Φυλλάδιο 1ο

19-02-2015

1) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f'(t) \leq 2015 f(t) \ , \ \ t > 0$$

$$f(0) = 0$$

Αποδείξτε ότι

$$f(t) \leq 0 \ , \ \ t \geq 0$$

Λύση :

$$f'(t) \leq 2015 f(t) \Rightarrow f'(t) - 2015 f(t) \leq 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με ολοκληρωτικό παράγωντα e^{-2015t} έτσι έχουμε

$$\Rightarrow \ e^{-2015t} f'(t) - e^{-2015t} f(t) \leq 0 \Rightarrow \left(e^{-2015t} f(t)\right)' \leq 0 \ \ , \ \ t > 0$$

δηλαδή φθίνουσα η συνάρτηση άρα για $t > 0$

$$e^{-2015t} f(t) - e^{0} f(0) \leq 0 \Rightarrow \ e^{-2015t} f(t) \leq 0 \Rightarrow f(t) \leq 0 \ , \ \ t \geq 0$$

2)Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$\phi(x, y) = \ e^{-x} f(y)$$

λύνει την διαφορική εξίσωση

$$\phi_{xx}(x, y) \ + \ \phi_{yy}(x, y) \ = \ \phi(x, y), \ \ x, y \in \mathbf{R}$$

Λύση :

$$\phi_x = \ -f(y) e^{-x} \ \ \& \ \ \phi_{xx}(x, y) = \ f(y) e^{-x}$$

$$\phi_y(x, y) = \ f'(y) e^{-x} \ \ \& \ \ \phi_{yy}(x, y) = \ f''(y) e^{-x}$$

άρα αντικαθιστώντας έχουμε

$$f(y) e^{-x} \ + \ f''(y) e^{-x} \ = \ e^{-x} f(y) \ , \ \ x, y \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow f''(y) = 0 \ , \ \ y \in \mathbf{R}$$

άρα $\exists \ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τ.ω. $\ \ f(y) \ = \ c_1 y + c_2$ άρα

$$\phi(x, y) = e^{-x} \left(c_1 y + c_2\right)$$

3) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t(x,t) \ + \ u_x(x,t) \ = \ 1 \ , \ \ x \in \mathbf{R}, \ t > 0$$

$$u(x,0) \ = \ x^2 \ , \ \ x \in \mathbf{R}$$

Λύση : (Το πρόβλημα θα λύθει με μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών)

Έστω $\sigma(s) = u(\ x(s), t(s)\ )\ ,\ \ s \in \mathbf{R}$ τότε απο κανόνα αλυσίδας

$$\sigma'(s) = \ u_x(x(s),t(s))\ x'(s) + \ u_t(x(s),t(s))\ t'(s)$$

Επιλέγουμε $x'(s) = 1$ και $t'(s) = 1\ ,\ \ s \in \mathbf{R}$ ώστε να είναι οι συντελεστές της εξίσωσης , με $x(0) = x_0$ και $t(0) = 0$ από την αρχική συνθήκη $u(x,0) = x^2$
τότε

$$\sigma'(s) = 1\ ,\ \ s \in \mathbf{R}$$

$$\sigma(0) = u(\ x(0), t(0)\ ) = u(x_0, 0) = \ x_0^2$$

δηλαδή έχουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που το λύνουμε με ξρηση Θ.Μ.Τ.

$$\begin{bmatrix} x'(s) = 1 \ \ , \ \ x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 \ \ , \ t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = 1 \ \ , \ \ \sigma(0) = x_0^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x(s) - s)' = 0 \ \ , \ \ x(0) = x_0 \\ (t(s) - s)' = 0 \ \ , \ \ t(0) = 0 \\ (\sigma(s) - s)' = 0 \ \ , \ \ \sigma(0) = x_0^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x(s) - s = x(0) - 0 \Rightarrow \ \ x(s) = x_0 + s \\ t(s) - s = t(0) - 0 \Rightarrow \ \ t(s) = s \\ \sigma(s) - s = \sigma(0) - 0 \Rightarrow \ \ \sigma(s) = x_0^2 + s \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$u(x_0 + s, s) = x_0^2 + s$$

Εστω $s = \overline{s}$ τ.ω. $(\ x(\overline{s}), t(\overline{s})\ ) = (x_1, t_1)$

οπότε

$$\begin{bmatrix} x_0 + \overline{s} = x_1 \\ \overline{s} = t_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 = x_1 - t_1 \\ \overline{s} = t_1 \end{bmatrix}$$

άρα

$$u(x_0 + \overline{s}, \overline{s}) = x_0^2 + \overline{s} \ \Leftrightarrow \ u(\ x_1, t_1\ ) = (x_1 - t_1)^2 + t_1$$

4) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t(x,t) \ + \ u_x(x,t) \ = \ u^2(x,t) \ , \ \ x \in \mathbf{R}, \ t > 0$$

$$u(x,0) = \ -1, \ \ x \in \mathbf{R}$$

Λύση : (Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών)

Έστω $\sigma(s) = u(\ x(s), t(s)\ )\ , \ \ s \in \mathbf{R}$ τότε

$$\sigma'(s) = \ u_x(x(s),t(s))\ x'(s) + \ u_t(x(s),t(s))\ t'(s)$$

Επιλέγουμε $x'(s) = 1$ και $t'(s) = 1$, $s \in \mathbf{R}$ ώστε να είναι οι συντελεστές της εξίσωσης , με $x(0) = x_0$ και $t(0) = 0$ από την αρχική συνθήκη $u(x,0) = -1$
τότε

$$\sigma'(s) = u_x(x(s),t(s)) + u_t(x(s),t(s)) = u^2(x(s),t(s))\ , \ \ s \in \mathbf{R}$$
$$\sigma(0) = u(\ x(0), t(0)\ ) = u(x_0, 0) = -1\ , \ \ x_0 \in \mathbf{R}$$

δηλαδή έχουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που το λύνουμε με χρηση Θ.Μ.Τ.

$$\begin{bmatrix} x'(s) = 1 \ , \ x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 \ , \ t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = \sigma^2(s) \ , \ \sigma(0) = -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x(s) - s)' = 0 \ , \ x(0) = x_0 \\ (t(s) - s)' = 0 \ , \ t(0) = 0 \\ \frac{\sigma(s)}{\sigma^2(s)} = 1 \ , \ \sigma(0) = -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

διαιρέσαμε με $\sigma^2(s)$ διότι σ συνεχής κοντα στο 0 άρα για μικρα s, $\sigma^2(s) \neq 0$

$$\begin{bmatrix} x(s) - s = x(0) - 0 \Rightarrow \ x(s) = x_0 + s \\ t(s) - s = t(0) - 0 \Rightarrow \ t(s) = s \end{bmatrix}$$

και

$$\frac{\sigma(s)}{\sigma^2(s)} = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sigma(s)}\right)' = 1\ , \ \ s > 0 \Rightarrow \ \left(-\frac{1}{\sigma(s)} - s\right)' = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{\sigma(s)} - s = -\frac{1}{\sigma(0)} - 0 = 1 \Rightarrow \sigma(s) = -\frac{1}{1+s}\ , \ \ s > -1$$

δηλαδή

$$u(x_0 + s, s) = -\frac{1}{1+s}$$

Εστω $s = \overline{s}$ τ.ω. $(\ x(\overline{s}), t(\overline{s})\ ) = (\ x_1, t_1\ )$

οπότε

$$\begin{bmatrix} x_0 + \overline{s} = x_1 \\ \overline{s} = t_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 = x_1 - t_1 \\ \overline{s} = t_1 \end{bmatrix}$$

άρα

$$u(x_0 + \overline{s}, \overline{s}) = -\frac{1}{1+\overline{s}} \ \Leftrightarrow \ u(\ x_1, t_1\ ) = -\frac{1}{1+t_1}\ , \ \ t_1 \geq 0$$

<u>Φυλλάδιο 2ο</u>

12-03-2015

1) Να λυθεί το πρόβλημα

$$u_x(x,y) + (x+y)\, u_y(x,y) \;=\; 0, \;\; x+y>1$$

$$u(x, 1-x) = \; f(x), \;\; x \in \mathbf{R}$$

όπου $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση

Λύση : (Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών)

Έστω $\sigma(s) = u(\, x(s), y(s)\,)$, $s \in \mathbf{R}$ τότε

$$\sigma'(s) = \; u_x(x(s), y(s))\, x'(s) + \; u_y\,(x(s), y(s))\; y'(s)$$

Επιλέγουμε $x'(s) = 1$ και $y'(s) = x(s) + y(s)$, $s \in \mathbf{R}$ ώστε να είναι οι συντελεστές της εξίσωσης, με $x(0) = x_0$ και $y(0) = 1 - x_0$ τότε

$$\sigma'(s) = u_x(x(s), y(s)) + u_y(x(s), y(s)) \;,\;\; s \in \mathbf{R}$$

$$\sigma(0) = u(\, x(0), y(0)\,) = u(x_0, 1-x_0) = f(x_0) \;,\;\; x_0 \in \mathbf{R}$$

δηλαδή έχουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left[\begin{array}{c} x'(s) = 1 \;\;,\;\; x(0) = x_0 \\ y'(s) = x(s) + y(s) \;\;,\;\; y(0) = 1 - x_0 \\ \sigma'(s) = 0 \;\;,\;\; \sigma(0) = u(x(0), y(0)) \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} (x(s) - s)' = 0 \;\;,\;\; x(0) = x_0 \\ (y(s) - s)' = 0 \;\;,\;\; y(0) = 1 - x_0 \\ \sigma'(s) = 0 \;\;,\;\; \sigma(0) = f(x_0) \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} x(s) - s = x(0) - 0 \;\Rightarrow\; x(s) = x_0 + s \\ y'(s) - y(s) = x(s) \;\Rightarrow\; e^{-s}(\, y'(s) - y(s)\,) = e^{-s} x(s) \\ \sigma(s) = \sigma(0) = f(x_0) \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} x(s) = x_0 + s \\ (\, e^{-s} y(s)\,)' = e^{-s}(x_0 + s) \\ \sigma(s) = f(x_0) \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x(s) = x_0 + s \\ (\, -e^{-s} y(s) - e^{-s} - s e^{-s} - x_0 e^{-s}\,)' = 0 \\ \sigma(s) = f(x_0) \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} x(s) = x_0 + s \\ -e^{-s} y(s) - e^{-s} - s e^{-s} - x_0 e^{-s} + 1 + y(0) + x_0 = 0 \\ \sigma(s) = f(x_0) \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x(s) = x_0 + s \\ y(s) = 2e^{s} - s - x_0 - 1 \\ \sigma(s) = f(x_0) \end{array}\right]$$

δηλαδή

$$u(x_0+s, 2e^s - s - x_0 - 1) = f(x_0)$$

Εστω $s=\overline{s}$ τ.ω. $(\ x(\overline{s}), y(\overline{s})\ ) = (\ x_1, t_1\ )$ οπότε

$$\begin{bmatrix} x_0+\overline{s}=x_1 \\ 2e^{\overline{s}}-\overline{s}-x_0-1=y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 = x_1-\overline{s} \\ 2e^s - s - x_1 + s - 1 = y_1 \Rightarrow s = ln\left(\frac{1}{2}(y_1+x_1+1)\right) \end{bmatrix}$$

άρα

$$u(x_0+\overline{s}, 2e^{\overline{s}}-\overline{s}-x_0-1) = f(x_0) \ \Leftrightarrow\ u(\ x_1, y_1\ ) = f(x_1 - ln\left(\frac{1}{2}(y_1+x_1+1)\right)$$

2) α)Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt}(x,t)+u_{xt}(x,t)=0,\ \ x\in \mathbf{R},\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\ x\in\mathbf{R}$$

$$u_t(x,0)=g(x),\ x\in\mathbf{R}$$

όπου $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ δοθείσες ομαλές συναρτήσεις

β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$u_{tt}(x,t)-u_{xt}(x,t)=0,\ x\in\mathbf{R},\ t\in\mathbf{R}$$

$$u(x,-x)=\ 0,\ x\in\mathbf{R}$$

$$u_t(x,-x)=\ x,\ x\in\mathbf{R}$$

δεν έχει ομαλή λύση

Λύση α)

$$u_{tt}(x,t)+u_{xt}(x,t)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(u_t(x,t)-u_x(x,t)\right)=0$$

απο Θ.Μ.Τ $\exists\xi\in[0,t]$ για κάποιο $t>0$

$$u_t(x,t)-u_x(x,t)-u_t(x,0)-u_x(x,0)=0 \Rightarrow u_t(x,t)-u_x(x,t)=g(x)+f'(x)$$

άρα έχουμε ένα νέο πρόλημα που λύνεται με μεθ. χαρακτηριστικών καμπυλών

$$u_t(x,t)-u_x(x,t)=g(x)+f'(x)$$

$$u(x,0)=f(x)$$

Θέτουμε

$$u(x,0)=f(x)$$

Έστω $\sigma(s)=u(\ x(s),t(s)\ )\ ,\ \ s\in\mathbf{R}$ τότε

$$\sigma'(s)=\ u_x(x(s),t(s))\ x'(s)+\ u_t(x(s),t(s))\ t'(s)$$

Επιλέγουμε $x'(s)=-1$ και $t'(s)=1\ ,\ \ s\in\mathbf{R}$ ώστε να είναι οι συντελεστές της εξίσωσης , με $x(0)=x_0$ και $t(0)=0$ από την αρχική συνθήκη $u(x,0)=f(x)$ τότε

$$\sigma'(s)=u_x(x(s),t(s))+u_t(x(s),t(s))=g(x(s))-f'(x(s))\ ,\ \ s\in\mathbf{R}$$

$$\sigma(0)=u(\ x(0),t(0)\ )=u(x_0,0)=f(x_0)\ ,\ \ x_0\in\mathbf{R}$$

άρα

$$x'(s)=-1\Rightarrow(x(s)+s)'=0\Rightarrow x(s)+s=x_0+0\Rightarrow x(s)=x_0-s$$

$$t'(s)=1\Rightarrow(t(s)-s)'=0\Rightarrow t(s)-s=t(0)-0\Rightarrow t(s)=s$$

τότε

$$\sigma'(s)=g(x_0-s)-f'(x_0-s)\ ,\ \ s\geq 0\ \ \Rightarrow\int_0^s\sigma'(\xi)\ d\xi=\int_0^s g(x_0-\xi)-f'(x_0-\xi)\ d\xi$$

$$\Rightarrow\sigma(s)-\sigma(0)=\int_0^s g(x_0-\xi)-f'(x_0-\xi)\ d\xi$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x_0-\xi=k\Rightarrow -d\xi=dk$ άρα

$$u(x_0-s,s)-f(x_0)=f(k)|_{x_0}^{x_0-s}+\int_{x_0}^{x_0-s}-g(k)dk\Rightarrow u(x_0-s,s)=f(x_0-s)-\int_{x_0}^{x_0-s}g(k)dk$$

Εστω $s=\overline{s}$ τ.ω. $(\ x(\overline{s}),t(\overline{s})\ )=(\ x_1,t_1\ )$ οπότε

$$\left[\begin{array}{c}x_0+\overline{s}=x_1\\ \overline{s}=t_1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{c}x_0=x_1+t_1\\ t_1=\overline{s}\end{array}\right]$$

άρα

$$u(x_1,t_1)=\ f(x_1+t_1)-\int_{x_1+t_1}^{x_1}\ g(k)\ dk$$

β)

Έστω ότι το πρόβλημα έχει ομαλή λύση τότε

$$u_t(x,-x)=\ x\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(u_t(x,-x)\right)=1\Rightarrow u_{tx}(x,-x)\frac{d}{dx}+u_{tt}(x,-x)\frac{d}{dx}=-1\ \ ,\ x\in\mathbf{R}$$

Όμως για $t=-x$ απο την εξίσωση έχουμε

$$u_{tt}(x,-x)-u_{xt}(x,-x)=0 \Rightarrow -1=0$$

Άτοπο

3)Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t(x,t)+u_x(x,t) \;=\; u^2(x,t),\quad x\in \mathbf{R},\ t>0$$

$$u(x,0)=\; -1,\quad x\in \mathbf{R}$$

Το πρόβλημα έχει λυθεί στο 1ο φυλλάδιο

4) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$2u_{xx}(x,t)-u_{tt}(x,t)+u_{xt}(x,t)=\; 0\;\;,\quad x\in \mathbf{R},\ t>0$$

$$u(x,0)=\; f(x),\quad x\in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,t)=\; 0,\quad x\in \mathbf{R}$$

όπου $f\;:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Λύση :

Απο την χαρακτηριστική εξίσωση $2r^2+r-1=0$ έχουμε
$\Delta=1^2-4\cdot 2\cdot -1=9>0$ άρα η διαφορική εξ. είναι υπερβολικού τύπου
Θέτουμε

$$u(x,t)=U(\xi,\eta)$$

Η εξίσωση έχει σταθερούς συντελεστές,δηλαδή οι ρίζες είναι ανεξάρτητες των x,y άρα θέτουμε

$$\xi=ax+bt$$

$$\eta=cx+dt$$

τότε απο κανόνα αλυσίδας

$$u_x=U_\xi(\xi,\eta)\cdot a+U_\eta(\xi,\eta)\cdot c$$

$$u_t=U_\xi(\xi,\eta)\cdot b+U_\eta(\xi,\eta)\cdot d$$

$$u_{xx} = \frac{d}{dx}\left(U_\xi(\xi,\eta)\cdot a + U_\eta(\xi,\eta)\cdot c\right) = U_{\xi\xi}(\xi,\eta)\cdot a^2 + 2acU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)c^2$$

$$u_{tt} = \frac{d}{dt}\left(U_\xi(\xi,\eta)\cdot b + U_\eta(\xi,\eta)\cdot d\right) = U_\xi(\xi,\eta)\cdot b^2 + 2bdU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)\cdot d^2$$

$$u_{xt} = \frac{d}{dx}\left(U_\xi(\xi,\eta)\cdot a + U_\eta(\xi,\eta)\cdot c\right) = abU_{\xi\xi}(\xi,\eta)+adU_{\xi\eta}(\xi,\eta)+cdU_{\xi\eta}(\xi,\eta)+cdU_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

Αντικαθιστούμε στη διαφορική και έχουμε

$$2a^2U_{\xi\xi}+4acU_{\xi\eta}+2c^2U_{\eta\eta}-b^2U_{\xi\xi}-2bdU_{\xi\eta}-d^2U_{\eta\eta}+abU_{\xi\xi}+adU_{\xi\eta}+cbU_{\xi\eta}+cdU_{\eta\eta}=$$

$$(2a^2-b^2+ab)U_{\xi\xi}+(2c^2-d^2+cd)U_{\eta\eta}+(4ac-2bd+ad)U_{\xi\eta}=0$$

Τώρα αφού είναι υπερ. τύπου προσπαθούμε να μηδενίσουμε τους συντελεστές των $U_{\xi\xi}$, $U_{\eta\eta}$ αλλά όχι του $U_{\xi\eta}$ άρα

$$\begin{bmatrix} 2\,\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}-1=0 \\ 2\,\frac{c^2}{d^2}+\frac{c}{d}-1=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{a}{b}=-1 \Rightarrow a=-b \\ \frac{c}{d}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2c=d \end{array}$$

άρα οι χαρ. καμπύλες είναι $\xi = a(x-t)$ και $\eta = c(x+2t)$
και επιλέγοντας $a=c=1$, $\xi = x-t$ και $\eta = x+2t$ τότε

$$10U_{\xi\eta}=0 \Rightarrow U_{\xi\eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left(U_\xi(\xi,\eta)\right)=0 \Rightarrow U_\xi(\xi,\eta)=h(\xi)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U(\xi,\eta)\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\xi h(s)\,ds\right)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U(\xi,\eta)-\int_0^\xi h(s)\,ds\right)=0\Rightarrow$$

$$U(\xi,\eta)-\int_0^\xi h(s)\,ds=h_1(\eta)\Rightarrow U(\xi,\eta)=A(\xi)+B(\eta)$$

άρα

$$u(x,t)=U(\xi,\eta)=A(\xi)+B(\eta)=A(x-t)+B(x+2t)\ ,\ \ x\in\mathbf{R}\ ,\ t>0$$

Όμως

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow A(x)+B(x)=f(x)\ \ *$$

$$u_t(x,t)=0\Rightarrow 2B'(x+2t)-A'(x-t)=0\Rightarrow u_t(x,0)=2B'(x)-A'(x)=0\Rightarrow$$

$$(2B(x)-A(x))'=0\Rightarrow$$

αφου σταθερή συνάρτηση $\exists c_1\in\mathbf{R}$ τ.ω.

$$2B(x)-A(x)=c_1\Rightarrow^* B(x)=\frac{1}{3}(\ c_1+f(x))$$

άρα

$$A(x) = f(x) - \frac{1}{3}(\ c_1 + f(x))$$

τελικά

$$u(x,t) = f(x-t) - \frac{1}{3}(\ c_1 + f(x-t)) + \frac{1}{3}(\ c_1 + f(x+2t))$$

<u>**Φυλλάδιο 3ο**</u>

12-03-2015

1) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) = f(x,t)\ ,\ \ x \in \mathbf{R},\ t > 0$$

$$u(x,0) = 0,\ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbf{R}$$

Λύση :

Ψάχνουμε τη λύση του μη ομογενούς προβλήματος: $u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) = f(x,t)$
$\Delta > 0$ άρα η διαφορική εξ. είναι υπερβολικού τύπου
Θέτουμε

$$u(x,t) = U(\xi,\eta)$$

Έχουμε δύο χαρ. καμπύλες και η εξίσωση έχει σταθερούς συντελεστές,δηλαδή οι ρίζες είναι ανεξάρτητες των x, y άρα θέτουμε

$$\xi = ax + bt$$

$$\eta = cx + dt$$

τότε απο κανόνα αλυσίδας

$$u_x = U_\xi(\xi,\eta)\cdot a + U_\eta(\xi,\eta)\cdot c$$

$$u_t = U_\xi(\xi,\eta)\cdot b + U_\eta(\xi,\eta)\cdot d$$

$$u_{tt} = \frac{d}{dt}\left(U_\xi(\xi,\eta)\cdot b + U_\eta(\xi,\eta)\cdot d\right) = U_\xi(\xi,\eta)\cdot b^2 + 2bdU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)\cdot d^2$$

$$u_{xt} = \frac{d}{dx}\left(U_\xi(\xi,\eta)\cdot a + U_\eta(\xi,\eta)\cdot c\right) = abU_{\xi\xi}(\xi,\eta) + adU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + cdU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + cdU_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

Αντικαθιστούμε στη διαφορική και έχουμε

$$U_{\xi\xi}(\xi,\eta)\cdot b^2 + 2bdU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)\cdot d^2 - abU_{\xi\xi}(\xi,\eta) + adU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + cbU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + cdU_{\eta\eta}(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(b^2 + ab\right)U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + \left(d^2 + cd\right)U_{\eta\eta}(\xi,\eta) + (2bd + ad + cb)\,U_{\xi\eta} = 0$$

Τώρα αφού είναι υπερ. τύπου προσπαθούμε να μηδενίσουμε τους συντελεστές των $U_{\xi\xi}$, $U_{\eta\eta}$ αλλά όχι του $U_{\xi\eta}$ άρα

$$\begin{bmatrix} \frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a} = 0 \\ \frac{d^2}{c^2} + \frac{d}{c} = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{b}{a} = -1 \Rightarrow -a = b \\ \frac{d}{c} = 0 \Rightarrow 0 = d \end{array}$$

άρα οι χαρ. καμπύλες είναι $\xi = a(x-t)$ και $\eta = cx$
και επιλέγοντας $a = c = 1$, $\xi = x - t$ και $\eta = x$
Για τη λύση του μη ομογενούς θα χρησιμοποιήσουμε ταυτότητα $Green$:

$$\int\int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right)dxdt = \int_{\partial\Omega} Qdt + Pdx$$

Επιλέγουμε $Q(x,t) = -u_t(x,t)$ και $P(x,t) = -u_t(x,t)$ άρα

$$\int\int_{\Omega}\left(-u_{xt}(x,t) + u_{tt}(x,t)\right)dxdt = \int_{\partial\Omega}\left(-u_t(x,t)dt - u_t(x,t)dx\right) \Rightarrow$$

$$\int_{\partial\Omega}\left(-u_t(x,t)dt - u_t(x,t)dx\right) = \int\int_{\Omega} f(x,t)dxdt$$

Για το σύνορο $\partial\Omega_1$: $x + t = x_0 + t_0 \Rightarrow dx + dt = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_1} -u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dt = 0$$

Για το $\partial\Omega_2$: $x = x_0 \Rightarrow dx = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_2} -u_t(x,t)dt + 0 \Rightarrow -\int_{\partial\Omega_2} u_t(x,t)dt = -\int_{\partial\Omega_2} du = -u(x_0,0) + u(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$$

Για το $\partial\Omega_3$: $t = 0$ & $u = 0 \Rightarrow u_t = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_3} -u_t(x,t)dt - u_t(x,t)dx = 0$$

άρα τελικά έχουμε

$$\int\int_{\Omega} f(x,t)dxdt = u(x_0,t_0) \Rightarrow \int_0^{t_0}\int_{x_0}^{x_0+t_0-t} f(x,t)dxdt = u(x_0,t_0)$$

2) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$2u_{xx}(x,t) \ - \ u_{tt}(x,t) \ + \ u_{xt}(x,t) = f(x,t), \ \ x \in \mathbf{R}, \ t > 0$$

$$u(x,0) \ = \ 0, \ \ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,t) \ = \ 0, \ \ x \in \mathbf{R}$$

όπου $f : \mathbf{R} \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Λύση :

Θέλουμε τη λύση στο μη ομογενές πρόβλημα.Ψάχνουμε τις χαρακτηριστκές καμπύλες,οι οποίες βρέθηκαν στο πρόβλημα 4) του 2ου φυλλαδίου.

$$\xi = x - t \ \ \& \ \ \eta = x + 2t$$

Για τη λύση του μη ομογενούς θα χρησιμοποιήσουμε ταυτότητα $Green$:

$$\int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dxdt = \int_{\partial\Omega} Qdt + Pdx$$

Επιλέγουμε $Q(x,t) = 2u_x(x,t) + u_t(x,t)$ και $P(x,t) = u_t(x,t)$ άρα

$$\int\int_{\Omega} \left(2u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t)\right) dxdt = \int_{\partial\Omega} 2u_x(x,t)dt + u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dx \Rightarrow$$

$$\int_{\partial\Omega} 2u_x(x,t)dt + u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dx = \int\int_{\Omega} f(x,t)dxdt$$

Για το σύνορο $\partial\Omega_1$: $x + 2t = x_0 + 2t_0 \Rightarrow dx + 2dt = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_1} 2u_x(x,t)\frac{-dx}{2} + u_t(x,t)dt + u_t(x,t)(-2dt) = \int_{\partial\Omega_1} -u_x(x,t)dx + u_t(x,t)dt - 2u_t(x,t)dt \Rightarrow$$

$$\int_{\partial\Omega_1} -(u_x(x,t)dx + u_t(x,t)dt) \Rightarrow \int_{\partial\Omega_1} -du = -u(x_0,t_0) + u(x_0 + t_0, 0) = -u(x_0,t_0)$$

Για το $\partial\Omega_2$: $x - t = x_0 - t_0 \Rightarrow dx - dt = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_2} 2u_x(x,t)dx + u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dt \Rightarrow \int_{\partial\Omega_2} 2(u_x(x,t)dx + u_t(x,t)dt) = \int_{\partial\Omega_2} 2du =$$

$$2u(x_0 - t_0, 0) - 2u(x_0,t_0) = -2u(x_0,t_0)$$

Για το $\partial\Omega_3$: $t = 0 \,\&\, u = 0 \Rightarrow u_t = 0$ & $u_x = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_3} 2u_x(x,t)dt + u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dx = 0$$

άρα τελικά έχουμε

$$\int\int_{\Omega} f(x,t)dxdt = -2u(x_0,t_0) - u(x_0,t_0) \Rightarrow \int_0^{t_0} \int_{x_0 - t_0 - t}^{x_0 + 2t_0 - 2t} f(x,t)dxdt = -3u(x_0,t_0)$$

3)Αποδείξτε με τη μέθοδο της ενέργειας ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x,t) \ - \ u_{xxt}(x,t) \ - \ u_{xx}(x,t) = \ f(x,t), \ 0 < x < 1, \ t > 0$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ 0 < x < 1$$
$$u_t(x,t) = \psi(x),\ 0 < x < 1$$
$$u(0,t) \ = \ h(t),\ t > 0$$
$$u(1,t) \ = \ g(t),\ t > 0$$

έχει το πολύ μία λύση.Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

Λύση :

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις δηλαδή

$$w(x,t) = (\ u_1(x,t) - u_2(x,t)\ )$$

τότε η w θα λύνει το ομογενές πρόβλημα

$$w_{tt} - w_{xxt} - w_{xx} = (u_1 - u_2)_{tt} - (u_1 - u_2)_{xtt} - (u_1 - u_2)_{xx} \Rightarrow$$

$$u_{1,tt} - u_{2,tt} - u_{1,xxt} + u_{2,xxt} - u_{1,xx} + u_{2,xx} = (\ u_{1,tt} - u_{1,xxt} - u_{1,xx}\ ) - (\ u_{2,tt} - u_{2,xxt} - u_{2,xx}\ ) =$$
$$= f(x,t) - f(x,t) = 0$$

άρα

$$w_{tt} - w_{xxt} - w_{xx} = 0\ \ ,\ \ 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$w(x,0) = 0\ \ ,\ x \in (0,1)$$
$$w_t(x,0) = 0$$
$$w(0,t) = 0\ \ ,\ t > 0$$
$$w(1,t) = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με τη χρονικη μεταβλητή

$$w_t w_{tt} - w_t w_{xxt} - w_t w_{xx} = 0$$

άρα ολοκληρώνουμε ως προς τη χωρική μεταβλητή για την ενέργεια

$$\int_0^1 (\ w_t w_{tt} - w_t w_{xxt} - w_t w_{xx}\ ) dx = 0$$

και υπολογίζουμε ένα-ένα

$$\int_0^1 (w_t w_{tt}) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} w_t^2\right)_t\ dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2} w_t^2(x,t) dx$$

$$\int_0^1 (w_t w_{xtt})dx = w_t w_{xt}|_0^1 - \int_0^1 w_{xt} w_{xt} dx =$$

$$= w_t(1,t)w_{xt}(1,t) - w_t(0,t)w_{xt}(0,t) - \int_0^1 w_{xt}\ dx = -\int_0^1 w_{xt}$$

$$\int_0^1 w_t w_{xx} = w_t w_x\ |_0^1 - \int_0^1 w_{xt} w_x =$$

$$= w_x(1,t)w_t(1,t) - w_x(0,t)w_t(0,t) - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}w_x^2\right)_t\ dx =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^1 -\frac{1}{2}w_x^2\ dx$$

άρα

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}w_t^2 dx + \int_0^1 w_{xt}^2\ dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}w_x^2\ dx\ = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}w_x^2\right) dx\right) = -\int_0^1 w_{xt}^2\ dx$$

άρα

$$E(t) = \int_0^1 \frac{1}{2}(w_t^2 + w_x^2)dx \Rightarrow E'(t) = -\int_0^1 w_{xt}^2\ dx \Rightarrow E'(t) \le 0 \Rightarrow$$

$$E(t) \searrow\ \Rightarrow E(t) \le E(0)\ ,\ t > 0 \Rightarrow E(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\left(w_t^2 + w_x^2\right) dx \le 0 \Rightarrow\quad w_t(x,t) = 0\ \ \&\ \ w_x(x,t) = 0$$

άρα $w_t(x,t) = 0 \Rightarrow w(x,t) - w(x,0) = 0 \Rightarrow w(x,t) \equiv 0$ Άτοπο

4) Αποδείξτε με τη μέθοδο της ενέργειας ότι το πρόβλημα $Cauchy$

$$u_{tt}(x,t)\ -\ u_{xt}(x,t)\ =\ f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0$$

$$u(x,0)\ =\ g(x),\ x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0)\ =\ h(x),\ x \in \mathbf{R}$$

όπου $f : \mathbf{R} \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ έχει το πολύ μία λύση.Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

Λύση :

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις δηλαδή

$$w(x,t) = (\ u_1(x,t) - u_2(x,t)\ )$$

τότε η w θα λύνει το ομογενές πρόβλημα

$$w_{tt} - w_{xt} = (u_1 - u_2)_{tt} - (u_1 - u_2)_{xt} \Rightarrow$$

$$u_{1,tt} - u_{2,tt} - u_{1,xt} + u_{2,xt} = (\ u_{1,tt} - u_{1,xt}\ ) - (\ u_{2,tt} - u_{2,xt}\ ) =$$
$$= f(x,t) - f(x,t) = 0$$

άρα

$$w_{tt} - w_{xt} = 0\ \ ,\ \ x \in \mathbf{R},\ t > 0$$
$$w(x,0) = 0\ \ ,\ x \in \mathbf{R}$$
$$w_t(x,0) = 0,\ \ x \in \mathbf{R}$$

Θέλουμε να βρουμε συνάρτηση $E : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ η οποία θα υπολογίζει την ενέργεια του προβλήματος. Αρχικά ψάχνουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της δ.ε..Η δια κρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$\Delta(x,t) = B^2(x,t) - 4A(x,t)\Gamma(x,t) \Rightarrow \Delta(x,t) = 4\frac{1}{4} - 0 = 1 > 0$$

άρα η δ.ε. είναι υπερβολικού τύπου και αφού οι συντελεστές δεν εξαρτώνται των x, t έχουμε

$$u(x,t) = U(\xi, \eta)$$
$$\xi = ax + bt$$
$$\eta = cx + dt$$

άρα

$$u_t = U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = bU_\xi + dU_\eta$$
$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(bU_\xi + dU_\eta) = b^2 U_{\xi\xi} + bdU_{\xi\eta} + bdU_{\eta\xi} + d^2 U_{\eta\eta}$$
$$u_{xt} = \frac{\partial}{\partial x}(bU_\xi + dU_\eta) = abU_{\xi\xi} + (bc + ad)U_{\xi\eta} + cdU_{\eta\eta}$$

αντικαθιστούμε στην δ.ε. και έχουμε

$$(b^2 - ab)U_{\xi\xi} + (2bd - bc - ad)U_{\xi\eta} + (d^2 - cd)U_{\eta\eta} = 0$$

οπότε επιλέγουμε $a = b$ και $d = 0$ άρα $2bd - bc - ad = -bc$
Επιλέγουμε $c = b = 1$ οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$-U_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow U_{\xi\eta} = 0$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι

$$\xi = x + t$$

$$\eta = x$$

Για τυχαίο σημείο t , $0 \leq t \leq t_0$ με $x_1(t) = x_0$ και $x_2(t) = x_0 + t_0 - t$
Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\sigma(s) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t(u_{tt} - u_{xt})dx \Rightarrow \sigma(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (u_t u_{tt} - u_t u_{xt})dx =$$

$$= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t u_{tt} dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t u_{xt} dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_t^2\right) dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_t^2 dx\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{2}u_t^2\right) dx - \frac{1}{2}u_t^2|_{x_1(t)}^{x_2(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{2}u_t^2\right) dx - \frac{1}{2}\left(u_t^2(x_0 + t_0 - t, t) - u_t^2(x_0, t)\right)$$

οπότε

$$E(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{2}u_t^2 dx$$

$$E'(t) = \frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{2}u_t^2 dx = \frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 x_2'(t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_t^2\right) dx =$$

$$-\frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t u_{tt} dx = -\frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t u_{xt} dx =$$

$$-\frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_t^2\right) dx = -\frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 + \frac{1}{2}u_t^2\ |_{x_0}^{x_0+t_0-t} =$$

$$-\frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 + \frac{1}{2}(\ u_t(x_2(t), t))^2 - \frac{1}{2}(\ u_t(x_0(t), t))^2 = -\frac{1}{2}(\ u_t(x_0(t), t))^2 \leq 0$$

Οπότε $E'(t) \leq 0$, δηλαδή η ενέργεια του συστήματος φθήνει.

$$E(0) = 0 \Rightarrow 0 \leq E(t) \leq E(0) = 0\ ,\ \ \forall t \geq 0$$

Δηλαδή $E(t) = 0$ με $x_1(t) \neq x_2(t)$ και $u_t^2 \geq 0$ συνεχής δηλαδή

$$(u_t(x,t))^2 = 0 \Rightarrow u_t(x,t) = 0\ ,\ \ x \in \mathbf{R},\ t \geq 0$$

και από θ.μ.τ $\exists \xi \in (0, t)$ τ.ω.

$$u(x,t) - u(x,0) = (t-0)u_t(x,\xi) \Rightarrow u(x,t) = 0\ , \forall x \in \mathbf{R},\ t \geq 0$$

άρα $w \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ Άτοπο

Φυλλάδιο 4ο

26-03-2015

1) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t) - u_{xxx}(x,t) = f(x,t), \;\; 0 < x < 1, \; t > 0$$

$$u(x,0) = \phi(x) \;, \;\; 0 < x < 1$$

$$u_x(0,t) = h(t), \; t > 0$$

$$u_{xx}(0,t) = H(t), \; t > 0$$

$$u_x(1,t) = g(t), \; t > 0$$

έχει το πολύ μια λύση.Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.
Κάνετε χρήση της συνάρτησης

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(x,t)dx$$

Λύση :

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις δηλαδή

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

τότε η w θα λύνει το ομογενές πρόβλημα

$$w_t - w_{xxx} = (u_1 - u_2)_t - (u_1 - u_2)_{xxx} \Rightarrow$$

$$u_{1,t} - u_{2,t} - u_{1,xxx} + u_{2,xxx} = (\; u_{1,t} - u_{1,xxx} \;) - (\; u_{2,t} - u_{2,xxx} \;) =$$
$$= f(x,t) - f(x,t) = 0$$

άρα

$$w_t - w_{xxx} = 0 \;\;, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0$$

$$w(x,0) = 0 \;\;, \; x \in \mathbf{R}$$

$$w_t(x,0) = 0, \;\; x \in \mathbf{R}$$

$$w_{xx}(0,t) = 0$$

$$w_x(1,t) = 0$$

Η ενέργεια είναι

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx \Rightarrow E'(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 2w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx=$$

$$=\int_0^1 w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx=/int_0^1 w_x\frac{\partial}{\partial x}w_t=w_xw_t\mid_0^1-\int_0^1 w_{xx}w_tdx=-\int_0^1 w_{xx}w_{xxx}dx=$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\frac{1}{2}w_{xx}^2dx=-\frac{1}{2}\left(w_{xx}^2(1,t)-w_{xx}^2(0,t)\right)=\frac{1}{2}w_{xx}^2(1,t)\leq 0$$

άρα $E(t)\searrow \quad$ για $\quad t\geq 0\Rightarrow$

$$E(t)\leq E(0)=\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,0)=0$$

$$w(x,0)=0\Rightarrow w_x(x,0)=0$$

άρα $E(t)=0\Rightarrow$

$$\int_0^1 w_x^2(x,t)dx=0\Rightarrow w_x(x,t)=0\Rightarrow\int_0^x w_\xi(\xi,t)d\xi=0\Rightarrow$$

$$w(x,t)-w(0,t)=0\Rightarrow w(x,t)=w(x,0)=0\Rightarrow u_1=u_2$$

άτοπο

2)Αποδείξτε με χρήση της ταυτότητας του $Green$ ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-(1+x^2+y^4)u=f(x,y),\ \ x^2+y^2<1$$

$$u(x,y)=g(x,y),\ \ x^2+y^2=1$$

έχει το πολύ μια λύση.Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

Λύση :

Έστω u_1,u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις τότε η $w=u_1-u_2$ θα λύνει το ομογενές πρόβλημα

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right)-(1+x^2+y^4)w=0$$

άρα

$$\int_\Omega \left(w\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right) - (1+x^2+y^4)w^2 \right) dxdy = 0 \ ,$$

με $x^2+y^2<1$ υπολογίζουμε ένα-ένα τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right) w\ dxdy = -\int_\Omega (1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dxdy + \int_{\vartheta\Omega}(1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}wV_x ds =$$

$$= -\int_\Omega (1+x^2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy$$

άφου $w=0$ και $\overrightarrow{V}=1 \Rightarrow \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,y)^2}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (x,y) \Rightarrow V_x = 1$

$$I_2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right) w\ dxdy =$$

$$= -\int_\Omega (1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy + \int_{\vartheta\Omega}(1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}wV_y ds = -\int_\Omega (1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

$$I_3 = -\int_\Omega (1+x^2+y^4)w^2 dxdy$$

άρα

$$\int_\Omega (1+x^2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + (1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + (1+x^2+y^4)w^2 dxdy = 0$$

και αφού όλες οι ποσότητες είναι μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις,κάθε μια από αυτές είναι ταυτοτικά 0 άρα

$$(1+x^2+y^4)w = 0 \Rightarrow w \equiv 0$$

άτοπο

3) Με τη μέθοδο *Fourier* να βρείτε τη γενική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ \ 0<x<\pi,\ t>0$$

$$u_x(0,t) = 0,\ \ t>0$$

$$u(\pi,t) = 0,\ \ t>0$$

Λύση :

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = T(t)X(x)$$

τότε

$$u_t = T'(t)X(x)$$

$$u_{xx} = T(t)X''(x)$$

άρα αντικαθιστώντας στην δ.ε. έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \ , \ \ \lambda \in \mathbf{R}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

$$X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

οπότε έχουμε δύο προβλήματα

$$\begin{bmatrix} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(\pi) = 0 \end{bmatrix} (1) \ \ \& \ \ \begin{bmatrix} T'(t) + \lambda T(t) = 0 \end{bmatrix} (2)$$

Η (1) είναι γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές άρα απο την χαρακτηριστική εξίσωση : $p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda$

$i)\lambda = 0$ άρα

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \ \ \& \ \ X(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

άρα

$$X(x) \equiv 0$$

απορρίπτεται αφού ψάχνουμε μη μηδενικές λύσεις

$ii)\lambda < 0 \Rightarrow p = \lambda$ ή $p = -\lambda$ άρα

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1 - c - 2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$X(\pi)=0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0 \Rightarrow c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)=0$$

$$c_1=0 \ \ \& \ \ c_2=0$$

άρα $X(x)\equiv 0$ απορρίπτεται

$iii)\lambda<0 \Rightarrow p^2=i\sqrt{\lambda}$ ή $p^2=-i\sqrt{\lambda}$ άρα

$$X(x)=c_1 cos(\sqrt{\lambda}x+c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(0)=0 \Rightarrow -c_1\sqrt{\lambda}sin0+c_2\sqrt{\lambda}cos0=0 \Rightarrow c_2=0$$

$$X(\pi)=0 \Rightarrow c_1 cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Rightarrow cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Rightarrow cos(\sqrt{\lambda}\pi)=cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}\pi=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \quad k=1,2,...$$

$$X_k=cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

άρα

$$T'(t)+\lambda T(t)=0 \Rightarrow T(t)=c_{\lambda_k}e^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 t}$$

οπότε η γενική λύση είναι

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)c_k e^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 t}$$

4)Με τη μέθοδο $Fourier$ να βρείτε τη γενική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t)-u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=0, \ \ 0<x<\pi, \ t>0$$

$$u(0,t)=0, \ \ t>0$$

$$u(\pi,t)=0, \ \ t>0$$

Λύση :

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t)=T(t)X(x)$$

τότε

$$u_t = T'(t)X(x)$$
$$u_{xx} = T(t)X''(x)$$
$$u_{xxt}(x,t) = T'(t)X''(X)$$

άρα αντικαθιστώντας στην δ.ε. έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - 1 = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \ , \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
$$X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

οπότε έχουμε δύο προβλήματα

$$\left[\begin{array}{c} X''(x) + (\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array} \right] \quad \& \quad \left[\; T'(t)(1+\lambda) + \lambda T(t) = 0 \; \right] (2)$$

Η 1η είναι γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές άρα απο την χαρακτηριστική εξίσωση : $p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda$

$i)\lambda = 0$ άρα

$$X(x) = c_1 x + c_2$$
$$X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \ \ \& \ \ X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

άρα

$$X(x) \equiv 0$$

απορρίπτεται αφού ψάχνουμε μη μηδενικές λύσεις

$ii)\lambda < 0 \Rightarrow p = \lambda$ ή $p = -\lambda$ άρα

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 0} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 0} = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$
$$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow c_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \right) = 0$$
$$c_1 = 0 \ \ \& \ \ c_2 = 0$$

άρα $X(x) \equiv 0$ απορρίπτεται

$iii)\lambda < 0 \Rightarrow p^2 = i\sqrt{\lambda}$ ή $p^2 = -i\sqrt{\lambda}$ άρα

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 cos(\sqrt{\lambda}0) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = k\pi \Rightarrow \lambda_k = k^2 \quad , k = 1, 2, ...$$

$$X_k = sin(kx)$$

άρα

$$T'(t)(1+\lambda) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow T'(t)(1+k^2) + k^2 T(t) = 0 \Rightarrow \left(e^{-\frac{k^2}{1+k^2}t} T(t)\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$T(t) = c_k e^{\frac{k^2}{1+k^2}t}$$

οπότε η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin(kx)\ c_k e^{\frac{k^2}{1+k^2}t}$$

<u>Φυλλάδιο 5ο</u>

2-04-2015

1) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \;\; x^2 + y^2 > 1$$

$$u = 1 \; + \; 3sin^3\theta, \;\; 0 \le \theta \le 2\pi$$

u φραγμένη.

Λύση :

Το χωρίο αποφασίζει για την αλλαγή σε πολίκες συντεταγμένες

$$x = \rho cos\theta \;\; \rho > 1, \;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

$$y = \rho sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

και μετά από πράξεις στην δ.ε. έχουμε

$$U_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0(1)$$

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή:

$$U(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$$

$$U_\rho(\rho,\theta) = R'(\rho)\Theta(\theta)$$

$$U_{\rho\rho}(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta''(\theta)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε

$$R''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\rho^2 R''(\rho)\Theta(\theta) + \rho R'(\rho)\Theta(\theta) + R(\rho)\Theta''(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Theta(\theta)\left(\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)\right) = -R(\rho)\Theta''(\theta) \Rightarrow \frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Theta''(\theta}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

$$\left[\begin{array}{c} \Theta''(\theta) + \Theta(\theta) = 0 \;, \;\; \theta \in [0, 2\pi] \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{array}\right] \;\; \& \;\; \left[\; \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0 \;, \;\; \rho > 1 \;\right]$$

Το πρόβλημα 1ο είναι μια δ.ε. 2ης τάξης με χαρακτ. εξίσωση $p^2+\lambda=0,\ \lambda$ ιδιοτιμή
$i)$Αν $\quad \lambda=0 \Rightarrow$

$$\Theta''(\theta)=0 \Rightarrow \Theta(\theta)=c_1\theta+c_2 \Rightarrow \Theta'(\theta)=c_2$$

Από τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\Theta(0)=c_2=c_1\ 2\pi+c_2=\Theta(2\pi) \Rightarrow c_1=0$$

Έστω ότι μια γραμμικώς ανεξάρτητη λύση για την ιδιοτιμή $\lambda=0$ ειναι $\Theta_0=1$

$ii)$Αν $\quad \lambda<0 \Rightarrow p=\sqrt{-\lambda}$ ή $p=-\sqrt{-\lambda}$ άρα

$$\Theta(\theta)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\theta}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\theta} \Rightarrow$$

$$\Theta'(\theta)=\sqrt{-\lambda}\left(c_1e^{\sqrt{-\lambda}\theta}-c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}\right)$$

οπότε

$$\Theta(0)=\Theta(2\pi) \Rightarrow c_1+c_2=c_1e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} \Rightarrow c_1\left(1-e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}\right)+c_2\left(1-e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}\right)=0$$

και

$$\Theta'(0)=\Theta'(2\pi) \Rightarrow c_1\left(1-e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}\right)-c_2\left(1-e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}\right)=0$$

άρα μέτα από πράξεις προκύπτει ότι $c_1=c_2=0 \Rightarrow U\equiv 0$ απορρίπτεται

$iii)$Αν $\quad \lambda>0 \Rightarrow p=i\sqrt{\lambda}$ ή $p=-i\sqrt{\lambda}$ άρα

$$\Theta(\theta)=c_1cos(\sqrt{\lambda}\theta)+c_2sin(\sqrt{\lambda}\theta) \Rightarrow \Theta'(\theta)=\sqrt{\lambda}\left(-c_1sin(\sqrt{\lambda}\theta)+c_2cos(\sqrt{\lambda}\theta)\right)$$

και

$$\Theta(0)=\Theta(2\pi) \Rightarrow c_1\left(cos(\sqrt{\theta}2\pi)-1\right)+c_2\left(sin(\sqrt{\theta}2\pi)\right)$$

$$\Theta'(0)=\Theta'(2\pi) \Rightarrow c_1\left(-sin(\sqrt{\theta}2\pi)\right)+c_2\left(cos(\sqrt{\theta}2\pi)-1\right)=0$$

Το ομογενές αυτό σύστημα έχει ορίζουσα $\Delta=\left(cos(\sqrt{\theta}2\pi)\right)^2+\left(sin(\sqrt{\theta}2\pi)\right)^2$ και για να άπειρες λύσεις πρέπει $\Delta=0 \Rightarrow$

$$\left(cos(\sqrt{\theta}2\pi)\right)^2+\left(sin(\sqrt{\theta}2\pi)\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} sin(\sqrt{\theta}2\pi)=0 \\ cos(\sqrt{\theta}2\pi)=1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} sin(\sqrt{\theta}2\pi)=sin0 \\ cos(\sqrt{\theta}2\pi)=cos0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}2\pi = k2\pi \Rightarrow \lambda_k = k^2, \;\; k \in \mathbf{N}$$

με ιδιοσυνάρτησεις $\Theta_{k1}(\theta) = cos(k\theta)$ και $\Theta_{k2}(\theta) = sin(k\theta)$
Για $\lambda_0 = 0 \Rightarrow$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = 0 \Rightarrow \rho R''(\rho) + R'(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\rho R'(\rho))' = 0 \Rightarrow \rho R'(\rho) = c \Rightarrow R'(\rho) = \frac{c}{\rho} \Rightarrow R(\rho) = c_1 ln\rho + c_2$$

Επιλέγουμε $c_1 = 0$ για να είναι φραγμένη η λύση άρα

$$R(\rho) = c_2$$

Για $\lambda_k = k^2 \Rightarrow$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0 \Rightarrow$$

Η εξίσωση είναι $Euler$ διαφορική άρα ψάχνουμε για λύσεις $R(\rho) = \rho^\mu$ άρα

$$\rho^2\mu(\mu-1)\rho^{\mu-2} + \rho\mu\rho^{\mu-1} - k^2\rho^\mu = 0 \Rightarrow \rho^\mu \left(\mu(\mu-1) + \mu - k^2\right) = 0 \Rightarrow \left(\mu^2 - k^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \pm k$$

άρα $R(\rho) = \rho^k$ απορρίπτεται αφού είναι άφραχτη και
$R(\rho) = \rho^{-k} = \frac{1}{\rho}^k$ οπότε η ειδική λύση είναι

$$U(\rho, \theta) = \rho^{-k}(c_1 cosk\theta + c_2 sink\theta)$$

και η γενική λύση

$$U(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(a_k cosk\theta + b_k sink\theta)$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $Fourier$, a_0, a_k, b_k

$$f(\theta) = U(1, \theta) = 1 + 3sin^3\theta = 1 + 3(\frac{3}{4}sin\theta - \frac{sin3\theta}{4} = 1 + \frac{9}{4}sin\theta - \frac{3}{4}\;\frac{sin3\theta}{4}$$

Για $k = 0, 1, 2, ...$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^2 \pi(1 + \frac{9}{4}sin\theta - \frac{3}{4}\;\frac{sin3\theta}{4})cosk\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^2 \pi cosk\theta d\theta$$

Για $k = 1, 2, ...$

$$a_0 = 2$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^2 \pi(1+\frac{9}{4}sin\theta - \frac{3}{4}\ \frac{sin3\theta}{4})sink\theta d\theta = \frac{9}{4\pi}\int_0^2 \pi sin\theta sink\theta d\theta - \frac{3}{4\pi}\int_0^2 \pi sin3\theta sink\theta d\theta$$

Για $k = 4, 5, 6....$

$$b_1 = \frac{9}{4}\ \ ,\ \ b_2 = 0\ \ ,\ \ b_3 = -\frac{3}{4}\ \ ,\ \ b_k = 0$$

2) Βρείτε την αρμονική συνάρτηση u στο μοναδιαίο δίσκο $0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi$ και τέτοια ώστε

$$u(r,0) = 0,\ u(r,\pi) = 0,\ \ 0 < r < 1$$

$$u(1,\theta) = \pi sin\theta - sin2\theta + sin^3\theta,\ \ 0 < \theta < \pi$$

(Η u είναι σε πολικές συντεταγμένες)

Λύση :

Αφού η u είναι αρμονική συνάρτηση θα ικανοποιεί την δ.ε.

$$r^2 U_{rr}(r,\theta) + rU_r(r,\theta) + U_{\theta\theta}(r,\theta) = 0\ ,\ \ r > 1,\ 0 < \theta < \pi$$

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή:

$$U(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$U_r(r,\theta) = R'(r)\Theta(\theta)$$

$$U_{rr}(r,\theta) = R(r)\Theta''(\theta)$$

$$U_{\theta\theta}(r,\theta) = R(r)\Theta''(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0\ ,\ \ \theta \in [0,\pi] \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{bmatrix}\ \ \&\ \ \left[\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0\ ,\ \ 0 > r > 1\ \right]$$

Το πρόβλημα 1ο είναι μια δ.ε. 2ης τάξης με χαρακτ. εξίσωση $p^2 + \lambda = 0,\ \lambda$ ιδιοτιμή

$i)$Αν $\ \lambda = 0 \Rightarrow$

$$\Theta''(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = c_1\theta + c_2 \Rightarrow \Theta'(\theta) = c_2$$

Από τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\Theta''(0) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = c_1\theta + c_2\ \ 0 \le \theta \le \pi$$

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Theta(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

άρα

$$\Theta(\theta) = 0 \Leftrightarrow \Theta \equiv 0 \Leftrightarrow U \equiv 0$$

απορρίπτεται

$ii)$Αν $\lambda < 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$ άρα

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$$

οπότε

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

και

$$\Theta(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow c_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

άρα η περίπτωση απορρίπτεται

$iii)$Αν $\lambda > 0 \Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$ άρα

$$\Theta(\theta) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

και

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow c_1 \left(cos(\sqrt{\theta}0)\right) + c_2 \left(sin(\sqrt{\theta}0)\right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Theta(\pi) = \pi \Rightarrow c_2 \left(sin(\sqrt{\theta}\pi)\right) = 0 \Rightarrow sin(\sqrt{\lambda}\pi) = sin0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi) = k\pi \Rightarrow \lambda_k = k^2, \;\; k = 1, 2...$$

άρα

$$\Theta_k(\theta) = sin(k\theta), \;\; 0 \leq \theta \leq \pi$$

άρα για την ιδιοτιμή $\lambda_k = k^2$ θα λύσουμε το 2ο προβλημα

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0, \;\; 0 < r < 1$$

Η εξίσωση είναι $Euler$ διαφορική άρα ψάχνουμε για λύσεις $R(r) = r^\mu$ άρα

$$R'(r) = \mu r^{\mu-1}$$

$$R''(r) = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}$$

οπότε αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + \mu r^\mu - k^2 r^\mu = 0 \Rightarrow \mu^2 = k^2 \Rightarrow \mu = \pm k$$

άρα $\exists c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τ.ω.

$$R(r) = c_1 r^k + c_2 r^{-k}$$

Έστω $c_2 \neq 0$ τότε

$$lim_{r\to 0} R(r) = \infty$$

δηλαδή η $R(r)$ δεν είναι φραγμένη ,το οποίο απορρίπεται άρα $c_2 = 0$ άρα

$$R_k(r) = r^k \ , \ \ 0 < r \leq 1 \ , \ \ k = 1, 2, ...$$

επομένως

$$U_k(r,\theta) = r^k sin(k\theta)$$

και η γενική λύση είναι

$$U(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k sin(k\theta) \ , \ \ 0 < r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

Επίσης,θέλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστες $Fourier$, b_k

$$f(\theta) = U(1,\theta) = \pi sin\theta - sin2\theta + sin^3\theta$$

και

$$U(1,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin(k\theta)$$

πολ/ζουμε με $sin(m\theta)$ και ολοκληρώνουμε

$$\int_0^{\pi} f(\theta) sin(m\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\pi} sin(k\theta) sin(m\theta) d\theta$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{\pi} sin(k\theta) sin(m\theta) = [^{0, \ k\neq m}_{\pi/2 \ , \ k=m}$$

άρα

$$\int_0^{\pi} f(\theta) sin(m\theta) d\theta = b_k \frac{\pi}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) sin(k\theta) d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi sin\theta - sin2\theta + sin^3\theta) sin(k\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi sin\theta - sin2\theta + \frac{3}{4} sin\theta - \frac{1}{4} sin3\theta) sin(k\theta) d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi}(\pi + \frac{3}{4}) \int_0^{\pi} sin\theta sin(k\theta) d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} sin2\theta sin(k\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} sin3\theta sin(k\theta) d\theta$$

άρα

$$b_1 = \pi + \frac{3}{4},\ \ b_2 = -1,\ \ b_3 = -\frac{1}{4}\ \ c_k = 0,\ \ k = 4, 5, ...$$

με γενική λύση

$$U_{r,\theta} = (\pi + \frac{3}{4}) r sin\theta - r^2 sin 2\theta - \frac{r^3}{4} sin 3\theta\ ,\ \ 0 < r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

3)Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) - u_{xx}(xt) = 0,\ \ 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0,\ \ t > 0$$

$$u_x(1,t) + u_t(1,t) = 0,\ \ t > 0$$

Προς τούτο αποδείξτε ότι κάποιο κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μόνο θετικές αριθμήσιμες το πλήθος ιδιοτιμές που συμβολίζουμε με

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...... < \lambda_k < ....$$

Αποδείξτε επίσης ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές λύσεις της εξίσωσης

$$tan\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και ότι ικανοποιούν την ασυμπτωτική σχέση

$$lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{k\pi} = 1$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις;
Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος.Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k

Λύση :

Αναζητώ λύσεις μη-μηδενικές και φραγμένες της μορφής

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

οπότε

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

$$u_t(x,t) = X(x)T''(t)$$

και

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

άρα αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

επίσης

$$X'(1)T(t) + X(1)T'(t) = 0 \Rightarrow X'(1) + X(1)\frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \Rightarrow X'(1) - \lambda X(1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(1) - \lambda X(1) = 0 \end{bmatrix} (1) \ \ \& \ \ \begin{bmatrix} T'(t) + \lambda T(t) = 0 \end{bmatrix} (2)$$

Για την 1η εξίσωση,η οποία είναι ομογενής γραμμικη 2ης τάξης,η χαρκτηριστική εξίσωση είναι : $r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$
$i)\lambda = 0$ τότε

$$X''(x) = 0 \Rightarrow$$

$\exists c_1, c_2$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 x + c_2, \ \ 0 \leq x \leq 1$$

και

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

άρα

$$X(x) = c_1 x \ , \ \ c_1 \neq 0 \Rightarrow X'(x) = c_1 \ , \ \ 0 \leq x \leq 1$$

οπότε

$$c_1 - \lambda c_1 = 0 \Rightarrow c_1(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

άτοπο από υπόθεση,άρα απορρίπτεται
$ii)\lambda < 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$
άρα $\exists c_1, c_2$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

και

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

οπότε

$$X(x) = c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) \ , \ \ 0 \leq x \leq 1, \ c_1 \neq 0$$

και

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$$
$$X'(1) = \sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)$$

αφού

$$X'(1) - \lambda X(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) - \lambda c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) - \lambda\left(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}} + \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$$
$$(1+\sqrt{-\lambda})(e^{\sqrt{-\lambda}})^2 + (1-\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Η σχέση αυτή είναι ένα τριώνυμο του $e^{\sqrt{-\lambda}}$ με διακρίνουσα

$$\Delta = -4(1+\sqrt{-\lambda})(1-\sqrt{-\lambda}) = -4(1-\lambda) \Rightarrow \Delta = 4(\lambda - 1)$$

Θέλουμε $\Delta \geq 0$ άρα $\lambda \geq 1$ όμως $\lambda < 0$ απορρίπτεται

$iii)\lambda > 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}$
άρα $\exists c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)\ , \quad 0 \leq x \leq 1$$

και

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 cos(\sqrt{\lambda}0) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

άρα

$$X(x) = c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$
$$X'(x) = \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)$$

οπότε

$$X(1) = c_2 sin(\sqrt{\lambda})$$

και

$$X'(1) = \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda})$$

άρα

$$\sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}) - \lambda c_2 sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}cos(\sqrt{\lambda}) - \lambda sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow$$
$$cos\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda} = 0$$

Αν $cos\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow sin(\sqrt{\lambda}) = \pm 1$ άρα

$$-\sqrt{\lambda}(\pm 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

άτοπο αφού $\lambda > 0$ άρα $cos\sqrt{\lambda} = 0$ οπότε

$$1 - \sqrt{\lambda}\frac{sin\sqrt{\lambda}}{cos\sqrt{\lambda}} = 0 \Rightarrow tan(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Τώρα θέλω να δείξουμε ότι για όλες τις θετικές λύσεις,το 1ο πρόβλημα επιλύεται

Έστω ότι $\exists \lambda_0 > 0$ ώστε η εξίσωση να μην έχει λυση δηλαδή

$$tan(\sqrt{\lambda_0}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$$

Θ.δ.ο. η $X_0 = c_2 sin(\sqrt{\lambda_0}x)$ είναι λύση του προβλήματος 1.
Όντως

$$X_0''(x) + \lambda X_0(x) = 0$$

και

$$X(0) = 0$$

επίσης

$$X_0'(\pi) - \lambda_0 X(\pi) = 0$$

οπότε για $\lambda_0 > 0$ βρήκαμε μια λύση του 1ου προβλήματος.Ατοπο Θα δείξουμε τώρα ότι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών είναι αριθμήσιμο,δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι το πλήθος των ριζών ειναι αριθμήσιμο
Θέτουμε $z = \sqrt{x}$, $z > 0$ και $tan = \frac{1}{z}$ Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_k(z) = z\ tanz - 1\ , \quad z \in \left((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi\right)\ , \ k = 0, 1, 2, ...$$

και

$$f_k'(z) = (ztanz - 1)' = z + \frac{z}{cos^2 z} > 0$$

οπότε είναι γν. αύξουσα με

$$f_k\left(k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi\right) = (-1, +\infty)$$

και

$$lim_{z \to (k + \frac{1}{2})\pi)} tanz = +\infty$$

άρα απο Θ.Μ.Τ η f_k έχει ακριώς μία ρίζα
Συμβολίζουμε $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...... < \lambda_k < ....$ και οι ρίζες
$0 < z_1 < z_2 < .... < z_k < .....$ τότε

$$lim_{k\to+\infty}\frac{1}{z_k} = 0 \Rightarrow lim_{k\to+\infty} tanz_k = 0 \Rightarrow tanz_k \to_{k\to+\infty} 0 \Rightarrow \frac{z_k}{k} \to_{k\to+\infty} \pi$$

επομένως αφού $z_k = \sqrt{\lambda_k}$

$$\frac{\sqrt{\lambda_k}}{k} \to_{k\to+\infty} \pi \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda_k}}{k\pi} \to_{k\to+\infty} 1 \Rightarrow lim_{k\to+\infty}\frac{\sqrt{\lambda_k}}{k\pi} = 1$$

Η λύση της 2ης εξίσωσης είναι

$$T_k(t) = e^{-\lambda_k t}\ ,\ \ t \geq 0$$

οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$u_k(x,t) = e^{-\lambda_k t} sin(\sqrt{\lambda_k} x)$$

και η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k t} sin(\sqrt{\lambda_k} x)$$

4) Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(xt) = 0,\ \ 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 0,\ \ t > 0$$
$$u_x(\pi,t) = -u_{tt}(\pi,t)\ ,\ \ t > 0$$

Ποιό είναι το πρόβλημα ιδιοτιμών τηω μεθόδου χωρισμού μεταβλητών; Προς τούτο αποδείξτε ότι κάποιο κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μόνο θετικές αριθμήσιμες το πλήθος ιδιοτιμές που συμβολίζουμε με

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...... < \lambda_k < ....$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις; Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος.Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k

Λύση :

Αναζητώ λύσεις μη-μηδενικές και φραγμένες της μορφής

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

οπότε

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$$
$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$
$$u_t(x,t) = X(x)T''(t)$$
$$u_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$$

και

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

άρα αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

επίσης

$$X'(\pi)T(t) = -X(\pi)T''(t) \Rightarrow X'(\pi) = -X(\pi)\frac{T''(t)}{T(t)} \Rightarrow X'(\pi) = -X(\pi)(-\lambda)$$

οπότε έχουμε τα προβλήματα

$$\begin{bmatrix} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \ , \quad 0 < x < \pi \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) - \lambda X(\pi) = 0 \end{bmatrix} (1) \ \ \& \quad \begin{bmatrix} T''(t) + \lambda T(t) = 0 \ , \quad t > 0 \end{bmatrix} (2)$$

Για την 1η εξίσωση,η οποία είναι ομογενής γραμμικη 2ης τάξης,η ξαρκτηριστική εξίσωση είναι : $r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$

$i)\lambda = 0$ τότε

$$X''(x) = 0 \Rightarrow$$

$\exists c_1, c_2$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 x + c_2, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

και

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

άρα

$$X(x) = c_1 x \ , \quad c_1 \neq 0 \Rightarrow X'(x) = c_1 \ , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

οπότε

$$c_1 - \lambda c_1 \pi = 0 \Rightarrow c_1(1 - \lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\pi}$$

άτοπο από υπόθεση,άρα απορρίπτεται

$ii)\lambda < 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$
άρα $\exists c_1, c_2$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

και

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

οπότε

$$X(x) = c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)\ ,\ \ 0 \leq x \leq \pi,\ c_1 \neq 0$$

και

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$$
$$X'(\pi) = \sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)$$

αφού

$$X'(\pi) - \lambda X(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) - \lambda c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) - \lambda\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$
$$(1+\sqrt{-\lambda})(e^{\sqrt{-\lambda}\pi})^2 + (1-\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Η σχέση αυτή είναι ένα τριώνυμο του $e^{\sqrt{-\lambda}}$ με διακρίνουσα

$$\Delta = -4(1+\sqrt{-\lambda})(1-\sqrt{-\lambda}) = -4(1-\lambda) \Rightarrow \Delta = 4(\lambda-1)$$

Θέλουμε $\Delta \geq 0$ άρα $\lambda \geq 1$ όμως $\lambda < 0$ απορρίπτεται

$iii)\lambda < 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}$

άρα $\exists c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τ.ω.

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)\ ,\ \ 0 \leq x \leq \pi$$

και

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 cos(\sqrt{\lambda}0) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

άρα

$$X(x) = c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}c_2cos(\sqrt{\lambda}x)$$

οπότε

$$X(\pi) = c_2sin(\sqrt{\lambda}\pi)$$

και

$$X'(\pi) = \sqrt{\lambda}c_2cos(\sqrt{\lambda}\pi)$$

άρα

$$\sqrt{\lambda}c_2cos(\sqrt{\lambda}\pi) - \lambda c_2sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}cos(\sqrt{\lambda}\pi) - \lambda sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow$$

$$cos\sqrt{\lambda}\pi - \sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

Αν $cos\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow sin(\sqrt{\lambda}) = \pm 1$ άρα

$$-\sqrt{\lambda}(\pm 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

άτοπο αφού $\lambda > 0$ άρα $cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$ οπότε

$$1 - \sqrt{\lambda}\frac{sin\sqrt{\lambda}\pi}{cos\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow tan(\sqrt{\lambda}\pi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Τώρα θέλω να δείξουμε ότι για όλες τις θετικές λύσεις,το 1ο πρόβλημα επιλύεται

Έστω ότι $\exists \lambda_0 > 0$ ώστε η εξίσωση να μην έχει λυση δηλαδή

$$tan(\sqrt{\lambda_0\pi}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$$

Θ.δ.ο. η $X_0 = c_2sin(\sqrt{\lambda_0}x)$ είναι λύση του προβλήματος 1.
Όντως

$$X(0) = 0$$

επίσης

$$X_0'(\pi) - \lambda_0X(\pi) = 0$$

οπότε για $\lambda_0 > 0$ βρήκαμε μια λύση του 1ου προβλήματος.Ατοπο Θα δείξουμε τώρα ότι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών είναι αριθμήσιμο,δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι το πλήθος των ριζών ειναι αριθμήσιμο
Θέτουμε $z = \sqrt{x}\pi$, $z > 0$ και $tanz = \frac{\pi}{z}$ Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_k(z) = z\,tanz - \pi\ , \quad z \in \left((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi\right)\ ,\ k = 0, 1, 2, ...$$

και

$$f_k'(z) = (z\,tanz - \pi)' = z + \frac{z}{cos^2 z} > 0$$

οπότε είναι γν. αύξουσα με

$$f_k\left(k\pi, (k+\frac{1}{2})\pi\right) = (-1, +\infty)$$

και

$$lim_{z \to (k+\frac{1}{2})\pi^-)} tanz = +\infty$$

άρα απο Θ.Μ.Τ η f_k έχει ακριώς μία ρίζα
Συμβολίζουμε $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...... < \lambda_k < ....$ και οι ρίζες
$0 < z_1 < z_2 < .... < z_k < .....$

επομένως $z_k = \sqrt{\lambda_k}\pi$

Για το 2ο πρόβλημα έχουμε ότι η λύση της είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις

$$T_{k1}(t) = cos(\sqrt{\lambda_k}t)$$

και

$$T_{k2}(t) = sin(\sqrt{\lambda_k}t)\ ,\ \ t \geq 0$$

άρα οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$u_k(x,t) = a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k sin(\sqrt{\lambda_k}t)\ ,\ \ t \geq 0$$

και η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k sin(\sqrt{\lambda_k}t)\right) sin(\sqrt{\lambda_k}x)$$

<u>Φυλλάδιο 6ο</u>

23-04-2015

1) α)Να βρεθούν όλες οι λύσεις του προβλήματος

$$u_x(x,t) \ = \ 3x^2t+t, \ \ x,t \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,t) = x^3+x, \ \ x,t \in \mathbf{R}$$

β)Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$u_x(x,t) = 4x^2t+t, \ \ x,t \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,t) \ = \ x^3+x, \ \ x,t \in \mathbf{R}$$

δεν έχει ομαλή λύση.

Λύση : α)

$$u_x(x,t) \ = \ 3x^2t+t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial x}(x^3t+xt) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u-x^3t-t) = 0 \Rightarrow$$

$$u(x,t)-(x^3t+xt) = A(t) \Rightarrow u(x,t) = x^3t+xt+A(t)$$

και

$$u_t(x,t) \ = \ x^3+x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial t}(x^3t+xt) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(u-x^3t-xt) = 0 \Rightarrow$$

$$u(x,t)-(x^3t+xt) = B(x) \Rightarrow u(x,t) = x^3t+xt+B(x)$$

άρα για $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall t \in \mathbf{R}$

$$A(t) = B(x)$$

άρα είναι σταθερές συναρτήσεις οπότε

$$u(x,t) = x^3t+xt+c_0 \ \ , \ \ x \in \mathbf{R}, \ t \in \mathbf{R} \ , \ c_0 \in \mathbf{R}$$

β)Έστω ότι υπάρχει ομαλή συνάρτηση που να ικανοποιεί τις u_x, u_t τότε

$$u(x,t) = \frac{4}{3}x^3t+xt+A(t) \ , \ \ x \in \mathbf{R} \ , t \in R$$

και

$$u(x,t) = x^3t+xt+B(x) \ , \ \ x \in \mathbf{R}, \ t \in \mathbf{R}$$

Άρα για $t=0 \Rightarrow$

$$B(x) = A(0) \ , \ \ x \in \mathbf{R}$$

Δηλαδή η B είναι σταθερή
Για ξ=0

$$A(t) = B(0), \;\; t \in \mathbf{R}$$

δηλαδή A σταθερή άρα

$$u(x,t) = x^3 t + xt + c_1$$

και

$$u(x,t) = \frac{4}{3}x^3 t + xt + c_2$$

Θέτουμε $t = 1$ τότε

$$u(x,1) = \frac{4}{3}x^3 + x + c_2$$

$$u(x,1) = x^3 t + xt + c_1$$

άρα $\frac{4}{3} = 1$ άτοπο.

2)Να βρεθεί ή λύση του προβλήματος

$$(t + u(x,t)u_x(x,t) + tu_t(x,t) = x - t, \; x \in \mathbf{R} \;, \; t > 1$$

$$u(x,1) = 1 + x, \; x \in \mathbf{R}$$

Λύση :

Έστω $\sigma(s) = u(\; x(s), t(s)\;)$, $s \in \mathbf{R}$ τότε

$$\sigma'(s) = \; u_x(x(s), y(s)) \; x'(s) + \; u_t\,(x(s), t(s)) \; t'(s)$$

Επιλέγουμε $x'(s) = t + u(x,t)$ και $t'(s) = t$, $s \in \mathbf{R}$ ώστε να είναι οι συντελεστές της εξίσωσης, με $x(0) = x_0$ και $t(0) = 1$ τότε

$$\sigma'(s) = x(s) - t(s) \;, \;\; s \in \mathbf{R}$$

$$\sigma(0) = u(\; x(0), t(0)\;) = u(x_0, 1) = 1 + x_0 \;, \;\; x_0 \in \mathbf{R}$$

δηλαδή έχουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\left[\begin{array}{c} x'(s) = t + u(x,t) \;\; , \;\; x(0) = x_0 \\ t'(s) = t \;\; , \;\; t(0) = 1 \\ \sigma'(s) = x(s) - t(s) \;\; , \;\; \sigma(0) = 1 + x_0 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

άρα

$$t'(s) = t(s) \Rightarrow t'(s) - t(s) = 0 \Rightarrow \left(e^{-s} t(s)\right)' = 0$$

οπότε απο ΘΜΤ $\Rightarrow$

$$e^{-s}t(s) = e^0 t(0) \Rightarrow t(s) = e^s \ \ , \ s \in \mathbf{R}$$

επίσης

$$x'(s) = t(s) + \sigma(s) \quad \& \quad \sigma'(s) = x(s) - t(s)$$

αρα προσθέτοντας κατά μέλη

$$x'(s) + \sigma'(s) = x(s) + \sigma(s) \Rightarrow x'(s) - x(s) = \sigma(s) - \sigma'(s) \Rightarrow$$

$$e^{-t}\left(x'(s) - x(s)\right) = e^{-t}\left(\sigma(s) - \sigma'(s)\right) \Rightarrow$$

$$\left(e^{-t}x(s) - (-e^{-t})\sigma(s)\right)' = 0 \Rightarrow e^{-t}x(s) - (-e^{-t})\sigma(s) = x(0) - \sigma(0) = x_0 + 1 + x_0 \Rightarrow$$

$$x(s) = -\sigma(s) + (1 + 2x_0)e^s \ , \ s \in \mathbf{R}$$

άρα

$$\sigma'(s) = -\sigma(s) + (1 + 2x_0)e^s - e^s \Rightarrow \sigma'(s) + \sigma(s) = 2x_0 e^s \Rightarrow (e^s\sigma(s))' = \left(x_0 e^{2s}\right)' \Rightarrow$$

$$\left(e^s\sigma(s) - x_0 e^{2s}\right)' = 0 \Rightarrow e^s\sigma(s) - x_0 e^{2s} = \sigma(0) - x_0 \Rightarrow e^s\sigma(s) - x_0 e^{2s} = 1 + x_0 - x_0 \Rightarrow$$

$$\sigma(s) = e^{-s} + x_0 e^s$$

άρα τελικά

$$x(s) = -e^{-s} - x_0 e^s + (1 + 2x_0)e^s \Rightarrow x(s) = -e^{-s} + (1 + x_0)e^s \ , \quad s \in \mathbf{R}$$

Έστω τυχαίο σημείο (x_1, t_1),θα υπάρχει $\overline{s} = s$ τ.ω. $(x_1, t_1) = (x(\overline{s}), t(\overline{s}))$ άρα

$$u(x_{\overline{s}}, t\overline{s} = u(x_1, t_1)$$

και

$$x_1 = -e^{-\overline{s}} + (1 + x_0)e^{\overline{s}} \ \ \& \ \ t_1 = e^{\overline{s}}$$

Επομένως

$$u(x_1, t_1) = u(-e^{-\overline{s}} + (1 + x_0)e^{\overline{s}}, e^{\overline{s}}) = \frac{1}{t_1} + x_1 - \frac{t_1^2 - 1}{t_1} \Rightarrow$$

$$u(x_1, t_1) = x_1 - t_1 + \frac{2}{t_1} \ , \quad x_1 \in \mathbf{R}, \quad t_1 \geq 0$$

3)Να βρεθεί ή λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$3u_{xx}(x,t) - 2u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t) = 0 \ , \quad x \in \mathbf{R} \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ \ x \in \mathbf{R}$$
$$u_t(x,t) = g(x)\ ,\ \ x \in \mathbf{R}$$

όπου $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ δοθείσες ομαλές συναρτήσεις

Λύση :

Απο την χαρακτηριστική εξίσωση $3r^2 - 2r - 1 = 0$ έχουμε
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 > 0$ άρα η διαφορική εξ. είναι υπερβολικού τύπου
Θέτουμε

$$u(x,t) = U(\xi, \eta)$$

Η εξίσωση έχει σταθερούς συντελεστές,δηλαδή οι ρίζες είναι ανεξάρτητες των x, y άρα θέτουμε

$$\xi = ax + bt$$
$$\eta = cx + dt$$

τότε απο κανόνα αλυσίδας

$$u_x = U_\xi(\xi,\eta) \cdot a + U_\eta(\xi,\eta) \cdot c$$
$$u_t = U_\xi(\xi,\eta) \cdot b + U_\eta(\xi,\eta) \cdot d$$
$$u_{xx} = \frac{d}{dx}\left(U_\xi(\xi,\eta) \cdot a + U_\eta(\xi,\eta) \cdot c\right) = U_{\xi\xi}(\xi,\eta) \cdot a^2 + 2acU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + U_{\eta\eta}(\xi,\eta)c^2$$
$$u_{tt} = \frac{d}{dt}\left(U_\xi(\xi,\eta) \cdot b + U_\eta(\xi,\eta) \cdot d\right) = U_\xi(\xi,\eta) \cdot b^2 + 2bdU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}(\xi,\eta) \cdot d^2$$
$$u_{xt} = \frac{d}{dx}\left(U_\xi(\xi,\eta) \cdot a + U_\eta(\xi,\eta) \cdot c\right) = abU_{\xi\xi}(\xi,\eta) + adU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + cdU_{\xi\eta}(\xi,\eta) + cdU_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

Αντικαθιστούμε στη διαφορική και έχουμε

$$(3a^2 - b^2 - 2ab)U_{\xi\xi} + (3c^2 - d^2 - 2cd)U_{\eta\eta} + (6ac - 2bd - 2ad - 2cb)U_{\xi\eta} = 0$$

Τώρα αφού είναι υπερ. τύπου προσπαθούμε να μηδενίσουμε τους συντελεστές των $U_{\xi\xi}$, $U_{\eta\eta}$ αλλά όχι του $U_{\xi\eta}$ γιάυτο επιλέγουμε
$a = b$ και $c = -\frac{1}{3}d$
οπότε ο συντελεστής του $U_{\xi\eta}$ γίνεται

$$(6ac - 2ad - 2cb - 2bd)U_{\xi\eta} = -\frac{16}{3}bdU_{\xi\eta} = 0$$

επίσης επιλέγουμε $b = 1$ και $d = -3$ οπότε οι καμπύλες ειναι

$$\xi = x + t$$

$$\eta = x - 3t$$

και

$$16U_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow U_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U_\xi(\xi,\eta)\right) = 0 \Rightarrow U_\xi(\xi,\eta) = h(\xi) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(U(\xi,\eta)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\int_0^\xi h(s)\,ds\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(U(\xi,\eta) - \int_0^\xi h(s)\,ds\right) = 0 \Rightarrow$$

$$U(\xi,\eta) - \int_0^\xi h(s)\,ds = h_1(\eta) \Rightarrow U(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta)$$

άρα

$$u(x,t) = U(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta) = A(x+t) + B(x-3t)\ ,\quad x \in \mathbf{R}\ ,\ t > 0$$

Όμως

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow A(x) + B(x) = f(x)\ \ *$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow A'(x) - 3B'(x) = g(x) \Rightarrow (A(x) - 3B(x))' = g(x) \Rightarrow$$

αφου σταθερή συνάρτηση $\exists c_1 \in \mathbf{R}$ τ.ω.

$$A(x) - 3B(x) = \int_0^x g(s)ds + c_1 \Rightarrow^* A(x) = \frac{3}{4}f(x) + \frac{1}{4}\int_0^x g(s)ds + \frac{c_1}{4}\ ,\quad x \in \mathbf{R}$$

άρα

$$B(x) = \frac{1}{4}f(x) - \frac{1}{4}\int_0^x g(s)ds - \frac{c_1}{4}$$

τελικά

$$u(x,t) = \frac{3}{4}f(x+t) + \frac{1}{4}f(x-3t) + \int_{x-3t}^{x+t} g(s)ds\ ,\quad x \in \mathbf{R}\ ,\ t \geq 0$$

4)Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικώκ τιμών

$$3u_{xx}(x,t) - 2u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t) = f(x)\ ,\quad x \in \mathbf{R}\ ,\ t > 0$$

$$u(x,0) = 0\ ,\quad x \in \mathbf{R}$$

$$u_t(x,0) = 0\ ,\quad x \in \mathbf{R}$$

όπου $f : \mathbf{R} \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση

Λύση :

Θέλουμε τη λύση στο μη ομογενές πρόβλημα.Ψάχνουμε τις χαρακτηριστκές καμπύλες,οι οποίες βρέθηκαν στο πρόβλημα 3)

$$\xi = x + t \ \ \& \ \ \eta = x - 3t$$

Για τη λύση του μη ομογενούς θα χρησιμοποιήσουμε ταυτότητα $Green$:

$$\int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dxdt = \int_{\partial\Omega} Qdt + Pdx$$

Επιλέγουμε $Q(x,t) = 3u_x(x,t) - 2u_t(x,t)$ και $P(x,t) = u_t(x,t)$ άρα

$$\int\int_{\Omega} (3u_{xx}(x,t) - 2u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t))\, dxdt = \int_{\partial\Omega} 3u_x(x,t)dt - 2u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dx \Rightarrow$$

$$\int_{\partial\Omega} 2u_x(x,t)dt + u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dx = \int\int_{\Omega} f(x,t)dxdt$$

Για το σύνορο $\partial\Omega_1 :\ \ x - 3t = x_0 - 3t_0 \Rightarrow dx - 3dt = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_1} 3u_x(x,t)\frac{dx}{3} - 2u_t(x,t)dt + u_t(x,t)(3dt) = \int_{\partial\Omega_1} u_x(x,t)dx + u_t(x,t)dt = \int_{\partial\Omega_1} du(x,t) =$$

$$= u(x_0 - 3t_0, 0) - u(x_0, t_0) = -u((x_0, t_0)$$

Για το $\partial\Omega_2 :\ \ x + t = x_0 + t_0 \Rightarrow dx + dt = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega_2} 3u_x(x,t)dx - 2u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dt \Rightarrow \int_{\partial\Omega_2} -3u_x dx - 3u_t dt = \int_{\partial\Omega_2} -3du(x,t) =$$

$$-3u(x_0 + t_0, 0) + u(x_0, t_0) = -3u(x_0, t_0)$$

Για το $\partial\Omega_3 :\ \ t = 0 \ \& \ u = 0 \Rightarrow u_t = 0 \ \ \& \ \ u_x = 0$ άρα

$$\int_{\partial\Omega} 3u_x(x,t)dt - 2u_t(x,t)dt + u_t(x,t)dx = 0$$

άρα τελικά έχουμε

$$\int\int_{\Omega} f(x,t)dxdt = -u(x_0,t_0) - 3u(x_0,t_0) \Rightarrow \int_0^{t_0} \int_{x_0-3t_0+3t}^{x_0+t_0-t} f(x,t)dxdt = -4u(x_0,t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x_0,t_0) = -\frac{1}{4} \int_0^{t_0} \int_{x_0-3t_0+3t}^{x_0+t_0-t} f(x,t)dxdt$$

5)Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0\ , \ \ 0 < x < \pi,\ y > 0$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \ \ y > 0$$
$$u(x,0) = sinx + sin^3 x \ , \ \ 0 < x < \pi$$

με u φραγμένη

Λύση :

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = Y(y)X(x)$$

τότε

$$u_{yy} = Y''(y)X(x)$$
$$u_{xx} = Y(y)X''(x)$$

άρα αντικαθιστώντας στην δ.ε. έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \ , \ \ \lambda \in \mathbf{R}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$X(\pi)Y(y) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

οπότε έχουμε δύο προβλήματα

$$\left[\begin{array}{c} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array} \right] (1) \ \ \& \ \ \left[\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \ \right] (2)$$

Η (1) είναι γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές άρα απο την χαρακτηριστική εξίσωση : $p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda$

$i)\lambda = 0$ άρα

$$X(x) = c_1 x + c_2$$
$$X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \ \ \& \ \ X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

άρα

$$X(x) \equiv 0$$

απορρίπτεται αφού ψάχνουμε μη μηδενικές λύσεις

$ii)\lambda < 0 \Rightarrow p = \lambda$ ή $p = -\lambda$ άρα

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$
$$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0$$
$$c_1 = 0 \ \ \& \ \ c_2 = 0$$

άρα $X(x) \equiv 0$ απορρίπτεται

$iii)\lambda < 0 \Rightarrow p^2 = i\sqrt{\lambda}$ ή $p^2 = -i\sqrt{\lambda}$ άρα

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$
$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda_k = k^2 \ \ k = 1, 2, ...$$
$$X_k = sin(kx)$$

άρα

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0 \ , \ y > 0$$

και αφού είναι γραμμική ομογενής 2ης τάξης,η χαρακτ. εξ·ισωση είναι $r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm k$ άρα $\exists c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τ.ω.

$$Y(y) = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky} \ , \ \ y \geq 0$$

όμως εαν $c_1 \neq 0$ τότε $lim_{y \to +\infty} Y(y) = \pm\infty$ άρα η y δεν είναι φραγμένη.
Επομένως $c_1 = 0$ και $c_2 \neq 0$ άρα

$$Y(y) = e^{-ky} \ , \ \ k = 1, 2, ...$$

άρα

$$u_k(x, y) = e^{-ky} sin(kx)$$

και η γενική λύση

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-ky} sin(kx)$$

όπου c_k οι συντελεστές $Fourier$ τους οποίους θα υπολογίσουμε

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k sin(kx) = sinx + sin^3 x = sinx + \frac{3}{4} sinx - \frac{1}{4} sin3x = \frac{7}{4} sinx - \frac{1}{4} sin3x$$

επομένως

$$c_1 = \frac{7}{4} \ , \ \ c_2 = 0 \ , \ \ c_3 = -\frac{1}{4} \ , \ \ c_k = 0 \ \ , \ \ k \geq 4$$

άρα τελικά η λύση είναι

$$u(x,y) = \frac{7}{4}e^{-y}sinx - \frac{1}{4}e^{-3y}sin3x$$

6)Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{xx}(x,t) - 2sinx\ u_{xt}(x,t) - cos^2xu_{tt}(x,t) - cosxu_t(x,t) = f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$u(x,0) = \phi(x)\ ,\ \ 0 < x < 1$$

$$u_t(x,0) = y(t),\ t > 0$$

$$u(0,t) = h(t),\ t > 0$$

$$u(1,t) = g(t),\ t > 0$$

έχει το πολύ μια λύση.Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

Λύση :

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις δηλαδή

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

τότε η w θα λύνει το ομογενές πρόβλημα

$$w_{xt} - 2sinxw_{xt} - cos^2xu_{tt} - cosxu_t = 0$$

$$w(x,0) = 0\ \ ,\ \ 0 < x < 1$$

$$w_t(x,0) = 0$$

$$w(0,t) = 0$$

$$w(1,t) = 0\ ,\ \ t > 0$$

(Προσοχή μόνο στο <u>στο πρόχειρο</u>)

$$0 = \int_0^1 u_t(u_{xx} - 2sinx\ u_{xt} - cos^2x\ u_{tt} - cosx\ u_t)dx =$$

$$= \int_0^1 u_tu_{xx}dx - 2\int_0^1 sinxu_tu_{xt}dx - \int_0^1 cos^2xu_tu_{tt}dx - \int_0^1 cosx\ u_t^2dx$$

καταρχάς

$$-\int_0^1 cosx\ u_t^2dx = -\int_0^1 u_t^2(sinx)_xdx = -(sinx\ u_t^2)_0^1 + \int_0^1 sinx(u_t^2)_xdx =$$

$$= 0 + \int_0^1 2sinx\ u_t u_{xt} dx \Rightarrow -2\int_0^1 sinx\ u_t u_{xt} dx - \int_0^1 cosx u_t^2 dx = 0$$

άρα

$$0 = \int_0^1 u_t u_{xx} dx - \int_0^1 cos^2 x u_t u_{tt} dx = (u_t u_x)_0^1 - \int_0^1 u_x u_{xt} dx - \int_0^1 cos^2 x \frac{\partial}{\partial t}(\frac{u_t^2}{2} dx =$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{u_x^2}{2} + cos^2 x \frac{u_t^2}{2} dx = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \left(\frac{u_x^2}{2} + cos^2 x \frac{u_t^2}{2}\right) dx$$

οπότε

$$E(t) = \int_0^1 \left(\frac{u_x^2}{2} + cos^2 x \frac{u_t^2}{2}\right) dx$$

$$E'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{u_x^2}{2} + cos^2 x \frac{u_t^2}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(u_x u_{xt} + cos^2 x u_t u_{tt}\right) dx =$$

$$= u_x u_t|_0^1 - \int_0^1 u_t u_{xx} dx + \int_0^1 cos^2 x u_t u_{tt} dx = 0 - \int_0^1 u_t u_{xx} dx + \int_0^1 cos^2 x u_t u_{tt} dx =$$

$$= -\int_0^1 u_t(2sinx u_{xt} + cos^2 x u_{tt} + cosx u_t) dx + \int_0^1 cos^2 x u_t u_{xx} dx =$$

$$= -\int_0^1 2sinx u_t u_{xt} dx - \int_0^1 cosx u_t^2 dx - \int_0^1 cos^2 x u_t u_{tt} dx + \int_0^1 cos^2 x u_t u_{tt} dx =$$

$$= -\int_0^1 2sinx\ u_t u_{xt} dx - \int_0^1 cosx u_t^2 dx = 0$$

άρα $E'(t) = 0$ για $t > 0$ και $E(0) = 0$ οπότε

$$0 \leq E(t) = E(0) = 0\ ,\ \ \forall t \geq 0 \Rightarrow\ E(t) = 0$$

επίσης

$$w_x(x,t) = 0\ \ \&\ \ w_t(x,t) = 0$$

άρα απο Θ.Μ.Τ. $\exists \xi \in (0,t)$ για την w τ.ω.

$$w(x,t) - w(x,0) = (t-0)u_t(x,\xi) = 0 \Rightarrow w(x,t) = w(x,0) \Rightarrow w(x,t) = 0 \Rightarrow w \equiv 0 \Rightarrow$$

$$u_1 = u_2$$

άτοπο

Φυλλάδιο 7ο

05-05-2015

1) Δίνεται η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \{ {}^{-\frac{\pi+x}{2},\ -\pi \le x \le 0}_{\frac{\pi-x}{2},\ 0<x\le\pi}$$

α)Να βρεθεί η σειρα $Fourier$ της f
β)Σε ποιά συνάρτηση συγκλίνει η σειρά $Fourier$ της f ;

Λύση : α)

Η f έχει σειρα $Fourier$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx + b_k sinkx)$$

όπου a_k, b_k οι συντελεστές $Fourier$ με $k \in \mathbf{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskx\ dx\ ,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkx\ dx\ ,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

οπότε

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)coskx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)coskx\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi+x}{2}coskx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi-x}{2}coskx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi+x}{2}coskx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi-x}{2}coskx\ dx$$

Θέτουμε $u = -x \Rightarrow\ du = -dx$ και $\ x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0\ \ ,\ \ x_2 = -\pi \Rightarrow u_2 = \pi$

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi-u}{2}cosku\ du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi-x}{2}coskx\ dx = 0$$

$$b_k = a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)sinkx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sinkx\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi+x}{2}sinkx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi-x}{2}sinkx\ dx =$$

κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u=-x$ δηλαδή $sink(-u)=sin(-ku)=-sinku$

$$b_k=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-u}{2}-sinku\;du+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}sinkx\;dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}sinkx\;dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)sinkx\;dx=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)(coskx)'\;dx=-\frac{1}{k\pi}(\pi coskx-xcoskx)_0^{\pi}+\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}coskx(\pi-x)'dx=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}(0-\pi)_0^{\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}coskx\;dx=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2\pi}\int_0^{\pi}(sinkx)'dx=$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2\pi}(sinkx)_0^{\pi}=\frac{1}{k}$$

επομένως

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sinkx$$

β)Η f είναι συνεχής στα $(-\pi,0)$, $(0,\pi)$ και ασυνεχής στο $x=0$ άρα

Για $x\in(-\pi,0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sinkx=f(x)=-\frac{\pi+x}{2}$$

Για $x\in(0,\pi)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sinkx=f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

Για $x=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sink(\pm\pi)=0$$

2)Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{(\pi-x)^2}{4}\quad,\quad 0\le x\le 2\pi$$

α)Να βρεθεί η σειρα $Fourier$ της f

β)Σε βρείτε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Λύση : α)

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ και $f(0) = f(2\pi) = \frac{\pi^2}{4}$
Η f έχει σειρα $Fourier$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k coskx + b_k sinkx)$$

όπου a_k, b_k οι συντελεστές $Fourier$ με $k \in \mathbf{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) coskx \, dx \ , \ \ k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) sinkx \, dx \ , \ \ k = 0, 1, 2, ...$$

οπότε

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^3}{3} dx = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(x-\pi)^3}{3} \right)_0^{2\pi} = ... = \frac{\pi^2}{6}$$

Για κάθε $k \in \mathbf{N}$

$$a_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 coskx \, dx = \frac{1}{4k\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 (sinkx)' \, dx =$$

$$= \frac{1}{4k\pi} \left((x-\pi)^2 (sinkx) \right)_0^{2\pi} - \frac{1}{4k\pi} \int_0^{2\pi} \left((x-\pi)^2 \right)' (sinkx) \, dx =$$

$$0 - \frac{1}{4k\pi} \int_0^{2\pi} 2(x-\pi)(sinkx) \, dx = -\frac{1}{2k^2\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)(coskx)' \, dx =$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi} \left((x-\pi)(coskx) \right)_0^{2\pi} - \frac{1}{2k^2\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)'(coskx) =$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi}(\pi + \pi) - 0 = \frac{1}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) sinkx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} sinkx \, dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2 sinkx\, dx = -\frac{1}{4k\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2(coskx)'\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4k\pi}(\pi^2-\pi^2)+\frac{1}{4k\pi}\int_0^{2\pi}\left((x-\pi)^2\right)' coskx\, dx = 0+\frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)coskx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)(sinkx)'\, dx = \frac{1}{2k^2\pi}\left((x-\pi)sinkx\right)_0^{2\pi} - \frac{1}{2k^2\pi}\int_0^{2\pi} sinkx(x-\pi)'\, dx =$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi}(0-0) - \frac{1}{2k^2\pi}\int_0^{2\pi} sinkx\, dx = 0$$

Επομένως η σειρά $Fourier$ της f είναι

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}coskx$$

β) Επειδή η σειρά $Fourier$ της f συγκλίνει(και μάλιστα ομοιόμορφα) στο $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}coskx = \frac{(x-\pi)^2}{4}$$

Για $x = 0$ προκύπτει

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Για $x = \pi$

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}cosk\pi = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}cosk\pi = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

αφού

$$cosk\pi = \{^{1,\ k=2n}_{-1,\ k=2n+1} = \ (-1)^k$$

3)΄Εστω $f \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση της οποίας η σειρά $Fourier$ είναι

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx + b_k sinkx)$$

Βρείτε τη σειρά $Fourier$ της f''(με χρήση των συντελεστών της σειράς $Fourier$ της f)

Λύση :

Καταρχάς θα δείξουμε ότι αφού η f είναι 2π περιοδική και οι f', f'' είναι 2π περιοδικές

Έστω $x_0 \in \mathbf{R}$ τότε

$$f'(x_0+2\pi) = lim_{x\to x_0+2\pi}\frac{f(x)-f(x_0+2\pi)}{x-(x_0+2\pi)}$$

με αλλαγή μεταβλητής $u = x - 2\pi$ άρα αν $x \to x_0 + 2\pi$ τότε $u \to x_0$ δηλαδή

$$f'(x_0+2\pi) = lim_{x\to x_0+2\pi}\frac{f(x)-f(x_0+2\pi)}{x-(x_0+2\pi} =$$

$$lim_{u\to x_0}\frac{f(u+2\pi)-f(x_0+2\pi)}{u-x_0} = lim_{u\to x_0}\frac{f(u)-f(x_0)}{u-(x_0} = f'(x_0)$$

αφού η f 2π περιοδική ,δηλαδή $f(x+2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.Όμοια για την f''
Η f έχει σειρά $Fourier$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx + b_k sinkx)$$

με συντελεστές $Fourier$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)coskx\ dx\ ,\ \ k = 0,1,2,.....$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinkx\ dx\ ,\ \ k = 1,2,.....$$

τότε επειδή η f παραγωγίζεται

$$f' \sim \frac{a_0(f')}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f')coskx + b_k(f')sinkx)$$

με συντελεστές $Fourier$

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)coskx\ dx\ ,\ \ k = 0,1,2,.....$$

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)sinkx\ dx\ ,\ \ k = 1,2,.....$$

τότε

$$a_0(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\ dx = \frac{1}{\pi}f(x)|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(\ f(2\pi) - f(0)\ ) = 0$$

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)coskx\, dx = \frac{1}{\pi}(f(x)coskx)_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(coskx)'\, dx =$$

$$= 0 + k\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinkx\, dx = kb_k(f)\ ,\ \ k = 1, 2, ...$$

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)sinkx\, dx = \frac{1}{\pi}(f(x)sinkx)_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(sinkx)'\, dx =$$

$$= -k\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)coskx\, dx = -ka_k(f)$$

άρα

$$b_k(f') = -ka_k(f)\ ,\ \ k = 1, 2, 3, ...$$

άρα η σειρά $Fourier$ της f' είναι

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k(f)coskx - ka_k(f)sinkx)$$

άρα η σειρά $Fourier$ της f'' είναι

$$f'' \sim \frac{a_0(f'')}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f'')coskx + b_k(f'')sinkx)$$

με συντελεστές $Fourier$

$$a_k(f'') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f''(x)coskx\, dx\ ,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k(f'') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f''(x)sinkx\, dx\ ,\ \ k = 1, 2, ...$$

τότε ομοίως με πριν

$$a_0(f'') = 0\ \ ,\ \ a_k(f'') = kb_k(f')\ \ ,\ \ b_k(f'') = -ka_k(f')$$

οπότε

$$a_k(f'') = -k^2a_k(f)\ \ ,\ \ b_k(f'') = -k^2b_k(f)$$

άρα τελικά η σειρά $Fourier$ της f'' είναι

$$f'' \sim -\sum_{k=1}^{\infty} k^2a_k(f)coskx + k^2b_k(f)sinkx)\ ,\ \ k = 1, 2, ...$$

4)Έστω $f \in [0,\pi]$ είναι $\mathbf{C}^\infty$ είναι συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 0 = f(\pi)$ Με χρήση της ταυτότητας *Parseval* αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx \le \int_0^\pi \left(f'(x)\right)^2\,dx$$

Λύση :

Η f έχει σειρά *Fourier*

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k sinkx$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) sinkx\,dx\ ,\ \ k = 1, 2, ...$$

Επειδή το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων

$$sinkx\ ,\ \ k = 1, 2, ...$$

είναι πλήρες, οπότε ταυτότητα *Parseval* ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \int_0^\pi sin^2kx\,dx = \int_0^\pi f^2(x)\,dx$$

όπου

$$\int_0^\pi sin^2kx\,dx = \int_0^\pi \frac{1 - cos2kx}{2}\,dx = \int_0^\pi \frac{dx}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi cos2kx\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k\pi}\int_0^\pi (sin2kx)'dx = \frac{\pi}{2}\ ,\ \ k = 1, 2, ...$$

Επομένως η *Parseval* γίνεται

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi f^2(x)\,dx$$

όμως Η f' έχει σειρά *Fourier*

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k' coskx$$

όπου

$$b'_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)coskxdx \ , \quad k = 1, 2, ...$$

επομένως ισχύει η ανισότητα $Bessel$ άρα (το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων δεν είναι πλήρες)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b'_k)^2\int_0^{\pi} cos^2kx \ dx \leq \int_0^{\pi}(f'(x))^2dx$$

όπου

$$\int_0^{\pi} cos^2kx \ dx = \int_0^{\pi}\frac{1+cos2kx}{2}dx = \int_0^{\pi}\frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos2kx \ dx = \frac{\pi}{2} \ , \quad k = 1, 2, ...$$

Επομένως

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b'_k)^2\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi}(f'(x))^2 \ dx$$

άρα

$$b'_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)coskx \ dx = \frac{2}{\pi}(-f(\pi) - f(0)) + \frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinkx \ dx = kb_k$$

δηλαδή $b'_k = kb_k$ διότι $f(0) = f(\pi) = 0$
Επομένως η $Bessel$ γίνεται

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2b_k^2\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi}(f'(x))^2 \ dx$$

για τους $b_k^2 \geq 0 \ , \quad k \in \mathbf{N}$ ισχύει

$$0 \leq b_k^2 \leq k^2b_k^2 \ , \quad \forall k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow 0 \leq b_k^2\frac{\pi}{2} \leq k^2b_k^2\frac{\pi}{2} \ , \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

και αφού οι σειρές αυτές συγκλίνουν προκύπτει ότι

$$\int_0^{\pi} f^2(x) \ dx \leq \int_0^{\pi}(f'(x))^2 \ dx$$

<u>Φυλλάδιο 8ο</u>

12-05-2015

1)Έστω Ω φραγμένο χωρίο.Με χρήση της Αρχής του Μεγίστου αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβληματος

$$-\Delta u(x) = \ f(x) \ , \ \ x \in \Omega$$

$$u(x) = g(x) \ , \ \ x \in \partial\Omega$$

Λύση :

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις τότε η $w(x) = u_1 - u_2$, $X = (x, y) \in \Omega$ θα λύνει το πρόβλημα

$$-\Delta w(X) = 0 \ , \ \ X \in \Omega$$

$$w(X) = 0 \ , \ \ X \in \partial\Omega$$

πράγματι

$$-\Delta w(X) = -w_{xx}(x,y) - w_{yy}(x,y) = -(u_1(x,y) - u_2(x,y))_{xx} - (u_1(x,y) - u_2(x,y))_{yy} =$$

$$= -u_{1,xx}(x,y) + u_{2,xx}(x,y) - u_{1,yy}(x,y) + u_{2,yy}(x,y) = -\Delta u_1(X) + \Delta u_2(X) = f(x) - f(x) = 0$$

επειδή ικανοποιείται το $-\Delta w \leq 0 \Rightarrow \ \Delta w \geq 0$ και Ω φραγμένο χωρίο από υπόθεση,ισχύει η αρχή μεγίστου άρα

$$max_{\overline{\Omega}} \, w(X) = max_{\partial\Omega} \, w(X) \Rightarrow max_{\overline{\Omega}} \, w(X) = 0, \Rightarrow w(X) \leq 0 \ , \ \ x \in \overline{\Omega} \ \ (1)$$

επίσης ικανοποιείται και ότι $-\Delta w \geq 0 \Rightarrow \ \Delta w \leq 0$ και Ω φραγμένο χωρίο άρα από αρχή ελαχίστου ισχύει ότι

$$min_{\overline{\Omega}} \, w(X) = min_{\partial\Omega} w(X) \Rightarrow min_{\overline{\Omega}} \, w(X) = 0, \Rightarrow w(X) \geq 0 \ , \ \ X \in \overline{\Omega} \ \ (2)$$

τότε όμως απο $(1), (2) \Rightarrow$

$$w(X) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \ , \ \ x \in \overline{\Omega}$$

άτοπο αφού υποθέσαμε ότι οι λύσεις είναι διακεκριμένες .

2)Έστω Ω φραγμένο χωρίο.Με χρήση της Αρχής του Μεγίστου αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβληματος

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \ , \ \ x \in \Omega, \ t > 0$$

$$u(x,t) = h(x,t)\ ,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0$$
$$u(x,0) = g(x)\ ,\ \ x \in \Omega$$

Λύση :

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις τότε η $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ θα λύνει το πρόβλημα

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = 0\ ,\ \ x \in \Omega,\ t > 0$$
$$w(x,t) = 0\ ,\ \ x \in \partial\Omega\ ,\ t > 0$$
$$w(x,0) = 0\ ,\ \ x \in \Omega$$

Πράγματι

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = (u_1(x,t) - u_2(x,t))_t - (u_1(x,t) - u_2(x,t))_{xx} - (u_1(x,t) - u_2(x,t))_{yy} =$$
$$= (u_{1,t}(x,t) - u_{1,xx}(x,t) - u_{1,yy}(x,t)) - (u_{2,t}(x,t) - u_{2,xx}(x,t) - u_{2,yy}(x,t)) =$$
$$(u_{1,t}(x,t) - \Delta u_1(x,t)) - (u_{2,t}(x,t) - \Delta u_2(x,t)) = f(x,t) - f(x,t) = 0$$

Για κάθε $T > 0$ αυθαίρετο θεωρούμε $g_1, g_2 : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbf{R}$ τ.ω.

$$g_1(x,t) = 0 \quad \& \quad g_2(x,t) = 0$$

άρα για κάθε $x \in \Omega,\ t > 0$

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = 0 \Rightarrow w_t(x,t) - \Delta w(x,t) - g_1(x,t)w_x(x,t) - g_2(x,t)w_y(x,t) = 0 \Rightarrow$$
$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) - g_1(x,t)w_x(x,t) - g_2(x,t)w_y(x,t) \le 0$$

επομένως για το παραβολικό χωρίο $\partial\Omega_T = \overline{\Omega} \times t = 0 \cup \partial\Omega \cup [0,T]$ ισχύει η αρχή του μεγίστου δηλαδή

$$max_{x\in\overline{\Omega},t\in[0,T]}\ w(x,t) = max_{(x,t)\in\partial\Omega_T}\ w(x,t) \Rightarrow max_{x\in\overline{\Omega},t\in[0,T]}\ w(x,t) = 0$$
$$\Rightarrow w(x,t) \le 0\ ,\ \ x \in \Omega,\ t \ge 0\ \ (1)$$

επίσης ικανοποιείται και ότι

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) - g_1(x,t)w_x(x,t) - g_2(x,t)w_y(x,t) \ge 0$$

και για το ίδιο παραβολικό σύνορο ισχύει η αρχή του ελαχίστου

$$min_{x\in\overline{\Omega},t\in[0,T]}\ w(x,t) = min_{(x,t)\in\partial\Omega_T}\ w(x,t) \Rightarrow min_{x\in\overline{\Omega},t\in[0,T]}\ w(x,t) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w(x,t) \ge 0\ ,\ \ x \in \Omega,\ t \ge 0\ \ (2)$$

τότε όμως απο $(1),(2) \Rightarrow$

$$w(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \ , \ \ x \in \overline{\Omega} \ , t \geq 0$$

άτοπο αφού υποθέσαμε ότι οι λύσεις είναι διακεκριμένες .

3)Έστω Ω φραγμένο χωρίο.Έστω επίσης u_1 είναι λύση του προβλήματος

$$-\Delta u_1(x) = f(x) \ , \ \ x \in \Omega$$

$$u_1(x) = g_1(x), \ \ x \in \partial\Omega$$

Με χρήση της Αρχής Μεγίστου αποδείξτε ότι

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|, \ \ x \in \Omega$$

Λύση :

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)| \Leftrightarrow$$

$$-max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)| \leq u_1 - u_2 \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|$$

Η συνάρτηση $w = u_1 - u_2$ είναι λύση της

$$-\Delta w(x) = 0 \ , \ \ x \in \Omega$$

$$w(x) = g_1 - g_2 \ , \ \ x \in \partial\Omega$$

αφού ικανοποιείται το $\Delta w(x) \geq 0$ και Ω φραγμένο από αρχή μεγίστου

$$max_{x \in \overline{\Omega}} \, w(x) = max_{x \in \partial\overline{\Omega}} \, w(x) = max_{x \in \partial\overline{\Omega}} \, (g_1 - g_2) \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|$$

δηλαδή

$$u_1(x) - u_2(x) \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|$$

Επίσης αφού

$$u_1(x) - u_2(x) \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)| \Rightarrow -max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)| \leq u_1(x) - u_2(x)$$

άρα

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq max_{x \in \partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|, \ \ x \in \Omega$$

4)Έστω $B_1 = x \in \mathbf{R}^2, |x| < 1$.Με χρήση της Αρχής του Μεγίστου αποδείξτε ότι η λύση του προβλήματος

$$-\Delta u(x) = f(x)\ , \ \ x \in B_1$$
$$u(x) = 0\ , \ \ x \in \partial B_1$$

ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|u(x)| \leq \frac{1}{4} max_{x\in\overline{B_1}}|f(x)|\ , \ \ x \in B_1$$

Λύση :

$$|u(X)| \leq \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)| \Leftrightarrow -\frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)| \leq u(X) \leq \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|$$

Θ.Δ.Ο. $u(X) \leq \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|$ οπότε

$$-\Delta u(X) = f(X) \leq max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)| \Rightarrow$$

$$-\Delta u(X) \leq max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)| \Leftrightarrow -\Delta u(X) \leq \Delta\left(\frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|(x^2+y^2)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(u(X) + \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|(x^2+y^2)\right) \geq 0$$

άρα από την αρχή μεγίστου ισχύει ότι

$$max_{(x,y)\in\overline{B_1}}\ \ \left(u(X) + \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|(x^2+y^2)\right)$$

$$= max_{(x,y)\in\partial B_1}\ \ \left(u(X) + \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|(x^2+y^2)\right)$$

$$= \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|$$

οπότε $\forall X = (x,y) \in \overline{B_1}$:

$$u(x,y) + \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|(x^2+y^2) \leq \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)| \Rightarrow u(X) \leq \frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)|$$

Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι

$$-\frac{1}{4} max_{X\in\overline{B_1}}|f(X)| \leq u(X)$$