $\boxed{s - \varepsilon < a}$

Μεταφράσαμε το αξίωμα της πληρότητας σε 2 ανισότητες

<u>απόδειξη:</u> ($\Rightarrow$) Αν το $s = \sup A$ έχει τις ιδιότητες 1, 2 βγαίνει αυτόματα
($\Leftarrow$) Αν το $s$ έχει τις ιδιότητες 1, 2 τότε το $s = \sup A$
Αν $s' = \sup A$ θα έπρεπε $a \leq s'$
άρα αναγκαστικά $s' = s$.

<u>άσκηση:</u> Έστω $\emptyset\, A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, το $B$ $\boxed{\text{άνω φραγμένο}}$ ΥΠΟΘΕΣΗ Τότε τα $A, B$ έχουν supremum και μάλιστα
ΥΠΟΘΕΣΗ $\boxed{\sup A \leq \sup B}$

A B

<u>απόδειξη:</u> <u>ύπαρξη supremum</u>: Πρώτα κοιτάω για το $B$.
Από το αξίωμα της πληρότητας (το $\emptyset \neq B$ άνω φραγμένο) έπεται ότι έχει $\sup B$.
<u>Για το $A$</u>: $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \text{ άνω φραγμένο} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ άνω φραγμένο.

Αν $M$ άνω φράγμα του $B$, $b \leq M \ \forall b \in B$
$\forall a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq M$
$\Rightarrow M$ άνω φράγμα του $A$
$\exists \sup A$.

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ιδιότητα με $M = \sup B$
$\forall a \in A$, $a \leq \sup B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$.
(το $\sup B$ είναι άνω φράγμα για το $A$, είναι πάντα το μικρότερο από τα άνω φράγματα)

Θεώρημα (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

μικρό
1/ε μεγάλο

$\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

απόδειξη: (Βασική ιδιότητα άνω φράγματος) Σκέφτομαι

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < n \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Θεώρημα

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο. Τότε υπάρχει το (infimum A) $\inf A$ δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα)

απόδειξη: {κάνουμε το infimum supremum συσχετίζοντας το $A$ με το $B$
$A$
$B = \{-x \mid a \in A\}$} αντίθετο σύνολο

{Αν $A \subseteq \mathbb{R}^+$
$\inf A = 1/\sup B \quad B = \{1/a, a \in A\}$

Αν έχει και αρνητικούς $B = (-\infty, 0) \cap A$}

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-a \mid a \in A\}$ τότε το $B$ είναι άνω φραγμένο επειδή το $A$ είναι κάτω φράγμα
$\exists -M \in \mathbb{R}$ ώστε $-M \leq a \quad \forall a \in A$

$$-a \leq M, \quad \forall a \in A$$

$M$ άνω φράγμα του $B$ δηλαδή $B$ άνω φραγμένο.
Υπάρχει το $\sup B = s$ με τις ιδιότητες: 1. $-a \leq s$, $\forall a \in A$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ ώστε $s - \varepsilon < -a$.

° Αν μεταφράσουμε τις ιδιότητες στο $A$ έχουμε:
$\Leftrightarrow \; -s \leq a \quad \forall a \in A$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \text{ ώστε } a < -s + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < -s$$

<u>Συμπέρασμα:</u> $-s$ το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα
$\inf A = -s$.

30/09/2014

# Ανάλυση Ι

## Παράδοση 3

ἀσκηση: (Ανισότητα Bernoulli)
Να αποδείξετε επαγωγικά ότι:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \forall\ x\geq -1$$

Μαθηματική Επαγωγή (Διαδικασία)
$P(n)$, $n\in\mathbb{N}$ $n\geq n_0$

Βήμα 1ο: Αποδεικνύουμε την πρόταση για $n=n_0$
δηλαδή $P(n_0)$ είναι αληθής.

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ αληθεύει.

Βήμα 3ο: Αποδεικνύουμε ότι αληθεύει και η $P(k+1)$

από δειξη
Βήμα 1ο: Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=1$.

$(1+x)^1 \geq 1+1x \Leftrightarrow$
ισχύει διότι $1+x=1+x$

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k\in\mathbb{N}$

$$(1+x)^k \geq 1+kx \quad \forall\ x\geq -1$$

Βήμα 3ο: Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=k+1$

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$$

Πράγματι:

$x \geqslant -1 \Rightarrow 1+x \geqslant 0$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$$

όμως

$$\left.\begin{array}{l}(1+x)^k \geqslant 1+kx \\ 1+x \geqslant 0\end{array}\right\} \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x)$$
$$= 1+x+kx+kx^2$$
$$= 1+(1+k)x+\underbrace{kx^2}_{\geqslant 0}$$

άρα $\geqslant 1+(k+1)x$

αλλιώς:

Διώνυμο του Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad n \in \mathbb{N}$$

Θεώρημα: 1. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φράγμα το supA είναι αριθμός

i) $\forall a \in A,\ a \leqslant \sup A$

ii) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists b \in A,\ \sup A - \varepsilon < b$

2. $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φράγμα $\exists \inf B$

i) $\inf B \leqslant b,\ \forall b \in B$

ii) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists b' \in B,\ b' < \inf B + \varepsilon$

άσκηση: Ε

Έστω $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένα. Αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο, και μάλιστα

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

Επειδή τα $A, B$ είναι άνω φραγμένα θα υπάρχουν $\exists \sup A, \sup B$ και μάλιστα:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, a \in A,\ a \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B) \\ \forall\, \beta \in B,\ \beta \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B,\ x \leq \max(\sup A, \sup B)$$

Υποθέτουμε ότι <u>$\sup A \geq \sup B$</u>

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\, a' \in A$ ώστε $\sup A - \varepsilon < a'$ (πρόταση 2)

$\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\, a' \in A \cup B$ ώστε $\sup A - \varepsilon < a' \Rightarrow$

$\sup(A \cup B) = \sup A$

<u>Θεώρημα</u> !!!

Η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει <u>θετική</u> λύση.

<u>απόδειξη</u>: Φτιάχνω το σύνολο $A = \{x \mid x^2 < 2\}$

↳ γιατί έχουμε να κάνουμε με θετική ρίζα
θα μπορούσαμε αλλιώς να πάρουμε κει.

$\left\{ \text{εναλλακτικός τρόπος: } B = \{x > 0 \mid x^2 > 2\},\ \inf B = \text{"}\sqrt{2}\text{"} \right\}$

τότε $1 \in A$ άρα $A \neq \emptyset$

το 2 είναι άνω φράγμα για το $A$, διότι:

$\forall\, x \in A \Rightarrow x \leq 2$ (γιατί ισχύει όμως;)

<u>Απαγωγή σε άτοπο</u>

$$\exists\ x \in A,\quad \left.\begin{array}{l} x > 2 \\ x > 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 > 4 > 2 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

αφού από υπόθεση $x^2 < 2$

Οπότε από το <u>Αξίωμα της πληρότητας</u>, το A έχει supremum (supA)

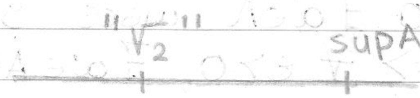
Θα αποδείξουμε ότι:

$$(\sup A)^2 = 2$$

Έστω ότι $(\sup A)^2 \neq 2$, τότε: 1. είτε $(\sup A)^2 > 2$

2. είτε $(\sup A)^2 < 2$

<u>1η περίπτωση:</u> $(\sup A)^2 > 2$




$(\sup A - \varepsilon)^2 > 2 \iff$

$(\sup A)^2 - 2\varepsilon \sup A + \varepsilon^2 > 2$

<u>ΑΡΚΕΙ</u> να βρω $\varepsilon > 0$, ώστε:

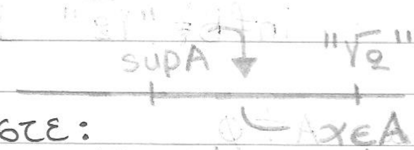
$$(\sup A)^2 - 2\varepsilon \sup A > 2 \Rightarrow$$

$$(\sup A)^2 - 2 > 2\varepsilon \sup A \iff \frac{(\sup A)^2 - 2}{2\sup A} > \varepsilon > 0$$

<u>ΑΝΤΙΦΑΣΗ.</u>

<u>2η περίπτωση:</u>

$(\sup A)^2 < 2$




$x = \sup A + \varepsilon$

Θα βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε:

$(\sup A + \varepsilon)^2 < 2 \Rightarrow$ αντίθετο με την 1η περίπτωση το $\varepsilon^2$ εδώ μας ενοχλεί και πρέπει να το αντικαταστήσουμε με κάτι άλλο

$(\sup A)^2 + 2\sup A\,\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$

$\Uparrow$

$0 < \varepsilon < 1$

$\varepsilon > \varepsilon^2$

$(\sup A)^2 + 2\sup A \cdot \varepsilon + \varepsilon < 2 \Rightarrow$

$$0 < \varepsilon < \frac{2 - (\sup A)^2}{1 + 2\sup A}$$

<u>ΑΝΤΙΦΑΣΗ</u> (στον ορισμό του supA γιατί βρήκαμε αριθμό μεγαλύτερο του supA που ανήκει στο σύνολο.)

Λήμμα :

i) Αποδείξτε ότι $\exists$ ρητός στο $(1,2)$

ii) Αποδείξτε ότι αν $a<b \Rightarrow \exists$ ρητός στο $(a,b)$

$\hookrightarrow b-a>1 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$

$0<b-a<1$

$n(b-a)>1$ αν πολλαπλασιάσουμε με μεγάλο $n$

Αν πάρουμε με $\mathbb{Z}$ ανάμεσο στο $[na, nb]$

$[x]=\sup\{m\in\mathbb{Z}, m \leq \cancel{x}\}$

i)

Φροντιστηριο αύριο 9-11

2/10/2014

<u>Ανάλυση I</u>

<u>Παράδοση 4</u>

<u>Θεώρημα</u>

1. Αν $a<b$ τοτε στο $[a,b]$ υπάρχει ρητός $q$, δηλαδή $\exists\, m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ ώστε $a\leq q\,\frac{m}{n}\leq b$.

2. Αν $a<b$ τοτε στο $[a,b]$ υπάρχει άρτιος $k$, δηλαδή $\exists\, k\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ώστε $a\leq k\leq b$.

→ Η εξίσωση $x^2=2$ έχει θετική λύση: $A\{x \mid a<x,\ x^2=2\}$
$(\sup A)^2=2$

→ $a<b$, $\exists$ ακέραιος αν $b-a\geq 1$

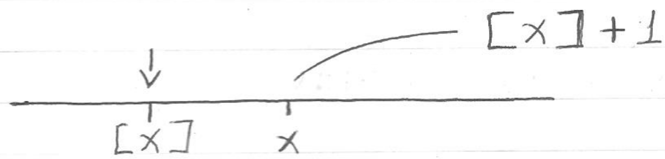
Αν $x\in\mathbb{R}$ ακέραιο μέρος του $[x]$
$\mathbb{Z}\ni[x] := \sup\{y\in\mathbb{Z} \mid y\leq x\}$
ορισμός

$\exists\, -m\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$ : $-m\leq x \Rightarrow -x\leq m$
Το συνολο των φυσικών αριθμων δεν είναι φραγμένο
άρα μπορώ να βρω εναν φυσικό αριθμό που να τον ξεπερνάει.
Το $x$ είναι άνω φράγμα.

Έστω $\sup A\neq\mathbb{Z}$, $\sup A\leq x$

$\sup A-1<\sup A \Rightarrow \exists\, y\in A$ ώστε $\sup A-1<y \Rightarrow$
$\sup A<y+1 \Rightarrow$
$\sup A\in\mathbb{Z}$

## Ιδιοτητα




$$[x] \leq x < [x]+1$$

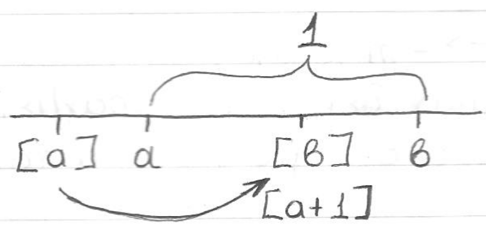
**ασκηση** (σπιτι)

Αποδειξτε: 1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad [x+y] \geq [x]+[y]$
2. $n \in \mathbb{Z} \quad [x+n] = [x]+n$

**ασκηση**

Αν $a<b$ $\exists$ ακέραιος στο $[a,b]$;

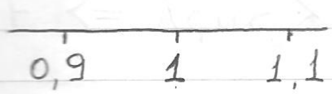
• Ναι υπάρχει αν έχουν μηκος μεγαλύτερο ή ισο της μονάδας. Δηλαδη $b-a \geq 1$




• Το $[b]$ ειναι ακέραιος και $\in [a,b]$
• Το $[a]$ δεν $\in [a,b]$
• Το $[a]+1 \in [a,b]$

→ Αν $0<b-a<1$

$$[b] = [a]+1$$



## Θεώρημα

Έστω ότι έχω βρει: $a \leq \frac{m}{n} \leq b \iff na \leq m \leq nb$

Πότε είμαι σίγουρος ότι θα βρω ακέραιο;

Αν $nb - na \geq 1 \iff n(b-a) \geq 1 \iff n \geq \frac{1}{b-a}$

Γνωρίζουμε ότι: $\left[\frac{1}{b-a}\right] \leq \frac{1}{b-a} < \underbrace{\left[\frac{1}{b-a}\right] + 1}_{n \text{ (το επιλέγουμε)}}$

απόδειξη (θεωρήματος 1): Επιλέγω $n = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 \in \mathbb{N}$, διότι

$$b - a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b-a} > 0$$

τότε: $\frac{1}{b-a} < n \iff n(b-a) > 1 \iff nb - na > 1$

Επομένως στο διάστημα $[na, nb]$ μπορώ να βρω ακέραιο.

Για παράδειγμα επιλέγω $m = [na] + 1$ τότε $na \leq m \leq nb \iff a \leq \frac{m}{n} \leq b$

οπότε ο $q = \frac{m}{n} = \dfrac{\left[a + \left[\frac{1}{b-a}\right]\right] + 1}{\left[\frac{1}{b-a}\right] + 1}$

απόδειξη (θεωρήματος 2): $\sqrt{2}$, $x^2 = 2$, $x > 0$. Ερώτημα $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$;

Έστω πως $x \notin \mathbb{Q}$, $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$

$x = \frac{m}{n}$

και επομένως $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \iff m^2 = 2n^2$

Διακρίνω περιπτώσεις:

-> Αν $m$ περιττος, δηλαδη $m=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$
$m^2=(2k-1)=4k^2-4k+1=\underbrace{4k(k-1)+1}_{\text{περιττος}}$

-> Αν $m$ αρτιος, δηλαδη $m=2m_1$, $m_1\in\mathbb{N}$
$m^2=4m_1^2=2n^2 \iff n^2=2m_1^2$

για τον ίδιο λόγο
$\Longrightarrow$ $n$ άρτιος, δηλαδη $\left.\begin{array}{l} n=2n_1 \\ m=2m_1 \end{array}\right\}$ $m,n\in\mathbb{N}$

$2|(m,n)$ ΑΤΟΠΟ.

αποδειξη
(Θεωρήματος 2 - σκέψεις)

$$\frac{m}{n}+\frac{m_1}{n_1}=\frac{mn_1+nm_1}{nn_1}$$

$\frac{m}{n}\cdot a=a'$ άρα

$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$
$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\frac{m_1}{n_1} \Rightarrow a=\frac{m_1n}{n_1m}\in\mathbb{R}$

αποδειξη:
(Θεωρήματος 2)

Θα βρω $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
$n\in\mathbb{N}: a\leq\frac{m}{n}\sqrt{2}\leq b \iff$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\leq\frac{m}{n}\leq\frac{b}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Από Θεώρημα 1 $\exists\, g=\frac{m}{n}$ που ικανοποιεί τη σχέση (1)

Σπιτι: Βρειτε $m \in \mathbb{Z}$ για $\alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}$ ωστε:
Για $\alpha < \beta$

$$\alpha \leq \frac{m}{n} + \sqrt{2} \leq \beta$$

$\longrightarrow$ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$, άνω φραγμένο $\exists \sup A \in \mathbb{R}$;

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x,\ x^2 < 2 \}$$

$$\sup A = \sqrt{2}$$

## Ακολουθίες

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

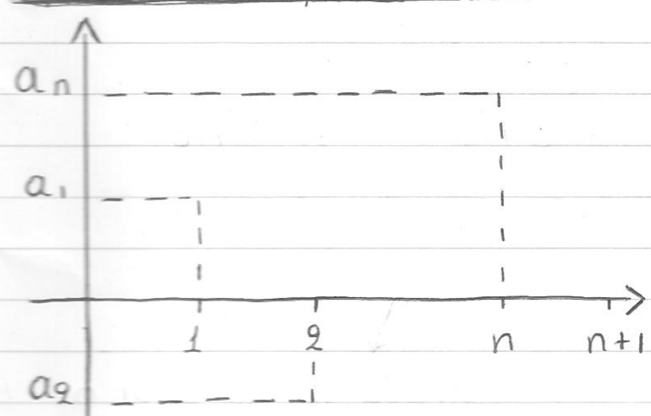
$f(n) = \ldots \quad n \in \mathbb{N}$

$f_n$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

## Γραφική Παράσταση




Παίρνω μεμονωμένα σημεία

Πότε η $a_n$ συγκλίνει; (είναι συγκλίνουσα ακολουθία).

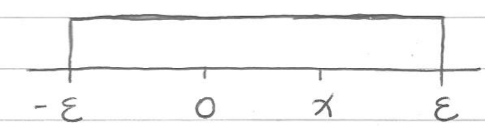
• Αν $\exists\, l \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ , $\quad a_n \to l$, $n \to \infty$

## Ορισμός

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ όταν $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad , \ n \geq n_0$$

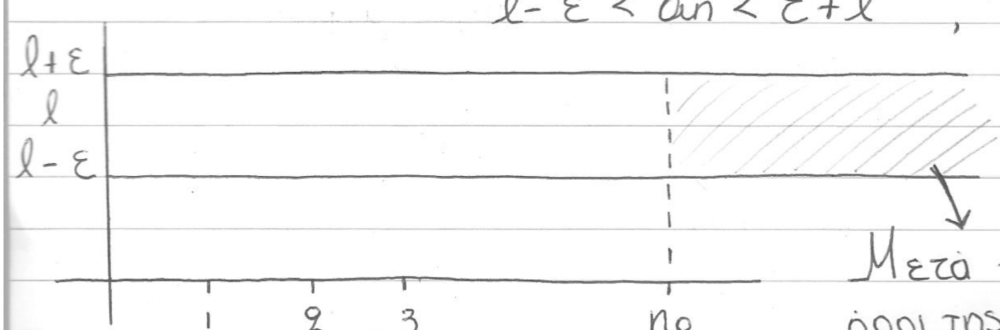
→ $|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$




## Τριγωνική ανισότητα

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff$
$l - \varepsilon < a_n < \varepsilon + l \quad , \ n \geq n_0$




Μετά το $n_0$ όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται εδώ
(δηλ. ανάμεσα στο $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$)

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ , $\forall \; \varepsilon > 0$ , $\exists \; n_0 = n_0(\varepsilon)$

$$|a_n - 0| < \varepsilon \quad , \; n \geq n_0$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Επιλέγουμε $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Τότε αν $n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

(Απο τριγωνομετρική ιδιότητα) $\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\Rightarrow$ αν $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \quad , \; n \geq n_0$$

7/10/2014

# Ανάλυση I

## Παράδοση 5

### Θεώρημα 1

$a, b \in \mathbb{R}$ , $a < b$ $\exists$ $\frac{m}{n}$ , $m \in \mathbb{Z}$ , $n \in \mathbb{N}$

$$a \leq \frac{m}{n} \leq b$$

### Θεώρημα 2

$a, b \in \mathbb{R}$ , $a < b$ $\exists$ $\frac{m}{n}$ , $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$a \leq \frac{m}{n}\sqrt{2} \leq b$$

### Αξίωμα Πληρότητας

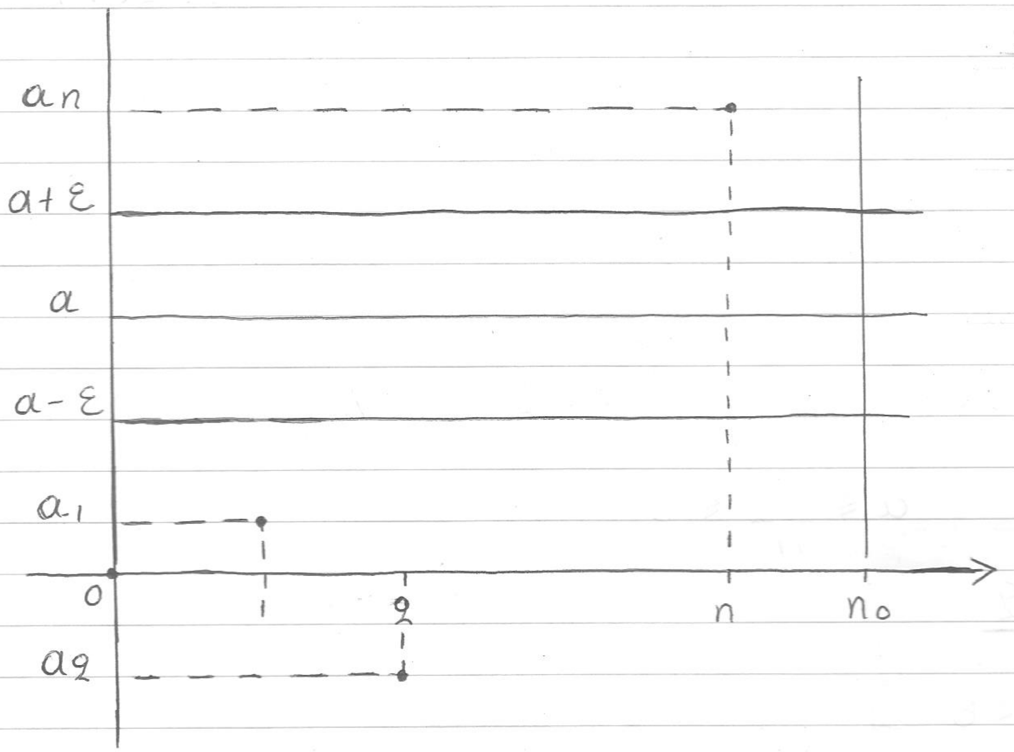
### Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός : $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|a_n - a| < \varepsilon \ , \ n \geq n_0.$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff \boxed{a - \varepsilon < a_n < \varepsilon + a}$$

$$n \geq n_0$$




Ερώτημα: Μπορεί η ακολουθία να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά (διακεκριμένα) όρια;
Δηλαδή $\exists\ a, a'$, $a \neq a'$ ώστε:

- $\lim_{n \to \infty} a_n = a$
- $\lim_{n \to \infty} a_n = a'$

Απάντηση: Όχι δεν είναι δυνατόν.

απόδειξη: Έστω ότι είναι δυνατόν, δηλαδή τα παραπάνω όρια ισχύουν.

Από τον ορισμό έχουμε ότι:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_1 = n_1(\varepsilon):$
$|a_n - a| < \varepsilon, \ n \geq n_1$

<u>επισης</u>: $\forall \varepsilon' > 0 \ \exists n_2 = n_2(\varepsilon):$
$|a_n - a'| < \varepsilon', \ n \geq n_2$

<u>Επιλεγουμε:</u> $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{|a - a'|}{4}$ Τοτε $\exists n \in \mathbb{N}$

$|a_n - a| < \frac{|a - a'|}{4}, \ n \geq n_1 \Rightarrow n \geq \max(n_1, n_2)$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}: |a_n - a'| < \frac{|a - a'|}{4}, \ n \geq n_2 \Rightarrow n \geq \max(n_1, n_2)$

<u>Τοτε ομως:</u> $|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| <$
$< \frac{|a - a'|}{4} + \frac{|a - a'|}{4}, \ n \geq n_0$ ①

$n_0 = \max(n_1, n_2)$

① $\Rightarrow |a - a'| < \frac{|a - a'|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a - a'| < 0$ <u>Αδυνατο</u>

<u>Προταση</u>: Εστω η ακολουθια $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ειναι συγκλινουσα ακολουθια. Τοτε η ακολουθια ειναι φραγμενη.

<u>αποδειξη:</u> Απο τον ορισμο $\exists a \in \mathbb{N}$, ωστε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon, \ n \geq n_0$

Επιλεγουμε $\varepsilon = 1$ τοτε:

$a - 1 < a_n < a + 1, \ n \geq n_0$
$a_1, a_2, \ldots, a_{n_0 - 1}$

Τοτε: $\min(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a-1) \leq a_n \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a+1)$
$\forall n \in \mathbb{N})$

(I) Ακολουθια φραγμένη. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\exists\, m \leq M$
ώστε $m \leq a_n \leq M$, $-\max(|m|,|M|) \leq m \leq a_n \leq M \leq \max(|M|,|m|)$
$\forall n \in \mathbb{N}$.

(II) Απολύτως φραγμένη: ($|a_n|$ φραγμένη)
$\exists\, M' > 0$ : $|a_n| \leq M'$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-M' \leq a_n \leq M'$

## Θεώρημα

Καθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Αύξουσα ακολουθία: $a_{n-1} \leq a_n$ $\forall n = 2$

αποδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n \nearrow$ άνω φραγμένη
Ορίζουμε το σύνολο: $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$a_n \in A \Rightarrow A \neq 0$. Επειδή η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη, $\exists M \in \mathbb{R}$.
$a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ Το $M$ είναι άνω φράγμα για το $A$.
Οπότε επειδή πληρ. τ. η προυπόθεση του αξιώματος της πληρότητας, θα $\exists \sup A = a$

Θα αποδειξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(Απο τον ορισμό του supremum)

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists a_n \text{ ώστε } a-\varepsilon < a_{n_0} \leq \overbrace{a_n}^{a_n \uparrow} \leq a \quad ,\ n \geq n_0$$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_1 \in N \quad \boxed{a-\varepsilon < a_n \leq a < a+\varepsilon},\ n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\ ,\ n \geq n_0$$

(Αποδείξαμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ )

## Άλγεβρα Συγκλινουσών Ακολουθιών

**Πρόταση:** Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ , $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Τότε

i. $(a_n+b_n)_{n\in N}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b$.

ii. $(a_n b_n)_{n\in N}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$

**απόδειξη:** Έστω $\varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists n_1 = n_1(\varepsilon)$:
$|a_n - a| < \varepsilon\ ,\ n \geq n_1 \geq n_0 = max(n_1, n_0)$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \ \exists n_2 = n_2(\varepsilon)$:
$|b_n - b| < \varepsilon,\ n \geq n_2 \geq n_0$

$\Rightarrow n \geq n_0 = max(n_1, n_2)$

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ n\geq n_0$$

Πρόχειρο: $|a_n - a|$
$|b_n - a|$

$$|a_n b_n - a| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq$$
$$\leq |a_n||b_n - b|^{\to \varepsilon} + |b||a_n - a|^{\to \varepsilon} \leq$$
$$\leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|$$

Πρόταση: $a_n \to a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \\ |b_n| \leq M \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0$$

9/10/2014

## Αναλυση Ι

## Παραδοση 6

**Ορισμος**: Πότε μια ακολουθια συγκλινει;

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a} \quad \forall\ \varepsilon>0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$$
$$|a_n - a| < \varepsilon,\ n \geq n_0$$

**Θεώρημα**:

Καθε μονότονη και φραγμένη ακολουθια συγκλινει.
(δινω προσοχη στην αποδειξη για να το χρησιμοποιησω σε προβλημα.)

! Όταν <u>δεν ξέρω ακριβώς την ακολουθια</u> αλλά ξέρω τα χαρακτηριστικά της (μονοτονια και φραγμένη). !

**απόδειξη**

Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, τότε $a_n \cdot b_n$ είναι συγκλίνουσα ακολουθια. και μάλιστα

$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

$-a_n b + a_n b$
$|a_n b_n - ab| =$
$\leq |a_n||b_n - b| +$
$+|b||a_n - a|$

• Εστω $b \neq 0$.
Επειδη η $a_n$ ειναι συγκλινουσα, θα ειναι απόλυτα φραγμένη, δηλαδη $\exists\ M>0.\quad |a_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Εστω $\varepsilon>0$, επειδη $\lim a_n = a \quad \exists\ n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

Αντίστοιχα επειδή $\lim b_n = b$

$\exists\, n_2 = n_2(\varepsilon) \in N : |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}, \quad n \geq n_2$

Επιλέγουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε για $n \geq n_0$

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

(Οπότε η $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα $\lim(a_n b_n) = ab$)

$$1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ φορές}}$$

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\, n\right) \text{ απροσδιοριστία}$$

Δεν πρέπει να μεγαλώνει πολύ το πλήθος διότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω ιδιότητα. (το ίδιο για άθροισμα γινόμενο)

**Παράδειγμα**

Η ακολουθία $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία, μάλιστα $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Για $n = 1$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 1$

Για $n = 2$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{9}{4}$

Για $n = 3$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{64}{27}$

$2 < \dfrac{9}{4} < \dfrac{64}{27}$

Θα αποδείξουμε ότι η $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\boxed{\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \leqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\boxed{\frac{n}{n+1} \leqslant \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}$$

<u>Μήπως Bernoulli?</u>

$$\left\{(1+x)^n \geqslant 1+nx \quad , \quad x \geqslant -1 \quad n\in N\right\}$$

$$\frac{n(n+2)}{n+1} = 1+x \iff x = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$x = -\frac{1}{(n+1)^2} \geqslant -1 \iff$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 1 \iff$$

$$(n+1)^2 \geqslant 1$$

Οπότε $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x = 1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Επομένως η ακολουθία είναι αύξουσα

$a_n \geqslant a_1 \quad 2$

## Ιδιότητες Συγκλινουσών

α) Εάν $\lim a_n = 0$ και $b_n$ φραγμένη τότε $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και μάλιστα $\lim(a_n b_n) = 0$

β) Έστω $a_n, b_n$ συγκλίνουσες ακολουθίες που επιπρόσθετα ικανοποιούν: $a_n \leqslant b_n \quad n = 1, 2, \ldots$

Τότε $\lim a_n \leqslant \lim b_n$ (από γνήσια μπορούμε να έχουμε και ισότητα στο όριο)

γ) Κριτήριο Παρεμβολής (Σάντουιτς)

Έστω $(a_n), (b_n), (\gamma_n)$ τέτοιες ώστε:

$$a_n \leqslant b_n \leqslant \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Όταν επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι
- $\lim a_n = a$
- $\lim \gamma_n = a$

Τότε η $b_n$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim b_n = a$.

## Απόδειξη (α)

Έστω $M>0$, $|b_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon>0$.
Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ θα $\exists\, n_1(\varepsilon)$ : $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, $n \geq n_1$.

Τότε για $n \geq n_1$ έχουμε:

$$|a_n b_n| \leq |a_n| M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon, \quad n \geq n_1$$

Τα άλλα 2 αποδεικνύονται ανάλογα.

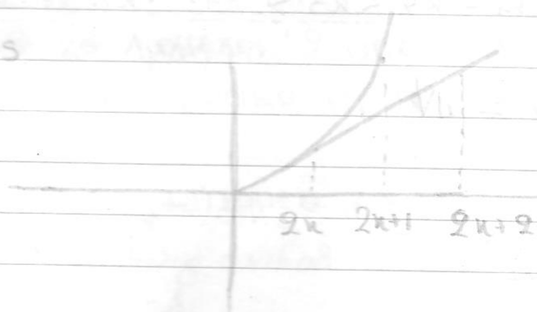
## Ορισμός

Πότε λέμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$.

$a_n = \begin{cases} n & n = \text{άρτιος} \\ n^2 & n = \text{περιττός} \end{cases}$

$n$

$f(x) = x$
$g(x) = x^2$




τείνει στο ∞ αλλά δεν είναι μονότονη

πότε συγκλίνει.

$\lim a_n = a$ $\quad \forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ $\quad |a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq n_0$
(βοηθάει στη σκέψη του ορισμού που ψάχνω παραπάνω)

πότε είναι συν άπειρο

- $\forall\, \varepsilon>0$ $\quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq n_0$$

ποτε είναι μείον άπειρο

$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) : b_n < -\frac{1}{\varepsilon},\ n \geq n_0$

Καταλήγουμε σε 2 κριτήρια.

Κριτήρια

- Αν $b_n \to -\infty$ $\quad a_n \leq b_n \Rightarrow \lim a_n = -\infty$
- Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\quad b_n \geq a_n \Rightarrow \lim b_n = +\infty$

Υποακολουθίες ακολουθίας

$(a_n)_{n\in N}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$a_2, a_4, a_5, a_6, \dots$

υποακολουθία της an

$a_{k_n} \quad \underbrace{k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots}_{\text{επιπρόσθετη ιδιότητα}}$

$(k_n)_{n\in N} \subseteq \mathbb{N}$

Πρόταση (είναι βολικό για την άρνηση. Δλδ του να μη συγκλίνει)

Κάθε ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν κάθε καθε υποακολουθία αυτής συγκλίνει.

απόδειξη: Έστω ότι η $a_n$ συγκλίνει στο $a$ $\lim a_n = a$ και $a_{k_n}$ αυθαίρετη υποακολουθία αυτής. Θα αποδείξουμε ότι και η $a_{k_n}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Επειδή $\lim a_n = a$, έχουμε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

→ Τώρα κοιτάμε να έχει και η υποακολουθία την ίδια ιδιότητα.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\exists k_{n_1} \geq n_0$

οπότε $k_n \geq n_0$, $\forall n \geq n_1$

και επομένως ο $a_{k_n}$ ικανοποιεί

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon, \ n \geq n_1.$$

$\Rightarrow$ $a_{k_n}$ συγκλίνουσα με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n} = a$.

! SOS

Για να μην συγκλίνει η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Αρκεί να υπάρχουν τουλάχιστον 2 υποακολουθίες που να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

$a_n = (-1)^n$ είναι μη συγκλίνουσα ακολουθία διότι

$a_{2n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

$a_{2n-1} = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$

άσκηση: Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

- $a_{2n}$ συγκλίνει
- $a_{2n-1}$ συγκλίνει
- $a_{3n}$ συγκλίνει

Τότε η $a_n$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

<u>άσκηση</u> : Αποδείξτε ότι η $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

είναι συγκλίνουσα ακολουθία. συγκλίνει στο $\ln 2$

Το ερώτημα είναι να δείξουμε ότι συγκλίνει και όχι που συγκλίνει.