Ανδρομάχη

Πέμπτη 2 Οκτωβρίου 2014

Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

8/10/14

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 2

1). Δίνεται το σύνολο

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Βρείτε με απόδειξη το

$$\inf A.$$

2). Έστω $A,\ B \subset \mathbf{R}$ μη κενά και φραγμένα. Θέτουμε

$$A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

3). Αποδείξτε με κατάλληλη χρήση του ακεραίου αριθμού, ότι στο διάστημα

$$[\sqrt{2},\ 2],$$

υπάρχει αριθμός της μορφής

$$\frac{m}{n}\sqrt{3}, \quad m, n \in \mathbf{N}.$$

Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένους αριθμούς $m, n \in \mathbf{N}$;

4). Αποδείξτε, με χρήση του αξιώματος της πληρότητας, ότι η εξίσωση

$$x^3 = 3,$$

έχει θετική λύση.
Υπόδειξη: Θεωρήστε κατάλληλο σύνολο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Πέμπτη 2 Οκτωβρίου 2014

Α. Τερτίκας, Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Φυλλάδιο 2

1). Δίνεται το σύνολο

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Βρείτε με απόδειξη το

$$\inf A.$$

2). Έστω $A,\ B \subset \mathbf{R}$ μη κενά και φραγμένα. Θέτουμε

$$A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

3). Αποδείξτε με κατάλληλη χρήση του ακεραίου αριθμού, ότι στο διάστημα

$$[\sqrt{2},\ 2],$$

υπάρχει αριθμός της μορφής

$$\frac{m}{n}\sqrt{3}, \quad m, n \in \mathbf{N}.$$

Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένους αριθμούς $m, n \in \mathbf{N}$;

4). Αποδείξτε, με χρήση του αξιώματος της πληρότητας, ότι η εξίσωση

$$x^3 = 3,$$

έχει θετική λύση.
Υπόδειξη: Θεωρήστε κατάλληλο σύνολο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ 1. 23|9|14

ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ :

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΒΗΜΑΤΑ
+
ΚΑΤΑΛΛΗΛΕΣ ΑΠΕΙΡΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ
"ΟΡΙΑ".

→ ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ.

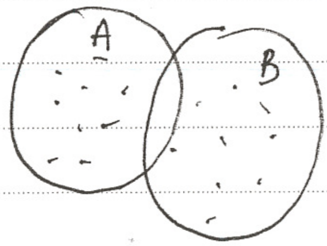
Πραγματικοί Αριθμοί (Real numbers)
$\mathbb{R}$

Συνολα (Sets)

$$A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow A \cup B \subseteq \mathbb{R},\ A \cap B \subseteq \mathbb{R}$$

Φορμαλισμος

Διαγραμμα Venn.



$\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R}$

καθε υποσυνολο ειναι υποσύνολο του R

Αρα φορμαλισμός είναι :

Καθε $\underbrace{\text{στοιχείο}}_{}$ του Γ είναι και στοιχειο του Δ.

$\forall \underset{\text{ανηκει}}{x \in \Gamma} \Longrightarrow x \in \Delta$

$\Gamma = \Delta$ όταν περιέχει $\mathbb{R}$ ίδια ακριβως στοιχεια

$\Gamma \subseteq \Delta$
$\Delta \subseteq \Gamma$ $\Rightarrow \Gamma = \Delta$
$\Delta \supseteq \Gamma$

$\in$ $x \in \Gamma$

$A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A^c$
$\qquad\qquad\qquad\;\, \|$
$\qquad\qquad\qquad \mathbb{R} \setminus A$

Άσκηση: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$A\cup B \to (A\cap B)^c \Downarrow A^c \cap B^c$

Απ Έστω $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ \text{\&} \\ x \notin B \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} x \notin A \Rightarrow x \in A^c \\ x \notin B \Rightarrow x \in B^c \end{array} \right| \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \Rightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \; (1)$

$\Longleftarrow$ Έστω $x \in A^c \cap B^c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \\ \text{\&} \\ x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B \end{array} \right.$

$\Longrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c$ δηλ.
$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c \; (2)$

$(1), (2) \Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Άσκηση: Έστω $A_1, \dots A_n \subseteq \mathbb{R}$. Τότε

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} A_i^c$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ (induction)

$$\underset{\mathbb{R}}{a} + \underset{\mathbb{R}}{b} \longrightarrow a+b$$

Αξιώματα:

1º $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2º $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

3º $\exists$ ουδέτερο στοιχείο, $a+0=0+a=a \quad \forall \in \mathbb{R}$

4º $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x)$ αντίθετο στοιχείο $, x+(-x)=0$

5º $a(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad , \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

6º $a\cdot b = b\cdot a \quad , \forall a,b \in \mathbb{R}$

7º $\exists \ 1 \in \mathbb{R} \quad a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

8º $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists \ x^{-1} \in \mathbb{R}$

$x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = 1 \quad , \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

9º $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ στο $\mathbb{R}$.

Διάταξη: $\forall x \in \mathbb{R}$ είτε $x>0$

είτε $x<0 \Leftrightarrow -x>0$

μια αρνητική $\mathbb{R}_0^+ = [0,+\infty)$ είτε $x=0$

$\forall \ x,y$

είτε $x<y$

είτε $x>y$

-ll- $x=y$

ΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ.

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

Ορισμός: Το $A \subseteq \mathbb{R}$ το λέμε ότι είναι άνω φραγμένο όταν $\exists \ M \in \mathbb{R}$ ώστε: $\forall a \in A \ , a \leq M$.

ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ :

Κάθε (μη κενό) άνω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.
$\boxed{\alpha \leq M}$
(∴ Υπάρχει αριθμός s (supremum) που είναι ελάχιστο άνω φράγμα)

Π.χ 1: $A = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ → από τις μέγιστες το ελάχιστο.
→ άνω φράγμα
$\sup A = 1$

Π.χ 2: $B = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ελάχιστο άνω φράγμα

$\sup B = 1$

Π.χ 3: $\mathbb{N}$ (Natural).
δεν είναι άνω φραγμένο το σύνολο των φυσικών. (Είναι άπειροι)
Αποδ. Απαγωγή σε Άτοπο

$A \Rightarrow B$
$\neg B \Rightarrow \neg A$

$\boxed{\text{ΣΥΣΧΕΤΙΖΟΥΜΕ}}$.

$\Rightarrow$ Από το Αξίωμα της Πληρότητας $\exists\, M \in \mathbb{R}$ ώστε
$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$

Αναλυση 1 : 25/9/14

Ασκηση Οι $\mathbb{N}$ δεν ειναι φραγμενο συνολο.

Αποδειξη Απαγωγη σε ατοπο

Εστω πως $\mathbb{N}$ ειναι φραγμενο συνολο. (*)

Το αξιωμα της πληροτητας.

$\emptyset \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

Ειναι $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ανω φραγμενο

τοτε υπαρχει $s = \sup A$ το μικροτερο απο R ανω φραγμενο R.

M ανω φραγμα για το A / $\forall a \in A$, $a \leq M$. (2)

Να μου το ξαναεξηγησουν

(*) Απο τον αξιωμα της πληροτητας, το $\mathbb{N}$ θα ειχε supremum, δη $\exists M = \sup \mathbb{N}$ τοτε το M ειναι το μικροτερο απο τα ανω φραγματα

τοτε $M-1$ δεν ειναι ανω φραγμα. οποτε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ αντιφαση

$n > M-1 \iff n+1 > M$

γιατι το M ειναι ανω φραγμα επισης

(2) το M να μην ειναι ανω φραγμα για το A.

$\exists a \in A$, $a > M$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$ ειτε $-x \geq 0$

$\mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$

ANISOTHTES

i) $\left.\begin{array}{l} a \geq \beta \\ x \geq y \end{array}\right| \iff \boxed{a - \beta \geq 0} \iff a + x \geq \beta + y$

$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right| \Rightarrow x + y > 0$

συσχετισε $\lambda > 0$

$a \geq \beta$ λa $\lambda\beta$

$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right| \Rightarrow xy > 0$

Διακρινουμε περιπτωσεις

$\lambda a \geq \lambda \beta \iff$

$\underset{(+) > 0}{\lambda} (a - \beta) \geq 0$

$-\lambda > 0$

$-\lambda a \geq -\lambda\beta \iff$

$\lambda\beta \geq \lambda a$

ii) $a \geq \beta \geq 0$ $\boxed{a - \beta \geq 0}$

$x \geq y \geq 0$

$\Downarrow$

$ax > \beta y$

να το εξηγήσω

Αν

$0 \geq a \geq \beta$

$0 \geq x \geq y$

$\Downarrow$

$\alpha x \leq \beta y$

$0 \leq a \leq -\beta$

$0 \leq -x \leq -y$

$\Downarrow$

$\alpha x \leq \beta y$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο. Ο S είναι το $\sup A$ αν και μόνο εάν το S έχει 2 ιδιότητες:

Supremum: ελάχιστο άνω φράγμα

i) $\forall\, a \in A$, $a \leq S$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, θα υπάρχει $\exists\, a \in A$ $S - \varepsilon < a$

Άσκηση: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, το B άνω φραγμένο. Τότε τα A, B έχουν supremum και μάλιστα

$$\sup A \leq \sup B$$

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \text{ άνω φραγμ.} \end{array}\right| \Rightarrow A$ άνω φραγμένο

Απόδειξη: Από το Αξίωμα πληρότητας (το $\emptyset \neq B$ άνω φραγμένο) έχει $\sup B$

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ιδιότητα με $M = \sup B$

$\forall\, a \in A$, $a \leq \sup B$

$\Longrightarrow \sup A \leq \sup B$

Αν M άνω φράγμα του B

$\beta \leq M \quad \forall\, \beta \in B$

$\alpha \in A \Rightarrow a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq M$

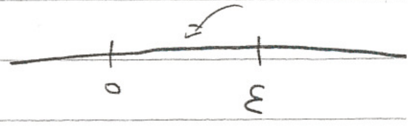
$\Rightarrow M$ άνω φράγμα του A

Το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του $A \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

Ανάλυση 1 (Β)

ΘΕΩΡΗΜΑ : (Αρχιμήδεια ιδιότητα)

$\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$



Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τέτοιο
ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Αποδ: $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff 1 < n \cdot \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο. Τότε υπάρχει το $\inf A$ (δηλ. μέγιστο κάτω φράγμα.

Αποδ $A \subseteq \mathbb{R}^{+}$

$$\inf A = \frac{1}{\sup B}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{a}, \ a \in A \right\}$$

Αποδ: Θεωρούμε το σύνολο $B = \{ -a \mid a \in A \}$
Τότε το B είναι άνω φραγμένο, διότι επειδή το A είναι κάτω φραγμένο, $\exists\, -M \in \mathbb{R}$ τότε

$$-M \le a \quad , \forall a \in A$$
$$\Updownarrow$$
$$-a \le M \quad , \forall a \in A.$$

M άνω φράγμα του B, δηλ B άνω φραγμένο
υπάρχει το $\sup B = s$, με τις ιδιότητες
i) $-a \le s$, $\forall\, a \in A$
ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A$, $s - \varepsilon < -a$

$\iff$ 1) $-s \le a$
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A$
2) $a < -s + \varepsilon$
$a - \varepsilon < -s$

$-s$ το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα
$\inf A = -s$

α

30/9/14

Αναλυση Ι :

$$\left(\bigcap_{i=1} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i^c$$

ΑΣΚΗΣΗ 1 :

Να αποδείξετε επαγωγικά (Bernouli)

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ , \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \geq -1$$

Μαθηματική Επαγωγή :

$P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$

Βήμα 1ο :

Αποδεικνύουμε την πρόταση για $n = n_0$
δηλ $P(n_0)$ είναι αληθής.

Βήμα 2ο :

Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ αληθεύει

Βήμα 3ο :

Αποδεικνύουμε ότι ~~θα~~ αληθεύει η $P(k+1)$

Απόδειξη : Βήμα 1ο : Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=1$, δηλ.

$$(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x \Leftrightarrow$$

ισχύει μάλιστα ότι $1+x = 1+x$

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k \in \mathbb{N}$, δηλ.

$$(1+k)^k \geq 1+k\cdot x$$

Βήμα 3ο : Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=k+1$ δηλ.

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x \quad , \quad x \geq -1$$

πράγματι :

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \;?$$

?: Όμως $\left.\begin{array}{l}(1+x)^k \geq 1+kx \\ 1+x \geq 0\end{array}\right| \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$

$$= 1+x+kx+kx^2$$

$$= 1+(1+k)x+kx^2$$

$$\geq 1+(k+1)\cdot x$$

Διωνυμικό Newton :

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

sup A

Θεώρημα :

1) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, και φραγμένο το sup A είναι ο αριθμός

i) $\forall\, \alpha \in A$, $\alpha \leq \sup A$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \beta \in A$ $\sup A - \varepsilon < \beta$.

Αναλυση 1 30/9/14 (β)

ε) $\phi \neq B \subseteq \mathbb{R}$, κατω φραγμενο $\exists \inf B$

i) $\inf B \leq \beta$, $\forall \beta \in B$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \beta' \in B < \inf B' + \varepsilon$?

ΑΣΚΗΣΗ:

Εστω $\phi \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, ανω φραγμενα. Αποδειξτε οτι το $A \cup B$ ειναι ανω φραγμενο, και μαλιστα
$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

? Αποδειξη:

Επειδη, τα A, B ειναι ανω φραγμενα, $\exists \sup A, \sup B$ και μαλιστα

$\forall \alpha \in A$, $\alpha \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$

$\forall \beta \in B$, $\beta \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$

$\Downarrow$

$\forall x \in A \cup B$, $x \leq \max(\sup A, \sup B)$

Υποθετουμε οτι $\sup A \geq \sup B$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha' \in A$ $\sup A - \varepsilon < \alpha'$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha' \in A \cup B : \sup A - \varepsilon < \alpha' \Rightarrow \sup(A \cup B) = \sup A$

Θεώρημα:

Η εξίσωση $x^2 = 2$ εχει θετική λύση

Αποδειξη:

Θεωρουμε το συνολο $A = \{x > 0 \mid x^2 < 2\}$
τοτε $1 \in A \neq \emptyset$

Το 2 ειναι ανω φραγμα για το A διοτι:

$\forall x \in A \Rightarrow x \leq 2$

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

$\exists x \in A, \quad \left.\begin{matrix} x > 2 > 0 \\ x > 2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$

$x^2 > 4 > 2$

Ατοπο

Οπως απο το Αξιωμα της πληροτητας, το A εχει supremum (Sup A)

Θα αποδειξωμε οτι:

$$(\sup A)^2 = 2$$

Εστω οτι $(\sup A)^2 \neq 2$

Τοτε ειτε $(\sup A)^2 > 2$ (1)

$(\sup A)^2 < 2$ (2)

(1)

δεν φραγμα το A

σε αυτο οταν θα βαζουμε τετραγωνο

Sup A   Sup A − ε   δεν φραγμα το A

$(\sup A - \varepsilon)^2 > 2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2 - 2\varepsilon \sup A + \varepsilon^2 > 2$

Αρκει να βρω $\varepsilon > 0$, ωστε:

$(\sup A)^2 - 2\varepsilon \sup A > 2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2 - 2 > 2\sup A > 2 \sup A\, \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\frac{(\sup A)^2 - 2}{2\sup A} > \varepsilon > 0$$

(2) Αν $(\sup A)^2 < 2$

$(\sup A + \varepsilon)^2 < 2 =$?

$(\sup A)^2 + 2\varepsilon \sup A + \varepsilon^2 < 2$

$\boxed{(\sup A)^2 + 2\varepsilon \sup A + \varepsilon < 2}$

ΑΝΤΙΦΑΣΗ $0 < \varepsilon < \dfrac{2 - (\sup A)^2}{1 + 2\sup A}$

<u>Λήμμα</u>:

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει ρητός για $(1,2)$

i) Αποδείξτε ότι αν $a < \beta \Rightarrow \exists$ ρητός για (a,b)

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

i) $3/2$

ii) $\beta - a > 1 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z}$

$0 < \beta - a < 1$

$n(\beta - a) > 1$ αρχιμήδεια ιδιότητα $m \in \mathbb{Z} \in [n\alpha, n\beta]$

$\alpha < \dfrac{m}{n} < \beta$

$[x] = \sup\{m \in \mathbb{Z},\, m \le x\}$

Αναλυση ασκησεων 1/10/14

ΑΣΚΗΣΗ 1 ΣΕΛ φωτοτυπια

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

για $n=2$ $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c \Rightarrow$

Δεχομαι οτι $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

και καπω $\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c \cup A_{k+1}^c = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c \cup A_{k+1} =$

$= \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i^c$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ΣΕΛ ΦΩΤΟΤΥΠΙΑ

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Εχω δυο μεταβλητες θα παρω $n=1$

$1+x \geq 1+x + \frac{0}{2}x^2 \Rightarrow 1+x \geq 1+x \Rightarrow 1+x = 1+x$ ισχυει

$(n+1)$? πως το κανω

Δεχομαι οτι $(1+x)^k \geq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2} x^2$

Πρεπει να νδο $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)(k+1-1)}{2} x^2$

$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2} x^2$$

$$(1+x)^{k+1} \geq \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2} x^2\right)(1+x) =$$

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2} x^2 + x + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2} x^3 \overset{x>0}{\geq}$$

$$\geq 1 + (k+1)x + \frac{k^2 - k + 2k}{2} x^2$$

$$\boxed{A=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}}$$

$A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$ Αφού $n=1$ $\quad 1+\frac{-1}{1}=0$

$n=2 \quad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$n=3 \quad 1+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$n=4 \quad 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$n=5 \quad 1+\frac{(-1)}{5}=\frac{4}{5}$

$x\in A \quad x<10 \Rightarrow A$ άνω φραγμένο $\Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$

$\sup A = 1+\frac{1}{2} = \max A$

$\inf A = 0 = \min A$

$$\boxed{B=\left\{1+\frac{1}{n} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}}$$

$\sup B = 2 = \max B$

$\inf B = 1, \nexists \min B$

$$\boxed{D=\left\{\frac{1}{1+x} \;\middle|\; x\in[1,+\infty)\right\}}$$

$D=0 \quad$ π.χ. $\forall x\in D, \; x\leq\frac{1}{2}$

$\max D = \sup D = \frac{1}{2}$ (για $x=1$ επειδή είναι φθίνουσα)

$\forall x\in D, \; x\geq -1 \quad \underset{0}{\overset{\|}{\inf D}} \in \mathbb{R} \quad \nexists \min D$

Αναλυση 1/10/14

$A = \{ x \in \mathbb{R} : x > 1 , x^2 + x < 2014 \}$

$A \neq \emptyset \ (2 \in A)$

A άνω φραγμένο : $\forall x \in A : x \leq 50$ αν $x \in A \Rightarrow$ Αν $x > 50$ (για άτοπο)

τότε $x^2 > 2500$

$x^2 + x > 2550$

$\Rightarrow x \notin A$

$\exists$ το $s = \sup A$

Δ.Ο $s^2 + s = 2014$ $\quad (\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha)$

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \alpha \leq \beta + \varepsilon$

$(\Rightarrow) \ \alpha \leq \beta < \beta + \varepsilon \ (\Leftarrow)$ Για άτοπο

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} > 0$ Τότε $\alpha \leq \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} =$

$\frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\alpha + \alpha}{2} = \alpha$ άτοπο

$s^2 + s = 2014$

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists x \in A : s - x < \varepsilon$

$s^2 + s^2 \leq 2014 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , s^2 + s \leq 2014 + \varepsilon$

Άρα $s < x + \varepsilon_0 \Rightarrow s^2 < (x + \varepsilon_0)^2 = x^2 + 2 + \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2$

$s^2 + s < x^2 + x + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 + 2x\varepsilon_0 < 2014 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 + 2x\varepsilon_0$

Έστω $\varepsilon_0 > 0$

Θέλω $\left.\begin{array}{l} \varepsilon_0^2 < \frac{\varepsilon_0}{3} \\ \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_0}{3} \\ 2x\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_0}{3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \varepsilon_0 < \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}} \\ \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_0}{3} \\ \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_0}{6x} \end{array}\right\}$ παίρνω $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{3} , \frac{\varepsilon_0}{3} , \frac{\varepsilon_0}{6x} \right.$

Για το ε_0 έχω ότι $\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 + 2x\varepsilon_0 < \varepsilon$ Άρα $s^2 + s < 2014 + \varepsilon$

$\forall x \varepsilon > 0 \Rightarrow s^2 + s \leq 2014$

Υποθέτω ότι ... $s^2 + s < 2014$ $\quad$ Ν.δ.ο $\exists \varepsilon > 0 : s + \varepsilon \in A$

Αναλυση 1 — 2/10/14

Θεωρημα: Η εξισωση $x^2=2$ εχει θετική λύση

$$A = \{ x \mid 0<x ,\ x^2<2 \}$$

$$(\sup A)^2 = 2.$$

Θεωρημα 1: Αν $\alpha<\beta$ τοτε στο διαστημα $[\alpha,\beta]$ υπαρχει ρητος q, δηλ. $\exists\, m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$ οπως $\alpha \le q\frac{m}{n} \le \beta$.

Θεωρημα 2: Αν $\alpha<\beta$, τοτε στο διαστημα $[\alpha,\beta]$ υπαρχει αρρητος δηλ. $R\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$\alpha \le R \le \beta$$

$\alpha<\beta$, $\exists$ ακεραιοι, αν $\beta-\alpha\ge 1$

Αν $x\in\mathbb{R}$, ακεραιο μερος του $[x]$

$$[x] := \sup\{ y\in\mathbb{Z} \mid y\le x \}$$

$?\ \exists\, m\in\mathbb{Z} : m\le x \iff -x\le m$

Το x ειναι ανω φραγμα.

$\sup A \notin \mathbb{Z}$

$\sup A \le x$

$\sup A - 1 < \sup A$

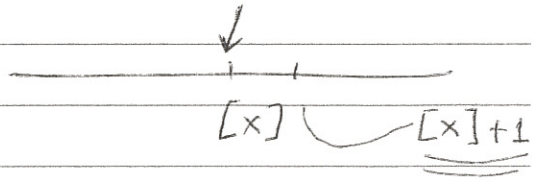
$\Rightarrow \exists\, y\in A$ ωστε $\sup A - 1 < y$

$\sup A < y+1$

$\Rightarrow \sup A \in \mathbb{Z}$

Ιδιοτητα:

$$[x] \le x < [x]+1$$



Απόδειξη:

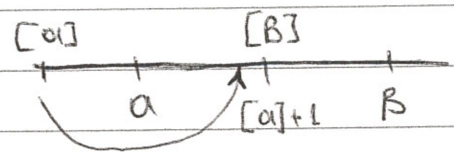
1) $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $\quad [x+y] \quad [x]+[y]$

2) $n\in\mathbb{Z}$ $\quad [x+n] \le [x]+n$

Αν $\alpha < \beta$. Ερώτημα: υπάρχει ακέραιος $m \in [\alpha, \beta]$.

ΝΑΙ αν $\beta - \alpha \geq 1$, βρείτε ένα.

$$[\beta] \in [\alpha, \beta]$$



Αν $0 < \beta - \alpha < 1$

→ Έστω πως τις έχει βρει

$$\alpha \leq \frac{m}{n} \leq \beta \iff$$

$$n\alpha \leq m \leq n\beta$$

Αν $n\beta - n\alpha \geq 1 \iff n(\beta - \alpha) \geq 1 \iff \boxed{n \geq \frac{1}{\beta - \alpha}}$

$$\left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right] \leq \frac{1}{\beta-\alpha} < \underbrace{\left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right] + 1}_{n}$$

<u>Απ θ1</u>: Επιλέγω $n = \left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ διότι $\beta - \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta-\alpha} > 0$

Τότε $\frac{1}{\beta-\alpha} < n \iff n \cdot (\beta - \alpha) > 1 \iff$

$$n\beta - n\alpha > 1$$

Επομένως το διάστημα $[n\alpha, n\beta]$, μπορώ να βρω ακέραιο

για παράδειγμα επιλέγω $m = [n\alpha] + 1$

Ⓑ

Ανάλυση 1 2/10/14

Τότε $na \le m \le n\beta \Leftrightarrow a \le \boxed{\frac{m}{n}} \le \beta$

οπότε ο $q = \frac{m}{n} = \frac{[a + a[\frac{1}{b-a}]] + 1}{[\frac{1}{b-a}] + 1}$

$x > 0 \quad , x^2 = 2$

Έστω πως $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$
$x = \frac{m}{n}$ κ επομένως $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$

Αν m είναι περιττός δηλ $m = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$
$m^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$
περιττός $\Rightarrow m$ άρτιος $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}$.

$4m_1^2 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 = 2m_1^2$

$\xrightarrow{\text{για τον ίδιο λόγο}}$ n άρτιος, δηλ: $n = 2n_1$, $m = 2m_1$ $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$

$2 / m, n$

Άτοπο.

Απόδειξη Θεωρ. 2

$1 = \sqrt{2}$

$\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 + nm_1}{nn_1}$

$\frac{m}{n} \cdot a = a'$

$\frac{m_1}{n_1} \Rightarrow a = \frac{m_1 n}{n_1 m} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$

Θεώρημα $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Απ. Θ 2.

Βρω $m \in \mathbb{Z}$ {υφ

$n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\alpha \le \frac{m}{n}\sqrt{2} \le \beta \iff$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \le \frac{m}{n} \le \frac{\beta}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Απ Θ1.

$\exists\ q = \frac{m}{n}$ που ικανοποιεί την (1)

Βρείτε:

Για $a < \beta$ $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$a \le \frac{m}{n} + \sqrt{2} \le \beta$$

$\emptyset \ne A \subseteq \mathbb{Q}$, άνω φραγμένο

$\exists\ \sup A \in \mathbb{R}$

$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x, \ x^2 < 2 \}$

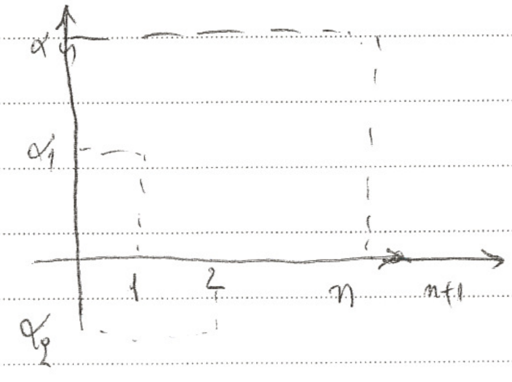
$\sup A = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{Ακολουθία}}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(n) \xrightarrow{\text{συμβολίζω}} f_n$

Γραφική παράσταση:



(8.)

2/10/14

Ανάλυση 1

Πότε η a_n συγκλίνει
αλλιώς συγκλίνουσα ακολουθία | Αν $\exists\ l \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = l}$$

$$\boxed{a_n = l,\ n\to\infty}$$

Ορισμός:

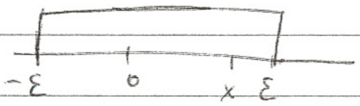
$\lim a_n = l$ όταν:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$|a_n - l| < \varepsilon,\ n \ge n_0$

$|x| < \varepsilon \iff$

$-\varepsilon < x < \varepsilon$



Τριγωνική ανισότητα

$|x+y| \le |x| + |y|$

$|a_n - l| < \varepsilon \iff$

$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \quad , n \ge n_0$

$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad , n \ge n_0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon):$

$|a_0 - 0| < \varepsilon \quad , n \ge n_0$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \boxed{\frac{1}{\varepsilon} < n}$$

Αναλυση 1 7/10/14

Θ1 :

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha < \beta \quad , \quad \exists \frac{m}{n} , m \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N}$

$$a \leq \frac{m}{n} \leq \beta .$$

Θ2 : $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \ , \alpha < \beta \quad \exists \frac{m}{n} , m \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N}$

$$\alpha \leq \frac{m}{n} \sqrt{2} \leq \beta$$

Αξιωμα πληροτητος :

Ακολουθιές (πραγματικών αριθμών) :

Ορίσαμε

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$$

$\forall \ \varepsilon > 0 , \quad \exists n_0 , n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ωστε

$$|a_n - a| < \varepsilon , \quad n \geq n_0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Longleftrightarrow \boxed{a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon} , n \geq n_0$$

Ερώτημα :

Μπορεί η ακολουθία να συγκλίνει σε διαφορετικά (διακεκριμένα) όρια ?

δηλ. $\exists \ a, a' , a \neq a'$, ωστε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a'$$

Απόδειξη: Έστω ότι είναι δυνατόν, δηλ. έχουμε I, II

Από τον ορισμό έχουμε ότι:

$$\forall \varepsilon>0 \;,\; \exists\, n_1=n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$$
$$|a_n-a|<\varepsilon \;,\; n\geq n_1$$

Επίσης

$$\forall \varepsilon'>0 \;,\; \exists\, n_2=n_2(\varepsilon')\in\mathbb{N}$$
$$|a_n-a'|<\varepsilon' \;,\; n\geq n_2$$

Επιλέγουμε $\varepsilon=\varepsilon'=\dfrac{|a-a'|}{4}$

$\exists\, n_1\in\mathbb{N}$

τότε $|a_n-a|<\dfrac{|a-a'|}{4}$, $n\geq n_1 \Rightarrow n\geq \max(n_1,n_2)=n_0$

$\exists\, n_2\in\mathbb{N}$ $|a_n-a'|<\dfrac{|a-a'|}{4}$, $n\geq n_2 \Rightarrow n\geq \max(n_1,n_2)$ n_0

Τότε όμως:

$$|a-a'|=|a-a_n+a_n-a'|\leq|a-a_n|+|a_n-a'|<\frac{|a-a'|}{4}+\frac{|a-a'|}{4},$$
$n\geq n_0$.

$$|a-a'|<\frac{|a-a'|}{2} \iff \frac{1}{2}|a-a'|<0$$ Άτοπο

Πρόταση: Έστω η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, είναι συγκλίνουσα ακολουθία

Τότε η ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Από τον ορισμό $\exists k\in\mathbb{N}$, ώστε

$$\forall \varepsilon>0 \;,\; \exists\, n_0=n_0(\varepsilon):$$
$$|a_n-a|<\varepsilon \;,\; n\geq n_0$$

Αναλυση 1 7/10/14

Επιλεγουμε $\varepsilon = 1$ τ.ώ.ε

$$a-1 < a_n < a+1 \quad , n \geq n_0$$
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0-1}$$

Τότε

$$\min(a_1, a_2 \dots a_{n_0-1}) \leq a_n \leq \max(a_1, a_2, a_3 \dots a_{n_0}, a+1)$$

Ακολουθία φραγμένη (a_n) $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, m \leq M$

ώστε
$$-\max(|M|,|m|) \leq a_n \leq M \leq \max(|M|,|m|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόλυτα φραγμένη ($|a_n|$ φραγμένη)
$$\exists \quad |a_n| \leq M' \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$-M' \leq a_n \leq M'$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n \uparrow$ και άνω φραγμένη.

ορίζουμε το σύνολο:

$$A = \{ a_n / n \in \mathbb{N} \}$$

$$a_1 \in A \Longrightarrow A \neq \emptyset$$

Επειδή η (a_n είναι άνω φραγμένη), $\exists\, M \in \mathbb{R}$
$$a_n \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$
$\Longrightarrow$ το M είναι άνω φραγμένη για το A.

Όπως επειδή πληρούνται οι προϋποθέσεις του αξιώματος της πληρότητας, θα $\exists$ $\sup A$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$

Από τον ορισμό του supremum

$\alpha_n \leq \alpha$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, a_{n_0}$ ώστε $\underline{a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a}$ $\quad n \geq n_0$

$\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$\overline{|a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon|} \quad n \geq n_0$

$\Downarrow$

$|a_n - a| < \varepsilon \quad n \geq n_0$

(Αποδεικνύουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$)

<u>Άλγεβρα Συγκλινουσών Ακολουθιών.</u>

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Τότε

i) $(a_n + b_n)$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

ii) $(\alpha_n \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \beta_n = a \cdot b.$$

Πρόχειρο $\longrightarrow$ Απόδειξη

$\lim a_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0 \,,\ \exists\, n_1 = n_1(\varepsilon):$
$|a_n - a| < \varepsilon \,,\quad n \geq n_1 \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$\lim \beta_n = \beta \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_2 = n_2(\varepsilon)$
$|\beta_n - \beta| < \varepsilon/2 . \qquad n_1 \geq n_2 \geq n_0$

i) Για $\varepsilon > 0$, $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$|a_n + \beta_n - (a+\beta)| = |(a_n - a) + \beta_n - \beta| \leq |a_n - a| + |\beta_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$

Πρόχειρο: $\qquad |a_n - a| \,,\ |\beta_n - \beta|$

$|a_n\beta_n - a\beta| =$
$= |a_n\beta_n - a_n\beta + a_n\beta - a\beta|$
$= |a_n(\beta_n - \beta) + \beta(a_n - a)| \leq |a_n||\beta_n - \beta| + |\beta||a_n - a|$
$\leq M|\beta_n - \beta| + |\beta||a_n - a|$

Πρόταση:

$a_n \to a \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow \dfrac{1}{a} \qquad a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$

(2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ |\beta_n| \leq M \end{array}\right| \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n\beta_n) = 0$

8/10/14

Εργαστηριο αναλυση 1 :

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1] $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$
Υπολογιστε το $\inf A$ με αποδειξη

2] $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη-κενα
και φραγμενα
$A - B = \{ a - b : a \in A , b \in B \}$
Αποδειξτε οτι $\sup (A-B) = \sup A - \inf B$

Ιδιοτητες :

$A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενο πανω φραγμενο S ειναι το $\sup A$.
i) $\forall \alpha \in A$, $\alpha \leq S$
ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha \in A$ $S - \alpha < \varepsilon$

$A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενο κατω φραγμενο t ειναι το $\inf A$
i) $\forall \alpha \in A$, $\alpha \geq t$
ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha \in A$: $\alpha - t < \varepsilon$.

Αρχιμηδεια :
Εστω $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ ωστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$

ΑΣΚΗΣΗ 1 : $\inf A = 0$ $\forall \alpha \in A$ $\exists$ $\alpha \geq t$ διοτι για $n=1$ 1
για $n=2$ 1/2
1/3
1/4
1/5
Τα στοιχεια του συνολα A

αρα $\exists$ $\alpha \geq \inf A$.
Απο αρχιμηδεια ιδιοτητα διαπιστωναμε οτι και για $\frac{1}{n} - t < \varepsilon$
ισχυει , οπου $t = 0$

2) A πανω φραγμενη $\Rightarrow \exists\, s \in \mathbb{R}\ \alpha \le s,\ \forall \alpha \in A$
B κατω φραγμενη $\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\ b \ge t,\ \forall b \in B$
$\forall \alpha \in A,\ \forall b \in B$
$\alpha - b \le s - t$
<u>Δηλ</u>: το $A-B$ ανω φραγμα

i) $\forall \alpha \in A,\ \alpha \le \sup A$
$\forall b \in B,\ b \le \sup B$

Αρα $\forall \alpha \in A, \forall b \in B$
$\alpha - b \le \sup A - \inf B$
$\Downarrow$
$\sup A - \inf B$ πανω φραγμα του $A-B$

ii) $\varepsilon > 0 : \exists\, \alpha \in A : \sup A - \alpha < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists\, b \in B : b - \inf B < \frac{\varepsilon}{2}$
$\overset{\oplus}{\Rightarrow} \sup A - \alpha + b - \inf B < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow (\sup A - \inf B) - (\alpha - b) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$
$\Downarrow$
$\varepsilon\ A-B$

<u>Ειδικότερα</u> $A = \{0\}$
Τοτε $\sup(\{0\} - B) = \sup\{0\} - \inf B \Rightarrow \sup(-B) = -\inf B$

3) $t = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 0$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow n\frac{(2-\sqrt{2})}{\sqrt{3}} > 1$

$a - b \ge 1 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : a \le k \le b$ τοτε $\exists\, m \in \mathbb{Z} : \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{3}} \le m \le \frac{2n}{\sqrt{3}}$
$[b] \to$ ακέραιο μερος

Επομένως $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \le \frac{m}{n} \le \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{2} \le \frac{m}{n}\sqrt{3} \le 2$

4) $A = \{ x \in \mathbb{R}$ με $x > 0,\ x^3 < 3 \}$, $A \neq \emptyset$ $1 \in A$
$\forall \alpha \in A,\ \alpha \le 2$.
Πράγματι αν $\alpha \in A$ και $\alpha > 2$ τότε $\alpha^3 > 8$ ατοπο
Αρα $\exists$ το $\sup A = s \in \mathbb{R} \Rightarrow (s > 0)$
Θ.δ.ο $s^3 = 3$ ($s^3 \le 3$ και $s^3 \ge 3$)
$s^3 \ge 3$ Εστω $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon_0 > 0$
$\exists\, \alpha \in A : s - \alpha < \varepsilon_0 \Rightarrow s - \varepsilon_0 < \alpha$
Αρα $s^3 < (\alpha + \varepsilon_0)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\varepsilon_0 + 3\alpha\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^3$

$< 3 + (3a_0^2 + 3a\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2)$ $\quad (a<b+\varepsilon, \ \forall \varepsilon>0 \Rightarrow a \leq b)$

Θα επιλέξω το ε_0 κατάλληλα ώστε $3a^2\varepsilon_0 + 3a\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 < \varepsilon$ [και]

Απαιτώ : $3a^2\varepsilon_0 < \varepsilon/3$

$3a\varepsilon_0^2 < \varepsilon/3$

$\varepsilon_0^3 < \varepsilon/3$

Απαιτώ $\varepsilon_0 < \varepsilon/9a^2$

$\varepsilon_0^2 < \varepsilon/9a$

$\varepsilon_0^3 < \varepsilon/3$

Γι' αυτό το ε_0 αυτή η ποσότητα $3a^2\varepsilon_0 + 3a\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon$

$n \in \mathbb{N}, \ t>0 \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} : x>0, \ x^n < t\} \neq \emptyset\}$

Δείξαμε $\forall \varepsilon>0 \quad s^3 < 3+\varepsilon \Rightarrow s^3 \leq 3$

$s^3 \geq 3$ Για άτοπο έστω ότι $s^3 < 3$. Τότε $\exists \ \varepsilon>0$

$s^3 + \varepsilon > 3$

(αν όχι, $\forall \varepsilon>0 \quad s^3 + \varepsilon \geq 3$)

$\Rightarrow s^3 \geq 3$

$(s+\varepsilon_0)^3 = s^3 + 3s^2\varepsilon_0 + 3s\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2$

Επιλέγω $\varepsilon>0$ κατάλληλα: $3s^2\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 \cdot s \cdot 3 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon$

Άρα $\varepsilon_0 > 0 : (s+\varepsilon_0)^3 < s^3 + \varepsilon < 3$

Άρα $(s+\varepsilon_0) \in A \Rightarrow s + \varepsilon_0 \leq \sup A = s \Rightarrow \varepsilon_0 < 0$

άτοπο

Αναλυση 1 9/10/14

- Επαναληψη

Ορισμός: $\lim a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon):$

$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$

Θεώρημα: Καθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει

Οταν δεν ξέρω ακριβώς την ακολουθία.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

$\Downarrow$

ΦΡΑΓΜΕΝΗ

→ Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ τότε $a_n\beta_n$ είναι

συγκλινουσα ακολουθια είναι μαλιστα $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim \beta$

Αποδειξη

Επειδή η a_n είναι συγκλινουσα, θα είναι απολυτως φραγμένη, δηλ $\exists M > 0$

$$|a_n| \leq M, \forall$$

Εστω $\varepsilon > 0$ επειδή $\lim a_n = a$,

$\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in N$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

Αντίστοιχα επειδή $\lim b_n = b$

$\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \; N$

$$|\beta_n - \beta| < \frac{2}{\varepsilon M}, \quad n \geq n_2$$

Επιλέγουμε $n_0 = max(n_1, n_2)$ τότε για $n \geq n_0$

$$|a_n\beta_n - a\beta| \leq |a_n||\beta_n - \beta| + |\beta||a_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

(οπότε η $a_n\beta_n$ είναι συγκλίνουσα

$\lim(a_n\beta_n)\ a\beta$).

$$1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ φορές}}$$

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n} \cdot n\right)$$

→ Δεν ισχύει ότι το όριο του αθροίσματος είναι το άθροισμα των ορίων.

<u>παράδειγμα</u>

Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$2 < \frac{9}{4} < \frac{64}{27}$$

Θα αποδείξουμε ότι

$\left(\frac{1}{} + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(B)

9/10/14.

Αναλυση 1

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{n}{n+1} \leq \left(n\frac{(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}$$

Μηπως Bernouli?

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad , x \geq -1 \quad n\in\mathbb{N}$$

- $$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1+x \Longleftrightarrow x = \frac{n+2}{(n+1)^2} - 1 = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

$$x = \frac{-1}{(n+1)^2} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq 1$$

Οποτε : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x = 1+(n+1)\left(\frac{-1}{(n+1)^2}\right) =$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Επομένως

$$a_n \geq a_1 = 2$$

Ιδιότητες συγκλινουσών :

α) Εαν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και $β_n$ φραγμένη. Τότε $a_nβ_n$ είναι συγκλινουσα ακολουθία

και μάλιστα

$$\lim(a_nβ_n) = 0$$

β) Έστω a_n, $β_n$ συγκλίνουσες ακολουθίες που επιπρόσθετα ικανοποιούν:

$$a_n \leq β_n \quad , n = 1, 2,$$

Τότε : $\lim a_n \leq \lim b_n$

γ) <u>κριτήριο Σάντουιτς (παρεμβολής)</u>

Έστω (a_n), (b_n), $(γ_n)$ τέτοιες ώστε :

$$a_n \leq β_n \leq γ_n \quad , n \in \mathbb{N}$$

όταν επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι

$$\lim a_n = a$$
$$\lim γ_n = a$$

Τότε η b_n είναι συγκλίνουσα και μάλιστα

$$\lim b_n = a$$

<u>Απόδειξη</u> :

Έστω $M > 0$ $\quad |b_n| \leq M \quad , n \in \mathbb{N}$

είναι $ε > 0$. Επειδή $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, θα $\exists n_1(ε)$

$$|a_n| < \frac{ε}{M}$$

Τότε για $n \geq n_1$ έχουμε

$$|a_n b_n| \leq |a_n| M < \frac{ε}{M} \cdot M = ε \quad n \geq n_1$$

Αναλυση 1 9/10/14

Ορισμός

Πότε λέμε $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$

$\lim a_n = \infty$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$

$|a_n - a| < \varepsilon \quad , n \geq n_0.$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad , n \geq n_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = -\infty$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad , \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$

$\beta_n < -\frac{1}{\varepsilon} \quad , n \geq n_0$

Κριτήριο

Αν $\beta_n \to -\infty$

$a_n \leq \beta_n$

$\Downarrow$

$\lim a_n = -\infty$

προταση:

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad , \beta_n \geq a_n \implies \lim \beta_n = +\infty$

Υπακολουθίες ακολουθίας:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

$a_2, a_4, a_5, a_6 \ldots$

$(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$

a_{k_n} υπακολουθία της a_n

$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$

Προταση :
καθε ακολουθια συγκλινει $\boxed{\text{αν ~~εικια~~ και μονο εαν}}$ καθε ακολουθια αυτης συγκλινει.

αποδειξη   αν και μονο εαν = $\boxed{\text{iff}}$

$\Longrightarrow$ Εστω $\lim a_n = a$, είναι a_{k_n} αυθαίρετα υπακολουθια θα αποδεικνυουμε οι a_{k_n} συγκλινει και μαλιστα

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$$

Επειδή $\lim a_n = a$, εχουμε :
$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ωστε

$$|a_n - a| < \varepsilon \ , \ \forall\ n \geq n_0$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\exists\ k_{n_1} \geq n_0$

οποτε :

$$k_n \geq n_0 \ , \ \forall\ n \geq n_1$$

και επομενως a_{k_n} ικανοποιει

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon \ , \ n \geq n_1$$

$\Longrightarrow$ Οι k_n συγκλινουσα με $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$

$\boxed{\text{Sos}}$

Για να μην συγκλινει η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αρκεί να υπαρχουν δυο υπακολουθιες που να συγκλινουν σε διαφορετικα ορια.

$a_n = (-1)^n$ ειναι μη συγκλινουσα ακολουθια, διοτι
$a_{2n} = 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

δ.

9/10/14

Αναλυση 1

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Εστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τετοια ωστε

a_{2n} συγκλίνει

a_{2n-1} συγκλίνει

και

a_{3n} συγκλινει

Τοτε η a_n ειναι συγκλινουσα ακολουθια

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αποδείξτε οτι η $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ ειναι συγκλινουσα ακολουθία

Αναλυση. 14/10/14.

<u>παραδειγμα</u>:

Η ακολουθια $\alpha_n = (-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$ ειναι μια συγκλινουσα ακολουθια

<u>Αποδειξη</u>:

Οι υπακολουθιες :

$$\alpha_{2n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = 1$$

$$\alpha_{2n-1} = -1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = -1$$

$\Rightarrow$ Η α_n δεν συγκλινει ΤΛΚ.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> :

Αποδειξτε οτι η ακολουθια $\boxed{x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}}$, $n \in \mathbb{N}$

ειναι συγκλινουσα ακολουθια

$$y_n \leq \alpha_n \leq z_n.$$

$$\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ φορες}} \leq x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ φορες}} = \frac{n}{n+1}$$

$\downarrow$ Ημ Σ

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > x_1$$

Αποδειξτε οτι $x_n \uparrow$.

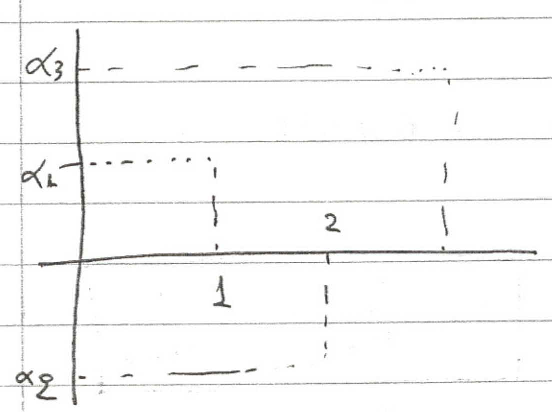
Η x_n ειναι ανω φραγμενη, $x_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα: (Bolzano - Weitrass)

Καθε φραγμένη ακολουθία, εχει συγκλίνουσα υπακολουθία
(Αν α_n φραγμένη, $\Rightarrow \exists$ α_{n_k} συγκλίνουσα)

Πρόταση:
Καθε φραγμένη ακολουθία εχει μονότονη υπακολουθία

Πρόχειρο



Απόδειξη: Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία
Ο όρος a_{n_0} είναι κορυφή όταν

$$a_n \leq a_{n_0} \quad , n \geq n_0.$$

Έστω $A = \{ n \mid a_n \text{ ειναι κορυφη} \} \subseteq \mathbb{N}$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
α) Α απειρο συνολο. $A = \{ n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \}$
Τοτε $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots \geq a_{n_k} \geq \dots$
β) Α εχει πεπερασμένο (πλήθος στοιχειων, δηλ.

$$A = \{ n_1, n_2, \dots, n_\ell \dots \ \ell \in \mathbb{N} \}$$

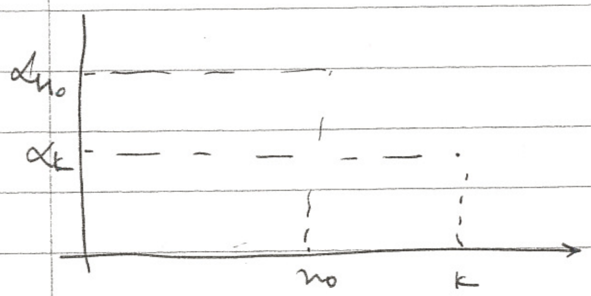
Θα φτιαξω τοτε υπακολουθία που ειναι αύξουσα.

Αφού το $n_{\varepsilon}+1$ δεν είναι κορυφή $\exists\, m_2 > m_1$ ώστε
$a_{m_2} > a_{m_1}$

Επίσης a_{m_2} δεν είναι κορυφή άρα $\exists\, m_3 > m_2$ ώστε
$a_{m_3} > a_{m_2}$

υπακολουθία a_{m_k} ώστε
$a_{m_k} \uparrow$

Σε κάθε περίπτωση (ανάλογα αν το A έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή όχι)
Βρήκαμε μονότονη ακολουθία.



$a_k \leq a_{n_0} \;\forall\, k \geq n_0$

Ακολουθίες Cauchy

__Ορισμός:__ Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy όταν
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε:
$|a_n - a_m| < \varepsilon,\; m, n \geq n_0$

$\boxed{\text{ΠΡΟΒΛΗΜΑ}}$ Πως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη σύγκλιση, <u>ΧΩΡΙΣ</u> να γνωρίζουμε το όριο της ακολουθίας

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$:
Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τότε είναι ακολουθία cauchy
αντίστροφα (αν είναι ακολουθία Cauchy τότε συγκλίνει)

Πρόβλημα:

Η ακολουθία $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$$

Έστω πως η x_n συγκλίνει. Επομένως είναι ακολουθία Cauchy. Οπότε για το τυχαίο ε θα υπάρχει κάποιο

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad , \; n, m \geq n_0$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα είχαμε $m \geq n \geq n_0$

$$\left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| -\left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right) \dots\dots \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} < \varepsilon \quad , \forall\, m > n \geq n_0$$

Επιλέγω $m = 2n$. Τότε θα έπρεπε

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

Άτοπο για $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

Β

16/10/14

Ανάλυση 1:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, φραγμένη

$\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$

$\{a_k \mid k\geq n\}$

$\{a_k \mid k\geq n+1\}$

$\{a_k \mid k\geq n\} \supseteq \{a_k \mid k\geq n+1\}$ ✱

$U_n = \sup\{a_k / k\geq n\}$

$L_n = \inf\{a_k / k\geq n\}$

$\Longrightarrow L_n \leq U_n$

$A\subseteq B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$

$\inf A \leq \inf B$

✱ $\sup\{a_k \mid k\geq n\} \geq \sup\{a_k \mid k\geq n+1\}$

$U_n \geq U_{n+1}$

$L_n \leq L_{n+1}$

$L_n \leq L_{n+1} \leq U_{n+1} \leq U_n$

$L_n\uparrow$, $U_n\downarrow$

$\Longrightarrow \lim U_n : \limsup a_k$ και $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k \leq \overline{\lim}\, a_k$

$\overline{\lim}_{k\to\infty} a_k$

$\lim_{n\to\infty} L_n := \liminf_{k\to\infty} a_k$ ή $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k$

<u>Πρόταση</u>: Αν a_{n_k} συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

<u>Απόδειξη</u>:

<u>ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>:

$$U_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$$

$\Longrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \geq n, \; a_n \le U_n$

$$U_n - \varepsilon < a_m \le U_n$$

$$L_n \le a_n \le U_n$$

<u>Επιλέγοντας</u>:

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \Longrightarrow \exists \; m_n \geq n \text{ ώστε}$$

$$U_n - \frac{1}{n} < a_{m_n} \le U_n$$

$$a_{m_k} \longrightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

<u>Απόδειξη λοιπόν</u>:

Έχουμε: $L_{n_k} \le a_{n_k} \le U_{n_k} \Longrightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} L_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} U_{n_k}$$

της Απόδειξης $\rightarrow$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le \lim_{k\to\infty} a_{m_k} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

<u>Πρόταση</u>. Έστω a_n φραγμένη υπάρχει υπακολουθία a_{n_k} ώστε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \quad , k \in \mathbb{N}$$

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή $\lim_{n\to\infty} u_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

u_n

$\lim a_n$

$$u_n - \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < \varepsilon \quad , n \geq n_0 \iff u_n < \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \varepsilon \quad n \geq n_0$$

Επιλ. $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow \exists n_k \quad u_{n_k} < \frac{1}{k} + \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

<u>Επίσης</u> επειδή έχουμε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$

$$u_n - \varepsilon < a_m \leq u_n$$

Επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists m_n$

$$u_n - \frac{1}{n} < a_m \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (2)$$

Επομένως $\overline{\lim_{m\to\infty}} a_m - \frac{1}{k} < a_{m_k} < \frac{1}{k} + \overline{\lim_{m\to\infty}} a_m \quad , \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \overline{\lim_{m\to\infty}} a_m$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω a_n φραγμένη. Η a_n συγκλίνει αν και μόνο εάν

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

Αναλυση 1 21/10/14

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

$$u_{n+1} \leq u_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Βασικός χαρακτηρισμός: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = x$

Βασική ιδιοτητα: $\inf : \{ = l_n \leq u_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\}$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_m \leftarrow l_n \leq v_n \rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Προτασυ:

Αν x_{n_k} ακολουθια τοτε:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Προτασυ:

Θετω ω φραγμενη $\#$ x_n συγκλινει αν και μονο εαν

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{n_k} \geq x+\varepsilon \\ k=1,2,\dots \\ x_{n_k} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\text{Λαθος}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y$$

1) $\forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$
$y-\varepsilon < x_n\ ,\ \forall\ n\geq n_0$

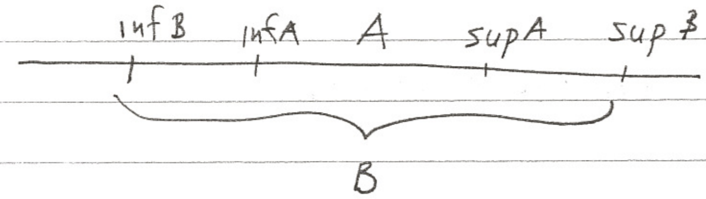
2) $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ υπακολουθία x_0 ώστε
$y-\varepsilon < x_{n_m} \leq y+\varepsilon\ ,\ m=1,2,\dots$

$y-\frac{1}{m} < x_{n_m} < y+\frac{1}{m}$
$m=1,2,$

ΑΣΚΗΣΗ:
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένες ακολουθίες για τις $x_n \leq y_n\quad \forall\ n\in\mathbb{N}$ $\quad(n\geq 2014)$

Τότε:
i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$

ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$

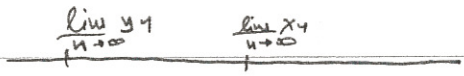


$A\subseteq B$
$\Downarrow$
$\sup A \leq \sup B$
$\inf A \geq \inf B$

$\boxed{\text{ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ}}$

Έστω ότι το $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n > \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$

ΣΚΕΨΕΙΣ



$x_n \geq \lim_{n\to\infty} - \varepsilon\ ,\ n\geq n_0$
$\forall,\ \varepsilon>0$
$y_n \geq a-\varepsilon\ ,\ n\geq n_0$
$\Downarrow$
$y\geq a-\varepsilon\ ,\ \forall\ \varepsilon>0$

Αναλυση 1

21/10/14

συνεχεια →

Εστω $\varepsilon > 0$ επειδη $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, εχουμε

$\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ ωστε $x_n \geq x - \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$

ομως $y_n \geq x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

οπoτε $y_n \geq x - \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$

Εστω y υπακολουθια των y_n ωστε

$$y_{n_k} \to \lim_{n\to\infty} y_n$$

$\Rightarrow y_{n_k} \geq -\varepsilon$, $\forall\, k \geq k_0$

Ιδιοτητες οριων:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \geq x - \varepsilon$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \quad \text{Ατοπο}$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Εστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμενη ακολουθια για την οποια ισχυει:

$$2x_n \leq x_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2$$

Αποδειξτε: $\exists \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1})$ και μαλιστα

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$$

Απόδειξη: Λύση 1

Έστω $y_n = x_n - x_{n-1}$, $n \geq 2$ $\xrightarrow{\quad}$ $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1} \iff$

$$\underbrace{x_n - x_{n-1}}_{y_n} \leq \underbrace{x_{n+1} - x_n}_{y_{n+1}}$$

$\Longrightarrow y_n \uparrow$

Η y_n είναι φραγμένη, διότι αν $|x_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε:

$$|y_n| = |x_n - x_{n-1}| \leq |x_n| + |x_{n-1}| < M + M = 2M.$$

οπότε η y_n συγκλίνει και επομένως υπάρχει το όριο.

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n - x_{n-1} = \ell$$

Απαγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι $\ell \neq 0$

i) Έστω ότι $\ell > 0$ $\left(\lim_{n\to+\infty} (x_n - x_{n-1}) = \ell\right)$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$$|x_n - x_{n-1} - \ell| < \varepsilon \quad , \forall\, n \geq n_0$$

$$-\varepsilon < x_n - x_{n-1} - \ell < \varepsilon \quad , n \geq n_0$$

$$\ell - \varepsilon < x_{n+1} - x_n < \ell + \varepsilon$$

$$\ell - \varepsilon < x_{n+2} - x_{n+1} < \ell + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$\ell - \varepsilon < x_{n+k} - x_{n+k-1} < \ell + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$k(\ell - \varepsilon) < (x_{n+1} - x_n) + \dots + (x_{n+k} - x_{n+k-1}) < k(\ell$$

$$k(\ell - \varepsilon) < x_{n+k} - x_{n-1} < k(\ell + \varepsilon)$$

(γ.)

Ανάλυση 21/10/14

i) $l > 0$. Επιλέγω $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ τότε $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$

$$k \cdot \frac{l}{2} < x_{n_0+k} - x_{n_0-1} \quad \forall\, n_0 = n_0(\varepsilon_0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ (φραγμένη)}$$

ii) $l < 0$, $\varepsilon = -\frac{l}{2} > 0$, $x_{n_0+k} - x_{n_0-1} < \frac{k \cdot l}{2} < 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

<u>2η περίπτωση</u>:

$$\exists \lim (x_n - x_{n-1}) = l$$

Η x_n φραγμένη

Από Bolzano $\Theta \to \exists\, x_{n_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

Τότε $2x_{n_k} \leq x_{n_k - 1} + x_{n_k + 1}$

Επειδή $x_{n_k - 1}$ είναι φραγμένη, $\exists$ υπακολουθία αυτής

$$x_{n_{k_l} - 1} \longrightarrow 6 \quad l \to \infty$$

$$2x_{n_{k_l}} \leq x_{n_{k_l}} - 1 + x_{n_{k_l}} + 1$$

Τελικά καταλήγουμε στην ύπαρξη ακολουθίας

$$2 x_{n_{k_{l_m}}} \leq x_{n_{k_{l_m}}} - 1 + x_{n_{k_{l_m}}} + 1$$

όπως και όρος συγκλίν

τ (σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας)

Παίρνουμε το όριο

$$2\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq 6 + \tau \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} x_n$$

Μπορεί $\sigma < \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$\Longrightarrow \sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$$\left.\begin{array}{l} x_{n_k} \to \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \\ x_{n_k - 1} \to \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \end{array}\right| \Rightarrow x_{n_k} - x_{n_k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Έστω $x_n \geq 0$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell < 1 \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ και μάλιστα $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

30/10/14

Ανάλυση

Φ5/4

$(\alpha_n)_{n\in N}$ φραγμένη

$3a_n \le 2\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}$, $n = 2, 3 \dots$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - \alpha_n) = 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $\exists\, n_0 \in N$ $\beta_{n_0} > 0$

ii) $\beta_n \le 0$, $\forall\, n \ge 2$

iii) $\beta_n \le 0$
$\alpha_n - \alpha_{n-1} \le 0$
$\alpha_n \le \alpha_{n-1}$

$\alpha_{n+1} - a_n \ge 2\underbrace{(a_n - \alpha_{n-1})}_{\beta_n}$

$\beta_{n+1} \ge 2\beta_n$, $n = 2, 3 \dots$

(1) $\Rightarrow \beta_{n_0+k} \ge 2^k \beta_{n_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$, Άτοπο.

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει

$\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n \Rightarrow$ Η ακολουθία S_1 συγκλίνει $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$

Τότε $\sum_{n=1}^{\alpha} a_n = \alpha$

Κριτήριο Cauchy (Για ακολουθίες)

Έστω $\{\beta_n\}_{n\in N}$. Η β_n συγκλίνει αν και μόνο εάν είναι ακολουθία Cauchy

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$|a_n - \alpha_m| < \varepsilon$, $n, m \ge n_0$

$\lim \beta_n = b$
$\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$:
$|\beta_n - b| < \varepsilon$, $n \ge n_0$

Κριτήριο Cauchy για σειρές:

Η σειρά $\sum_{n=1} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο εάν η $\boxed{S_n}$ είναι ακολουθία Cauchy

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$:

$|s_n - s_m| < \varepsilon$, $n, m \ge n_0$
$m > n \ge n_0$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| < \varepsilon , \quad m, n \ge n_0$$

$$\left| \cancel{\sum_{k=1}^{n}} a_k - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n}} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right) \right| < \varepsilon$$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon \qquad m \geq n > n_0.$$

Εφαρμογές:

Παράδειγμα 1:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει $(+\infty)$

Απόδειξη:

Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω πως συγκλίνει, από το κριτήριο Cauchy η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ είναι ακολουθία Cauchy, δηλαδή

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \right| < \varepsilon \quad , \quad m > n \geq n_0$$

Επιλέγουμε $m = 2(n+1)$

Τότε θα έπρεπε

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+2}{2(n+1)} \leq \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right| < \varepsilon \quad , \quad n \geq n_0$$

$$2(n+1) - n = n+2$$

Παράδειγμα 2:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα από το κριτήριο Cauchy. Θα πρέπει επομένως για $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \right| < \varepsilon \quad , \quad m > n \geq n_0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Αρκεί:

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \boxed{\frac{2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{2}{m(m+1)} < \varepsilon}$$

(B)

30/10/14

Ανάλυση.

$$0 < \omega < r$$

$$\frac{1}{n^2} < c\omega^n \qquad 0 < \omega < r$$

$$\ln\frac{1}{n^2} \le \ln(c\omega^2) \Leftrightarrow$$

$$-2\ln n \le \ln c + \ln\omega$$

$$n \le \frac{2\ln n + \ln c}{\ln\omega}$$

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

οπότε :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\frac{1}{n+3}}\right) \cancel{+ \dots +} \cancel{\frac{1}{m}} - \frac{1}{m+1} \qquad n \in \mathbb{N} \text{ ωα}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}.$$

Οπότε : $\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < 2\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{m(n+1)}\right] = 2\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right] < \frac{2}{n+1} < \varepsilon$

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \quad \text{οπότε} \quad n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$$

ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ:

$$a_n \geq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Πρόταση: Αν $a_n \geq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αν και μόνο εάν $\exists\, M > 0$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le M \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Κριτήριο (Σύγκρισης) :

Έστω $a_n, b_n \geq 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

i) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell < +\infty$

$) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Αναλυση . (δ) 30/10/1κ

Κριτηριο λογου.

i) Αν $a_n>0$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$

τοτε η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - συγκλινει

ii) Αν $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$

Τοτε η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλινει

Κριτηριο ριζας :

i) Αν $a_n \geq 0$ και

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell < 1$ τοτε η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλινει.

ii) Αν $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \ell > 1$ τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλινει.

Κριτηριο ολοκληρωσης :

Εστω $f\,[1,+\infty) \to [0,\infty)$ τετοια ωστε $f \downarrow$

Τοτε το να συγκλινει η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ειναι ισοδυναμο να υπαρχει το γενικευμενο ολοκληρωμα $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx$

Αποδειξη :

$$f(2)+f(3)+\ldots+f_n \leq \int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)dx \leq$$

$$\leq f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$$

Εστω $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, συγκλινει τοτε $\int_1^n f(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(n)$$

$\Leftarrow$ Αν $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπαρχει ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$ θα αποδειξουμε οτι $\sum^{\infty} f(x)$ συγκλινει

Ανάλυση 1 4/11/14 (α)

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \alpha_n \geq 0$

$S_n = \sum^{n} \alpha_n$

Η $\sum^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο εάν $\exists\, M>0 \quad S_n \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Κριτήριο Λόγου:

1) $\alpha_n > 0$ αν $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = l \leq 1 \Rightarrow \sum_{n1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει

2) επίσης αν $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = l > 1 \Rightarrow \sum \alpha_n$ αποκλίνει

Κριτήριο ρίζας:

$\overline{\lim}\, \alpha_n^{1/n} = l < 1 \Rightarrow \sum \alpha_n$ συγκλίνει

$\overline{\lim}_{n\to\infty}\, \alpha_n^{1/n} = l > 1 \Rightarrow \sum \alpha_n$ αποκλίνει

Κριτήριο Ολοκληρώματος:

Έστω $f : [1, \infty) \to [0, +\infty)$, $f \downarrow$

τότε $\sum_{n+1} f_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < +\infty$

$\Updownarrow$

$\exists \lim_{n\to\infty} \int^{A} f(x)dx = k < +\infty$

Κριτήριο Συμμόρφωσης:

Έστω $0 \leq a_n \downarrow$ Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει αν και μόνο εάν $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \alpha_n$ συγκλίνει

ΑΣΚΗΣΗ

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$ αποκλίνει

$x \geq 1$

Κριτήριο Ολοκλήρωσης

$$f(x) = \frac{1}{x\ln(x+1)}$$

$$f'(x) = -\frac{(x(\ln(x+1))}{x^2(\ln(x+1))^2} = -\frac{\ln(x+1) + x\frac{1}{x+1}}{x^2(\ln(x+1))^2} < 0$$

$$\nexists \lim_{n\to\infty}\int_1^A f(x)dx = \infty$$

$$\int_1^A f(x)dx = \int_1^A \frac{dx}{x\ln(x+1)} = \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{x+1}{xy}dy = \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{e^y dy}{(e^y-1)y} \geq$$

$$\geq \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{dy}{d} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \geq \ln(\ln(A+1) - \ln(\ln 2))$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty}\int_1^A f(x)dx \geq \lim_{A\to\infty}(\lim(\ln(A+1) - \ln(\ln 2)) = +\infty$$

2) Κριτήριο Συμπύκνωσης:

$$a_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_1$ συγκλίνει

$$2^n a_2 = 2^n \cdot \frac{1}{2^n\ln(2^n+1)} \geq \frac{1}{\ln(2^n)} \geq \frac{1}{n\ln 2}$$

$$\sum_{n=1} 2^n a_2 = \sum_{n=1} \frac{1}{\ln(2^n+1)} = \sum_{n=1} \frac{1}{n\ln 2}$$ (δα βοηθαεί)

4/11/14 (Β)

Ανάλυση.

$\ln(2^n+1) \leq \ln(2^n+2^n) = \ln(2^{n+1}) = (n+1)\ln 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2^n+1)} \geq \frac{1}{\ln 2(n+1)}$ όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$ | $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n+1)} = +\infty$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$ Αν $\sum \alpha_n$ (συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1} 2^n \alpha_{2^n}$ συγκλίνει επίσης

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k \alpha_{2^k}$

$\tilde{S}_n = 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n \alpha_{2^n}$

$S_{2^n} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + a_{2^n}$

$\alpha_1 \geq a_2$

$a_1 + a_2 \geq 2a_2$

$2(a_3 + a_4) \geq 4a_4$

$2(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \geq 8a_8$

$2 S_{2^n} \geq \tilde{S}_n$

Απόλυτη σύγκλιση σειρών:

Ερώτημα:

Πότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1} \alpha_k$ συγκλίνει απόλυτως?

Απάντηση:

Αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Πρόταση:

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει) τότε και η $\sum_{n=1} \alpha_n$ συγκλίνει αν

Επίσης:

(Μάλιστα $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$

παράδειγμα,

Αν $a>0$, $\beta \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{\beta})}{n^{1+\infty}}$ συγκλίνει

Απόδειξη:

Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{\beta}}{n^{1+\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ συγκλίνει

$\Longrightarrow$ κριτήριο σύγκλισης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^{\beta}|}{n^{1+\alpha}}$ συγκλίνει κ' από την πρόταση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n^{\beta})}{n^{1+\alpha}}$ συγκλίνει

1η λύση:

Κριτήριο ολοκληρώματος:

$$0 < F(x) = \frac{1}{x^{1+a}} \quad , x \geq 1$$

$$F'(x) = -\frac{n+(a)}{x^{2+a}} < 0$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ συγκλίνει αν και μόνο εάν

$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει

$$\int_{1}^{A} F(x)\,dx = \int_{1}^{A} \frac{dx}{x^{1+a}} = \int_{x}^{A} x^{-(1+a)}\,dx = \int_{x}^{A} \left(\frac{x^{-a}}{-a}\right)' dx = \left(-\frac{x^{-a}}{a}\right)\Big|_{1}^{A} = -\frac{A^{-\alpha}}{a} + \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{A\to\infty} \int_{1}^{A} f(x)\,dx = \frac{1}{a}$, πρέπει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ συγκλίνει

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Cauchy

Αρχικά για αι σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει $\left(\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k) \right)$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |\bar{S}_m - \bar{S}_n| < \varepsilon \quad m > n \geq n_0$

συνέχεια λύσης:

Οπότε: $\left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon \quad m > n \geq n_0$

$= \left| - \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$

$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad , \quad m > n \geq n_0$

Θα αποδείξουμε ότι η (n) ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ → είναι ακολουθία Cauchy

Για το $\varepsilon > 0$ χρησιμοποιούμε το n_0 που βρήκαμε:
Προηγουμένως τότε για $m > n \geq n_0$ έχουμε:

$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| - \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |-a_k| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$

Η S_n είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει

Κριτήριο Dirichlet

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τέτοιες ώστε:
$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, η S_n είναι απόλυτος φραγμένη κ $b_n \downarrow 0$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει

Παράδειγμα:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (απλά) αλλά δεν συγκλίνει απόλυτως

Απόδειξη:
Συγκλίνει απολύτως: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Συγκλίνει απλά διότι: Θέτουμε $b_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$
$a_k = (-1)^n$ τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$, τότε $|S_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$

(α)

No. Date 13/11/14

Ανάλυση

Φ7/3

$\alpha_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει

1] $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n^2}$ συγκλίνει

2] $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1+\sqrt{\alpha_n}}$ συγκλίνει

Σκέψεις:

$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$

$0 \leq \boxed{\beta_n \leq k \ \alpha_n}$

$0 \leq \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n^2} \leq k \ \alpha_n$

$\frac{1}{1+\alpha_n^2} \leq 1 \iff 1 \leq 1+\alpha_n^2$.

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσω κριτήριο σύγκρισης Δηλ.: αν $(\alpha_n)(\beta_n)$ $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n, \beta_n > 0$

$0 \leq \beta_n \leq k \ \alpha_n$

$\exists$ $k>0$: $n \in \mathbb{N}$ αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ θα συγκλίνει είναι μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq k \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

Λύση της 1:

$\beta_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n^2}$, οπότε $\frac{1}{1+\alpha_n^2} \leq 1 \iff 1 \leq 1+\alpha_n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Πολ/σμός με $\alpha_n > 0$

$\Downarrow$

$\beta_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n^2} \leq \alpha_n$. Οπότε από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

2 $\longrightarrow$ Σπίτι.

$\boxed{\text{Θ. Riemann}}$: Αν έχουμε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και συγκλίνει και ταυτοχρόνως δεν συγκλίνει απολύτως. Τότε η $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ υπάρχει αναδιάταξη της ακολουθίας a_{τ_n} τότε: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_n} = x$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_n} = x$$

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$

$\boxed{\text{Θ.}}$: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ $\quad \sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

"Γινόμενο ακολουθίας"

$(a_n), (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\sum |a_n \beta_n|$

$\boxed{\text{Cauchy - Schwarz}}$

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| |\cos\theta|$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n)^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

$$\left(\sum^{k} |a_n \beta_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} a_n^2\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{k} b_n^2\right)$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\right)$$

(B)

13/11/14

Ανάλυση

Συνέλιξη :

$(\alpha_\nu), (\beta_\nu) \Longrightarrow c_\nu$

$c_\nu = \alpha_\nu * \beta_\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots$

$$c_\nu = \alpha_0\beta_\nu + \alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-2} + \dots + \alpha_\nu\beta_0 = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \beta_{\nu-k}$$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu x^\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu.$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)\ (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x^2) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_0)x +$$

Ανάλυση

No. Date 18/11/14

$\delta(1+2|a|) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta(1+2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}$

Επιλέγουμε $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\right)$

Τότε για $0 < |x-a| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\right)$

Έχουμε: $|x^2-a^2| \leq |x-a|(|x-a|+2|a|)$
$\leq |x-a|(1+2|a|)$
$< \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}(1+2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Πρόταση:
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και a είναι σσ του A
Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$

ii) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A-\{a\}$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$

Απόδειξη $\Longrightarrow$ (υποθέτουμε το i, θα αποδείξουμε το ii)
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
$0 < |x-a| < \delta$
$x \in A \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

Έστω επίσης ότι $A-\{a\}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Για το $\delta > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta)$:
$0 < |x_n - a| < \delta$, $n \geq n_0$

τότε όμως για $n \geq n_0$

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$$

οπότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta(\varepsilon))$

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon \ , \ n \geq n_0$$

$\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

ii → i) Υποθέτουμε ότι $\forall (x_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n =$
έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

$\boxed{\text{ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ}}$

Έστω πως $\exists \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell\right)$

Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ $0 < |x - a| < \delta$ ώστε $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$.

Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in A$ $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$
ώστε $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ (*)

(Από το ii) $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to \ell$
Παίρνουμε όρια

$$0 = |\ell - \ell| \geq \varepsilon_0$$

$\boxed{\text{Ορισμός συνέχεια}}$

$f : A \to \mathbb{R}$
Η f είναι συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του A.
Στα σημεία a συσσώρευσης του A πρέπει $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\underset{x \in A}{|x - a| < \delta} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$: Αν $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) Η f είναι συνεχής στο a
ii) $\forall (x_n) \subseteq A$ τέτοιοι ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

13-11 Αναλυση?

(α)

Ανάλυση

18/11/14

$$\int_1^{2^n} f(x)\,dx = \int_0^n f(2^y)\ln 2\, 2^y\,dy =$$

$x = 2^y \iff \ln x = y\ln 2$, $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(2^y)\ln 2\,2^y\,dy$$

Στόχος: $\alpha_n \downarrow$

$$f(2^{k+1})\int_k^{k+1}\ln 2\,2^y\,dy \le \int_k^{k+1} f(2^y)\ln 2\,2^y\,dy \le f(2^k)\int_k^{k+1}\ln 2\,2^y\,dy$$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \boxed{\sum_{n=1}^\infty a_n} \text{ συγκλίνει} \iff \sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n} \text{ συγκλίνει}$$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$\boxed{\text{ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ}}$

X

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

$f: A \to \mathbb{R}$, a σημείο συσσώρευσης A $\left(\forall \varepsilon>0 \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap(A-\{a\}) \neq \emptyset\right)$

$\iff \left[\exists\ x_n \in A\setminus\{a\},\ x_n \to a\right]$

$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$

$$\begin{pmatrix} 0<|x-a|<\delta \\ x\in A\end{pmatrix} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Παράδειγμα:

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2$

$a_n = a - \frac{1}{n} \to a$

Δοθέντος του $\varepsilon>0$, $(\exists ?)\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |x^2-a^2|<\varepsilon$$

Επιλέγω $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)$, τότε για $0<|x-a|<\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)$

συνεχεια → (1)

Αναλυση πρόχειρο :

$|x^2-\alpha^2| = |(x-\alpha)(x+\alpha)| = |x-\alpha||x+\alpha| < \delta(\delta+2|\alpha| < \varepsilon$

$|x-\alpha| < \delta$

$|x+\alpha| = |x-\alpha+2\alpha|$

$\leq |x-\alpha| + |2\alpha|$

$< \delta + 2|\alpha|$

$\delta^2 + 2|\alpha|\delta < \varepsilon + |\alpha|^2$ $\quad |\alpha|^2$

$(\delta+|\alpha|^2) < \varepsilon + |\alpha|^2$

$\Leftrightarrow$

$|\delta+\alpha| < \sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}$

$\delta < \sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2} - |\alpha|$

Επιλεγουμε $\delta = \frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2} - |\alpha|$

Συνεχεια (1)
$\Longrightarrow$

$|x^2-\alpha^2| = |x-\alpha||x+\alpha|$

$\leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}-|\alpha|\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}-|\alpha|+2|\alpha|\right)$

$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{(\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2})^2-(|\alpha|)}{\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}+|\alpha|}\right)(\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}+3|\alpha|)$

$= \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}+|\alpha|}(\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}+3|\alpha|) < \varepsilon$

$\frac{\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}+3|\alpha|}{4\sqrt{\varepsilon+|\alpha|^2}+|\alpha|} \leq \frac{3(\sqrt{\cancel{\varepsilon+|\alpha|^2}}+|\alpha|}{4(\sqrt{\cancel{\varepsilon+\alpha^2}}+|\alpha|} = \frac{3}{4}$

ΠΙΟ ΒΟΛΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ Δ:
(κανουμε μια αρχική επιλογή για δ)

πρώτη :

$\delta = 1 \qquad |x-\alpha| \leq 1$

$|x^2-\alpha^2| = |x-\alpha||x+\alpha|$

$= |x-\alpha|(|x-\alpha+2\alpha|)$

$\leq |x-\alpha|(|x-\alpha|+2|\alpha|) \leq |x-\alpha|(1+2|\alpha|) < \varepsilon$

Ανάλυση: 25/11/14 (α)

Θ. Bolzano: Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχές και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε $\exists\ \xi\in(\alpha,\beta): f(\xi)=0$
(Αξίωμα πληρότητας)

I = interval $[\alpha,\beta)$, $[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta]$

Πρόταση: Έστω $f: I\to\mathbb{R}$, συνεχής και "1-1". Τότε η f είναι γνήσια μονότονη συνάρτηση

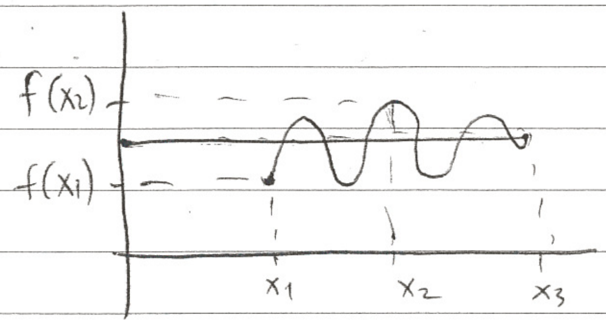
Απόδειξη:

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε θα έχουμε $x_1, x_2, x_3\in I$ τότε $f(x_1)<f(x_2)$ & $f(x_1)<f(x_2)$ $\boxed{\text{είτε}}$ $f(x_1)>f(x_2)$ & $f(x_3)>f(x_2)$

Αν f γνησια μονότονη: i) γνησια αύξουσα $f\uparrow$ $\forall\ x,y,\ x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

ii) γνησια φθίνουσα $f\downarrow$ $\forall\ x,y,\ x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

Άρνηση: Υπάρχουν $x_1, x_2\in I$ τέτοια ώστε $x_1<x_2<x_3$ τέτοια ώστε $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_3)>f(x_2)$ | $f(x_1)<f(x_2)$, $f(x_3)<f(x_2)$



Συνέχεια απόδειξης: $f(x_3)>f(x_1)$ $(f(x_1)>f(x_1)>f(x_1))$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=f(x_3)$

έχει λύση στο διάστημα (x_1,x_2), διότι $g(x)=f(x)-f(x_3)$

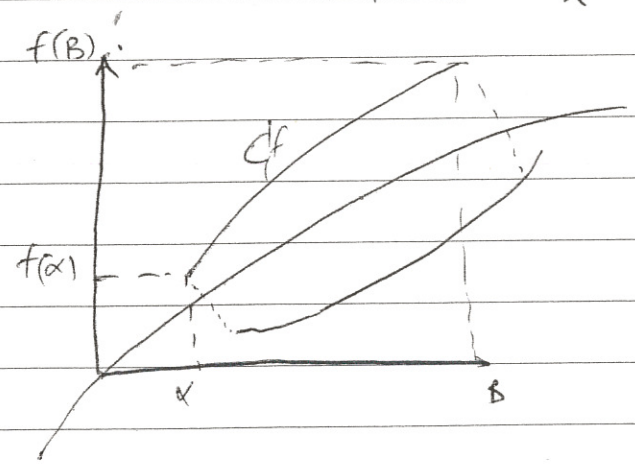
$g(x_1)\cdot g(x_2)=(f(x_1)-f(x_3))\cdot(f(x_2)-f(x_3))<0$

Από το θεώρημα Bolzano $\exists\ \xi\in(x_1,x_2): g(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\xi)=f(x_3)$ αντίφαση ~~[illegible]~~ κατά η f είναι "1-1".

Πρόταση: $f: I \to f(I)$, συνεχής και "1-1" τότε η $f^{-1} \to I$ είναι συνεχής συνάρτηση επίσης.

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω πως η f είναι ↑



$$f^{-1}: [f(\alpha), f(B)] \to [\alpha, \beta] \qquad f \circ f^{-1}(y) = y$$

Έστω: $y_0 \in f(I) \Rightarrow \exists\, x_0 \in I \,.\, f(x_0) = y_0$

Η f συνεχής στο x_0

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \qquad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$