19/02/2015

1ο μάθημα

(Γραμμική Θεωρία)

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Εισαγωγή

$F(f(t), t, f'(t), \dots, f^{(k)}(t)) = 0$ → συνήθης διαφορική εξίσωση

Συνήθεις : η φυσική των υλικών σημείων

Το πιο απλό παράδειγμα συνήθων διαφορικών εξισώσεων : Νόμος του Νεύτωνα

$F = m \cdot \vec{a}$

$F = m \cdot x''(t)$

$x(t)$: διάνυσμα θέσης

$x'(t)$: ταχύτητα

$x''(t)$: επιτάχυνση

Μερικές Παράγωγοι

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ ή } f_x(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$ → μερική παράγωγος ως προς x

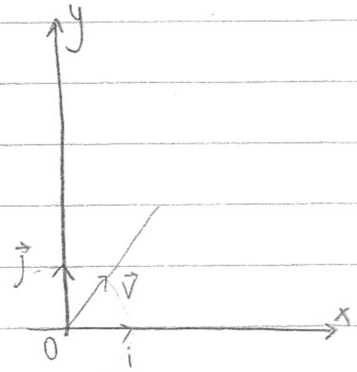
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \text{ ή } f_y(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$ → μερική παράγωγος ως προς y

- $X = (x,y)$

$$\left.\frac{d f(X + t\vec{v})}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(X + t\vec{v}) - f(X)}{t}$$ → παράγωγος της f στο σημείο X στην κατεύθυνση $\vec{v}$

συμβολισμός: $\frac{\partial f(X)}{\partial \vec{v}} = \nabla f(X) \cdot \vec{v}$

$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$



Ερώτημα

Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x;

(και είναι ίσο με μηδέν)

Αν υπάρχει το $\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y) - \nabla f(x)(x-y)}{\|x-y\|} = 0$

Αντίστοιχο ερώτημα

(συναρτήσεις μιας μεταβλητής)

$f'(t) = g(t)$

Αν $g \in C(\mathbb{R})$: $\boxed{f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds}$

1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

Αν g Riemann ολοκληρώσιμη ($g \in R[a,b]$) και φραγμένη:

$G(x) = \int_a^x g(\xi)d\xi$

$f \in D^1(\mathbb{R}) \to$ 1 φορά παραγωγίσιμη

$f \in C^1(\mathbb{R})$ → συνεχής

(i) Είναι Lipschitz συνεχής (σχεδόν παντού παραγωγίσιμη)

↓

$|g(x)| \leq M \Rightarrow |G(x) - G(y)| \leq k|x-y|$

(ii) Αν η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε G είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $G'(x_0) = g(x_0)$

2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

Αν η $f : [a,b]$ παραγωγίσιμη και η f' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)ds}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

① Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ως προς x και συνεχής στην f

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)=0 \quad \to \text{διαφορική εξίσωση}$$

$$(\text{ή } f(x,y)=f(x_0,y))$$

Περιγράψτε τις f

(Θα αποδείξουμε ότι $f(x,y)=g(y)=f(0,y)\overset{(\text{ή})}{=}f(1,y)$ $\left(\begin{array}{l}\text{x οποιοδήποτε, κάτι σταθερό} \\ \text{το y μεταβάλλεται}\end{array}\right)$

Απάντηση:

Θα δείξουμε ότι $f(x,y)=f(0,y)$, $\forall x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$

Στην f σταθεροποιούμε την μεταβλητή y και τη βλέπουμε ως συνάρτηση της πρώτης μεταβλητής.

Τότε, στο διάστημα $[x,0]$ εφαρμόζω το ΘΜΤ, οπότε $\exists\, \underset{\in (x,0)}{\xi=\xi(x)}$ (που εξαρτάται από το x),

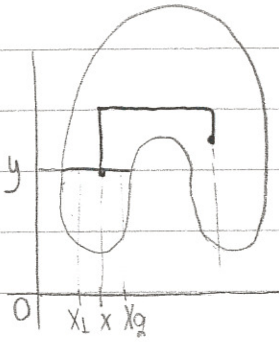
τέτοιο ώστε $f(x,y)-f(0,y)=(x,0)\overset{0}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)}}=0 \Rightarrow \boxed{f(x,y)=f(0,y)}$

② Ω ανοιχτό και συνεκτικό

Έστω τώρα $f:\Omega\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ως προς x και συνεχής στο $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{κλειστότητα του } \Omega}}{\bar{\Omega}}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)=0$$

Περιγράψτε τις f



③ Ω ανοιχτό και συνεκτικό $\subseteq\mathbb{R}^2$

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\exists\ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ και να ικανοποιούν $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ και η f συνεχής στο $\bar{\Omega}$. Τότε αν $(x_0,y_0)\in\Omega$, θα ισχύει $f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Άσκηση

Βρείτε όλες τις C^1 συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ώστε $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

Λύση:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y = \frac{\partial}{\partial x}(xy), \text{ τότε } \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{f(x,y) - xy}_{\text{δεν εξαρτάται από το } x}\Big) = 0$$

και, επομένως, $f(x,y) - xy = f(0,y) - 0y = g(y)$

$\Rightarrow f(x,y) = xy + g(y)$, επειδή f παραγωγίσιμη ως προς y και η xy είναι, επίσης παραγωγίσιμη προκύπτει ότι και η g είναι παραγωγίσιμη.

Τότε, $\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)}_{= x} = x + g'(y)$

Άρα, πρέπει $x + g'(y) = x \Rightarrow g'(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow g(y) = g(0) = c$ και, επομένως,

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ ώστε $\boxed{f(x,y) = xy + c \quad x,y \in \mathbb{R}}$

17/02/2015

9º μάθημα

Μ.Δ.Ε.

ΠΕΙΡΑΜΑ	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ
Ντετερμινιστική Αρχή	Θεμελιώδεις Αρχές
Η επανάληψη του πειράματος κάτω από τις "ίδιες" συνθήκες, δίνει το <u>ίδιο</u> αποτέλεσμα	Καλή τοποθέτηση του προβλήματος (Αρχή του Hadamard)

- Μονοσήμαντη λύση
- Υπαρξη λύσης
- Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τις παραμέτρους του προβλήματος

ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1η κατηγορία "

$x \in (0,\ell)$, $t>0$

(*) $u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t)$ (Εξίσωση θερμότητας) <u>Παραβολική Εξίσωση</u> ← μαθηματική ορολογία

(μεταβολή της θερμοκρασίας τη χρονική στιγμή t)

$u(x,t)$ ← θερμοκρασία της ράβδου, στη θέση x $(0 \le x \le \ell)$, τη χρονική στιγμή t.

Έστω $u(0,t) = h_1(t)$, $u(\ell,t) = h_2(t)$ (συνοριακές συνθήκες)

Dirichlet συνοριακές συνθήκες

$-u_x(0,t) = g_1(t)$, $u_x(\ell,t) = g_2(t)$ → Neumann συνοριακές συνθήκες

$u(0,t) - a\, u_x(0,t) = k_1(t)$, $u(\ell,t) + b\, u_x(\ell,t) = k_2(t)$ → Robin συνοριακές συνθήκες

$a, b \ge 0$

Συνοριακές Συνθήκες

Αρχικές Συνθήκες : $u(x,0) = g(x)$, $0 \le x \le \ell$

$u_t = k^2 \Delta u(x,t)$ → εξίσωση θερμότητας ενός σώματος σε 2 διαστάσεις, $\Omega \times (0,\infty)$

$x=(x,y)$ $\qquad x \in \Omega,\ t>0$

$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$ → συντελεστής Laplace

Συνοριακές Συνθήκες : $u(x,t) = h_1(x,t)$, $x \in \partial\Omega$ $\qquad t>0$

↓ σύνορο του Ω

Αρχικές Συνθήκες : $u(x,0) = g(x)$, $x \in \Omega$

⊛ Τι λέμε (κλασική) λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα; (Αν είχαμε Dirichlet συνοριακές συνθήκες)

Θα πρέπει $u \in D^{2,1}((0,\ell)\times(0,+\infty))$ και να ικανοποιείται η εξίσωση, δηλαδή:

$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t)$, $0<x<\ell$, $t>0$

Επίσης, θα πρέπει $u \in C([0,\ell]\times(0,+\infty)) \cap C([0,\ell]\times[0,+\infty))$

↓ συνεχής

⊛. (Αν είχαμε Neumann συνοριακές συνθήκες)

$u \in C^{1,0}([0,\ell]\times(0,+\infty))$

$u \in C([0,\ell]\times[0,+\infty))$

2η κατηγορία:

$u_{tt}(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t)$, $x \in (0,\ell)$ (Κυματική Εξίσωση) Υπερβολική Εξίσωση ← μαθηματική ορολογία

Έστω ότι έχουμε Dirichlet συνοριακές συνθήκες:

$u(0,t) = h_1(t)$, $u(\ell,t) = h_2(t)$

Αρχικές Συνθήκες: $u(x,0) = g_1(x)$, $u_t(x,0) = g_2(x)$

Για να έχουμε (κλασική) λύση, θα πρέπει:

$u \in D^{2,2}((0,\ell)\times(0,+\infty)) \cap C([0,\ell]\times(0,+\infty)) \cap C^{0,1}([0,\ell]\times[0,+\infty))$

3η Κατηγορία"

Εξίσωση Poisson

$-\Delta u(x)=f(x)$, $x\in \Omega$, $\Omega\subseteq \mathbb{R}^2$ (Αν $f=0$ τότε ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις)

$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$

$u(x)=h(x)$, $x\in\partial\Omega$ Ελλειπτική Εξίσωση ← Μαθηματική ορολογία

Για να έχουμε λύση,

θα πρέπει: $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$

ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω οι μεταβλητές t, x.

$F(t,x,u(x,t),u_t(x,t),u_x(x,t))=0$ ← Γενική μορφή διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης

Παράδειγμα 1

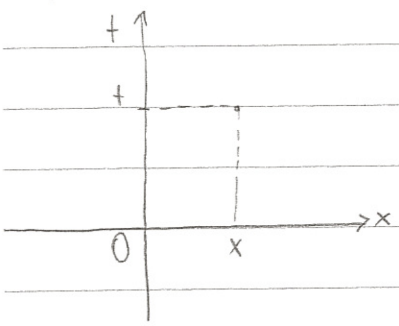
Πιο "απλή" πρώτης τάξης.

$u_t(x,t)=0$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ Για να έχω λύση: $\exists\, u$ με $u\in D^{0,1}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$

Αρχικές → $u(x,0)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

Συνθήκες"

Χωρίο επίλυσης

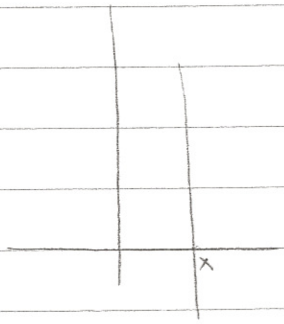


ΘΜΤ

$\exists\, \xi\in(0,t)$ ώστε

$u(x,t)-\overset{f(x)}{u(x,0)}=(t-0)\,u_t(x,\xi)=0$

$\boxed{u(x,t)=f(x),\ x\in\mathbb{R},\ t\geq 0}$



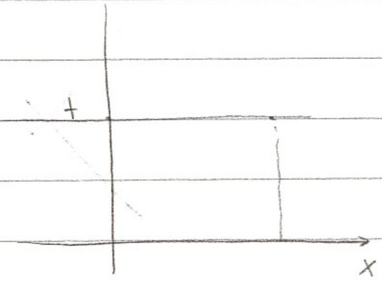
19/02/2015

3ο μάθημα

Μ.Δ.Ε

Παράδειγμα 2

$0 = u_x(x,t) \quad x,t\in\mathbb{R}$



Λύση:

Για να έχω λύση, θα πρέπει $u \in D^{1,0}(\mathbb{R}^2)$.

$x\neq 0$, $\exists \xi$ διάστημα $x,0$.

$$u(x,t)-u(0,t) = (x-0)\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t) = 0 \Rightarrow \boxed{u(x,t)=f(t) \quad ,x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}}$$

Παράδειγμα 3

$$u_t(x,t) = u_x(x,t) \ (*) \quad ,x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0)=f(x) \quad ,x\in\mathbb{R}$$

Λύση: 1ος τρόπος

Για να έχω λύση θα πρέπει $u\in D^{1,1}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ και να ικανοποιούνται οι εξισώσεις.

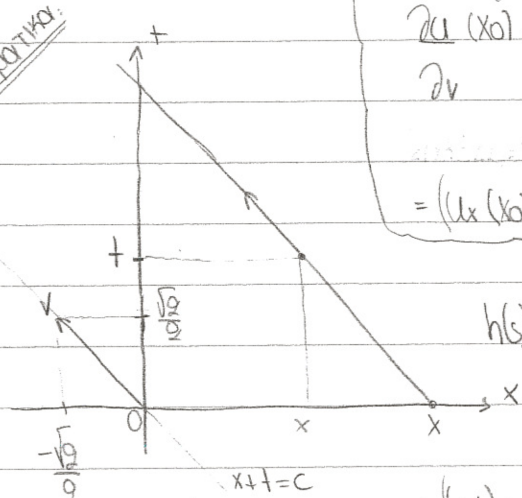
$$u_t(x,t)-u_x(x,t)=0$$
$$(u_x(x,t),u_y(x,t))\cdot\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=0$$
$$\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}}u(x,t)=0$$

"Υπενθύμιση" $\quad v=(a,b)$

Παράγωγος σε κατεύθυνση $\quad |v|=\sqrt{a^2+b^2}=1$

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) = \nabla u(x_0)\cdot v = \frac{d}{dt}u(x_0+tv)\Big|_{t=0}$$
$$= (u_x(x_0),u_y(x_0))\cdot(a,b) = au_x+bu_y$$

σχηματικά:



$$h(s)=u((x,t)+s\cdot v) \Rightarrow h'(s)=\nabla u((x,t)+sv)$$

Από ΘΜΤ: $\exists\xi$ διάστημα $0,s$:

$$h(s)-h(0)=(s-0)h'(\xi)$$
$$u((x,t)+sv)-u(x,t)=(s-0)\nabla_{(x,t)}u((x,t)+\xi v)v=0$$

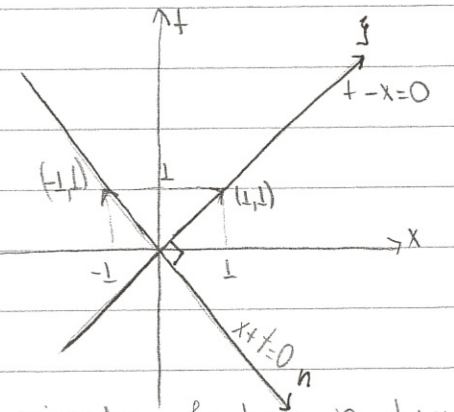
→

Άρα, $\exists\ \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \varphi(x+t)}$, για $t=0 \Rightarrow u(x,0) = \overset{f(x)}{\varphi(x)} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = f(x)}\ \forall x\in\mathbb{R}$

$u(x,t) = f(x+t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$

2ος τρόπος



Εισάγουμε το σύστημα $\xi = t - x$, $n = t + x$

Θέτω $u(x,t) = U(\xi,n)$

κανόνας Αλυσίδας: $u_t(x,t) = U_\xi(\xi,n)\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + U_n(\xi,n)\dfrac{\partial n}{\partial t} = U_\xi(\xi,n) + U_n(\xi,n)$

Αντίστοιχα,

$$u_x(x,t) = U_\xi \frac{\partial\xi}{\partial x} + U_n \frac{\partial n}{\partial x} = -U_\xi(\xi,n) + U_n(\xi,n)$$

Άρα, $u_t(x,t) - u_x(x,t) = 0 \Leftrightarrow U_\xi - U_n - (-U_\xi + U_n) = 0 \Leftrightarrow 2U_\xi(\xi,n) = 0 \Leftrightarrow U_\xi(\xi,n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow U(\xi,n) = \varphi(n) \Rightarrow u(x,t) = \varphi(t+x)$

Γυρίζουμε τώρα στο σύστημα των x,t

Για $t=0 \Rightarrow u(x,0) = \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

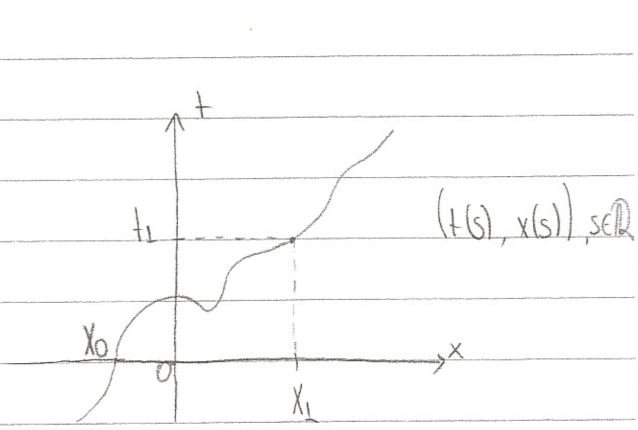
$\Rightarrow u(x,t) = f(x+t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$

3ος τρόπος! (καλύτερος)

(Μέθοδος της χαρακτηριστικής καμπύλης)

$u_t(x,t) - u_x(x,t) = 0$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$

$u(x,0) = f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ (*)



Λύση:

$(t(0), x(0)) = (0, x_0)$

Για να διέρχεται η καμπύλη από το σημείο (x_1, t_1), $\exists\ \bar{s}$: ώστε $(t(\bar{s}), x(\bar{s})) = (x_1, t_1)$ →

$\sigma(s) = u(x(s), t(s))$, $s \in \mathbb{R}$

$\sigma'(s) = u_x(x(s), t(s))\, x'(s) + u_t(x(s), t(s)) \cdot t'(s)$

Επιλέγουμε $x'(s) = -1$ $s \in \mathbb{R}$, $x(0) = x_0$
$t'(s) = 1$, $s \in \mathbb{R}$, $t(0) = 0$

Τότε , $\sigma'(s) = -u_x(x(s), t(s)) + u_t(x(s), t(s)) = 0$, $s \in \mathbb{R}$
$\sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) \underset{\text{από την } (*)}{=} f(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(s) = -1 & , x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 & , t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = 0 & , \sigma(0) = f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x(s) + s)' = 0 & , x(0) = x_0 \\ (t(s) - s)' = 0 & , t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = 0 & , \sigma(0) = f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) + s = x(0) + 0 = x_0 \Leftrightarrow \boxed{x(s) = x_0 - s} \\ t(s) - s = t(0) - 0 = 0 \Leftrightarrow t(s) = s \\ \sigma(s) = \sigma(0) = f(x_0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $u(x_0 - s, s) = f(x_0)$

Έστω $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s, ώστε $(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x_1, t_1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_0 - \bar{s} = x_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 + t_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases}$$

Όμως επιλέγοντας $s = \bar{s}$ παίρνουμε $u(x_0 - \bar{s}, \bar{s}) = f(x_0) \Leftrightarrow u(x_1, t_1) = f(x_1 + t_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 > 0$

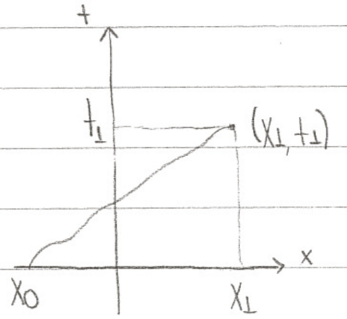
Με τον 3ο τρόπο λύνονται γενικά εξισώσεις της μορφής :
$a(x,t,u)\, u_x + b(x,t,u)\, u_t = \gamma(t,x,u)$

$\boxed{\text{Παράδειγμα 4}}$

Να λυθεί $u_t + 2x \cdot u_x = x + u \quad x \in \mathbb{R},\ t>0$

$u(x,0) = 1 + x^2 \quad , x \in \mathbb{R}$

Λύση:



Θα βρούμε καμπύλη $(x(s), t(s))$, $s \in \mathbb{R}$ ώστε $\sigma'(s) = \frac{d}{ds}\left(u(x(s), t(s))\right) =$

$$= u_x(x(s), t(s)) \cdot x'(s) + u_t(x(s), t(s)) \cdot t'(s)$$

$$\begin{cases} x'(s) = 2x(s) & , x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 & , t(0) = 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$\sigma'(s) = 2x \cdot u_x + u_t = x(s) + \sigma(s) \quad , \sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = 1 + x_0^2$$

$$\boxed{t(s) = s}$$

Πολλαπλασιάζουμε την $x'(s) - 2x(s) = 0$ με e^{-2s} :

$$e^{-2s} \cdot (x'(s) - 2x(s)) = 0 \iff \left(e^{-2s} \cdot x(s)\right)' = 0 \iff e^{-2s} x(s) = x(0) = x_0 \iff$$

$$x(s) = x \cdot e^{2s}$$

Οπότε:

$$\sigma'(s) = \sigma(s) + x_0 e^{2s} \iff e^{-s}\left(\sigma'(s) - \sigma(s)\right) = e^{-s} x_0 e^{2s} \iff \left(e^{-s}\sigma(s)\right)' = x_0 e^{s} \iff$$

$$\iff \left(e^{-s}\sigma(s) - x_0 e^{s}\right)' = 0$$

$$e^{-s}\sigma(s) - x_0 e^{s} = \sigma(0) - x_0 e^{0} \iff e^{-s}\sigma(s) - x_0 e^{s} = 1 + x_0^2 - x_0$$

$$e^{-s}\sigma(s) - x_0 e^{s} + 1 + x_0^2 - x_0$$

$$\sigma(s) = x_0 e^{2s} + (1 + x_0^2 - x_0) e^{s} \quad s \in \mathbb{R}$$

$t(s) = s$

$x(s) = x_0 e^{2s}$

$\sigma(s) = x_0 e^{2s} + (1 + x_0^2 - x_0) e^{s}$

Αν $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s, ώστε $(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x_1, t_1)$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} x_0 e^{2\bar{s}} = x_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 e^{-2t_1} \\ \bar{s} = t_1 \end{cases}$$

Οπότε για $s = \bar{s}$ έχουμε:

$$\sigma(\bar{s}) = u(x(s), t(s)) = u(x_1, t_1) = x_0 e^{2\bar{s}} + (1 + x_0^2 - x_0) e^{\bar{s}} = x_1^{-2t_1} e^{2t_1} + (1 + x_1^2 e^{-4t_1} - x_1 e^{-2t_1}) e^{t_1}$$

$$u(x_1, t_1) = x_1 e^{t_1} + x_1^2 e^{-3t_1} - x_1 e^{-t_1}$$

24/09/2015

4ο μάθημα

ΜΔΕ

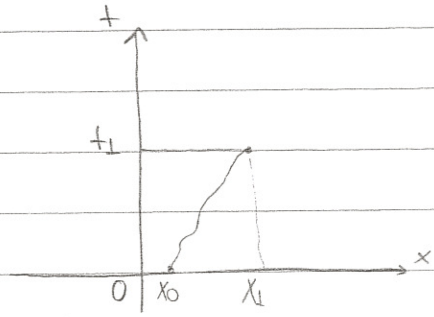
Λύση 1ης τάξης ΜΔΕ (3 τρόποι)

(1) Γεωμετρική Ερμηνεία
(2) Παράγωγος κατά κατεύθυνση
} → δουλεύει μόνο σε ευθείες
(3) Μέθοδος της χαρακτηριστικής καμπύλης.

Παράδειγμα

Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u(x,t)\,u_x(x,t) = -u(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = -\dfrac{x}{2}, & x\in\mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$



Λύση: (με τη μέθοδο χαρακτηριστικής καμπύλης).

Η καμπύλη $(x(s), t(s))$, $s\in\mathbb{R}$ προσδιορίζεται έτσι ώστε

$$\begin{cases} x'(s) = u(x(s),t(s)) \\ t'(s) = 1 \end{cases}$$

Τότε: $\left(u(x(s),t(s))\right)' = u\cdot u_x + u_t = -u(x(s),t(s))$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(u(x(s),t(s))\right) = u_x(x(s),t(s))\cdot x'(s) + u_t(x(s),t(s))\,t'(s)}$$

Κομμάτι των Παραγώγων της Διαφορικής Εξίσωσης

Θέτουμε $\sigma(s) = u(x(s),t(s))$, τότε πρέπει $\sigma'(s) = -\sigma(s)$

$$\begin{cases} x'(s) = \sigma(s), & x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1, & t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = -\sigma(s), & \sigma(0) = u(x(0),t(0)) = u(x_0,0) \overset{(2)}{=} -\dfrac{x_0}{2} \end{cases}$$

← σύστημα 3 διαφορικών εξισώσεων

$$\boxed{x(s) = \frac{x_0}{2}\left(1+e^{-s}\right)}$$

Οπότε:

$$\begin{cases} x'(s) \overset{(\text{από την } \circledast)}{=} -\dfrac{x_0}{2}e^{-s} \iff x'(s) + \dfrac{x_0}{2}e^{-s} = 0 \iff \left(x(s) - \dfrac{x_0}{2}e^{-s}\right)' = 0 \iff x(s) - \dfrac{x_0}{2}e^{-s} = x(0) - \dfrac{x_0}{2}e^{0} = x_0 - \dfrac{x_0}{2} = \dfrac{x_0}{2} \\ t(s) = s + t(0) = s \iff \boxed{t(s) = s}\ s\in\mathbb{R} \\ \sigma'(s) + \sigma(s) = 0 \overset{(\cdot e^s)}{\iff} \left(e^s\sigma(s)\right)' = 0 \iff e^s\sigma(s) = e^0\sigma(0) = -\dfrac{x_0}{2} \iff \boxed{\sigma(s) = -\dfrac{x_0}{2}e^{-s}} \ \circledast \quad s\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα, $u\left(\frac{x_0}{2}(1-e^{-s}), s\right) = -\frac{x_0}{2}e^{-s}$, $s\in\mathbb{R}$

Έστω $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s ώστε $(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x_1, t_1)$

Οπότε, $\begin{cases} \frac{x_0}{2}(1+e^{-\bar{s}}) = x_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2x_1}{1+e^{-t_1}} \\ \bar{s} = t_1 \end{cases}$

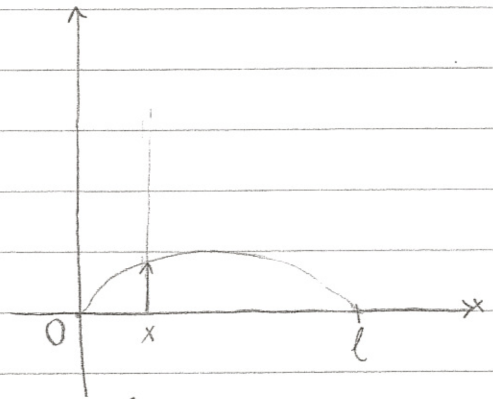
Άρα,

$$u\left(\frac{x_0}{2}(1+e^{-\bar{s}}), \bar{s}\right) = -\frac{x_0}{2}e^{-\bar{s}} \Leftrightarrow u(x_1,t_1) = -\frac{2x_1}{2(1+e^{-t_1})}e^{-t_1} = -\frac{x_1 e^{-t_1}}{1+e^{-t_1}}, \quad x_1\in\mathbb{R},\ t_1>0$$

«Λίγα στοιχεία μοντελοποίησης»

<u>Μοντελοποίηση</u> της παλλόμενης χορδής

Έστω χορδή μήκους ℓ. Στόχος μας είναι να περιγράψουμε την κίνηση της χορδής.



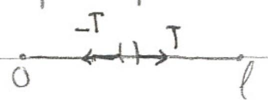
Έστω $u(x,t)$, $0<x<\ell$

↳ που βρίσκεται η χορδή στη θέση x, τη χρονική στιγμή t.

$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(\ell,t)=0 \end{array}\right\} \to$ Συνοριακές Συνθήκες

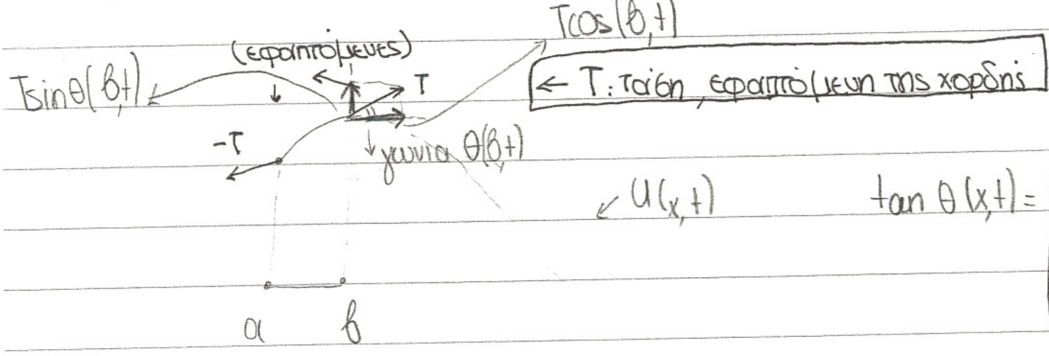
<u>Δυνάμεις</u>

- <u>Αντίσταση του αέρα</u>: αμελητέα (αφού δεν είναι σημαντική)
- <u>Βάρος</u>: πολύ μικρό, αφού δεν το λαμβάνουμε υπόψη.
- <u>Τάση T</u>



$$\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+u_x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+u_x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$1+\tan^2\theta = 1+u_x^2$$

Παίρνουμε ένα κομμάτι της χορδής και βάζω τις δυνάμεις:



$$\tan\theta(x,t) = u_x(x,t)$$

(ρυθμός μεταβολής ως προς τη χωρική μεταβλητή x)

$$T\sin\theta(b,t) - T\sin\theta(a,t)$$

↳ η δύναμη που ασκείται στο κομμάτι της χορδής

"Νόμος του Νεύτωνα": $F = m\cdot\gamma = \int_a^b \rho_0(x,t)\,dx = \int_a^b \rho_0\, dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_a^b u(x,t)\,dx =$

↓ πυκνότητα (παραμένει σταθερή ως προς t)

$$= \int_a^b u_{tt}(x,t)\,dx$$

Άρα, $T\sin\theta(b,t) - T\sin\theta(a,t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(T\sin(\theta(x,t))\right)dx$

$$\Rightarrow K\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\theta(x,t)\right) = u_{tt}(x,t) \iff u_{tt}(x,t) = K\frac{\partial}{\partial x}u_x$$

↓ σταθερά

$$u_{tt}(x,t) = k\,u_{xx}(x,t)$$

$$\cos\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}$$

$$\sin\theta(x,t) = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$$

10/03/2015

5º μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόβλημα Cauchy (της κυματικής εξίσωσης)

$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad , x\in\mathbb{R} \, , t>0$
$u(x,0) = f(x) \quad x\in\mathbb{R}$
$u_t(x,0) = g(x) \quad , x\in\mathbb{R}$

Γενική Δ. Εξίσωση 2 μεταβλητών γραμμική
$A(x,y)\,u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)\,u_{xy}(x,y) + \Gamma(x,y)u_{yy}(x,y) + \Delta u_x(x,y) + E u_y(x,y) + Z u(x,y) = 0$ ⊛
με $|A(x,y)| + |B(x,y)| + |\Gamma(x,y)| \neq 0$

Περιπτώσεις

I) $\underbrace{w_{xx} - w_{yy}}_{(\acute{\eta}\ w_{xy})} + \underbrace{\tilde{\Delta} w_x + \tilde{E} w_y + \tilde{Z} w}_{\text{Πρώτης τάξης όρους}} = 0$ → Εξίσωση κύματος (Υπερβολική Εξίσωση)

II) $w_{xx}(x,y) - w_y(x,y) +$ Πρώτης τάξης όρους ($\tilde{\Gamma} w_x + \tilde{\Delta} w$) → Εξίσωση θερμότητας (Παραβολική εξίσωση)

III) $w_{xx} + w_{yy}$ + Πρώτης τάξης όρους → Ελλειπτική Εξίσωση
(Αρμονικές συναρτήσεις: όταν $w_{xx} + w_{yy} = 0$)

Διακρίνουμε που αντιστοιχεί στην ⊛ : $\Delta = 4(B^2(x,y) - A(x,y)\Gamma(x,y))$ $\quad \Delta(x,y) > 0$ ⇒ Κανονική Μορφή (Υπερβολικού Τύπου)

$\Delta(x,y) = 0$ ⇒ Κανονική Μορφή (Παραβολικού Τύπου)
$\Delta(x,y) < 0$ ⇒ Κανονική Μορφή (Ελλειπτικού Τύπου)

$u(x,y) = U(\xi,\eta)$
$\left.\begin{array}{l}\xi = \xi(x,y)\\ \eta = \eta(x,y)\end{array}\right\}$ κατάλληλα επιλεγμένα

$u_x(x,y) = U_\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$

$u_y(x,y) = U_\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + U_\eta \dfrac{\partial \eta}{\partial y}$

$$\to u_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = U_\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + U_\eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial x}\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x,y) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 U_{\xi\xi} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} U_{\xi\eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 U_{\eta\eta} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} U_\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} U_\eta$$

$$\to u_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} U_\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} U_\eta + \frac{\partial \xi}{\partial x}\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + U_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial x}\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + U_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow u_{xy}(x,y) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} U_{\xi\xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)U_{\xi\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} U_{\eta\eta} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} U_\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} U_\eta$$

$$\to u_{yy}(x,y) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 U_{\xi\xi} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} U_{\xi\eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 U_{\eta\eta} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} U_\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} U_\eta$$

Άρα,

$\circledast \Leftrightarrow$

$$A(x,y)\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 U_{\xi\xi} + 2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial x}U_{\xi n} + \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 U_{nn}\right] + 2B(x,y)\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}U_{\xi\xi} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial n}{\partial x}\right)U_{\xi n}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial n}{\partial y}U_{nn}\right] +$$

$$+\Gamma(x,y)\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 U_{\xi\xi} + 2\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial n}{\partial y}U_{\xi n} + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 U_{nn}\right] + \Gamma(x,y)\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}U_\xi + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}U_n\right] + \text{Πρώτης τάξης}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \left[A(x,y)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \Gamma(x,y)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]U_{\xi\xi} + 2A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial x} + 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial n}{\partial x} + 2\Gamma\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial n}{\partial y}\right)\cdot U_{\xi n}$$

$$+\left(A(x,y)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + 2B(x,y)\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial y} + \Gamma(x,y)\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2\right)U_{nn} \quad + \text{Πρώτης τάξης}$$

Αν μπορούμε να βρούμε ξ, n ώστε:

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \Gamma\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow A\left(\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}}\right)^2 + 2B\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}} + \Gamma = 0$$

$\Delta(x,y) > 0$

$$\left.\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}} = p_1(x,y), \quad \frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial y}} = p_2(x,y)\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\xi}{\partial x} = p_1(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial y} \\[2ex] \frac{\partial n}{\partial x} = p_2(x,y)\frac{\partial n}{\partial y}\end{array}\right.$$

Πρόβλημα

Να βρεθεί η κανονική μορφή της Διαφορικής Εξίσωσης.

$$4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0$$

Λύση

$\Delta = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 3^2 = 0$

Η κανονική μορφή θα είναι παραβολική τύπου $(\Delta = 0)$

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

$u(x,y) = U(\xi,\eta)$

$u_x = \alpha U_\xi + \gamma U_\eta \Rightarrow u_{xx} = \alpha(\alpha U_{\xi\xi} + \gamma U_{\xi\eta}) + \gamma(\alpha U_{\eta\xi} + \gamma U_{\eta\eta}) = \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta}$

$u_y = \beta U_\xi + \delta U_\eta$

$u_{yy} = \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}$

$u_{xy} = \alpha(\beta U_{\xi\xi} + \delta U_{\xi\eta}) + \gamma(\beta U_{\eta\xi} + \delta U_{\eta\eta}) = \alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta + \beta\gamma)U_{\eta\xi} + \gamma\delta U$

Άρα: $4\alpha^2 U_{\xi\xi} + 8\alpha\gamma U_{\xi\eta} + 4\gamma^2 U_{\eta\eta} - 12(\alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha\delta+\beta\gamma)U_{\eta\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta}) + 9(\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2$

$+ \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0 \iff$

$\iff (4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2)U_{\xi\xi} + (8\alpha\gamma - 12(\alpha\delta+\beta\gamma) + 18\beta\delta)U_{\xi\eta} + (4\gamma^2 - 12\gamma\delta + 9\delta^2)U_{\eta\eta} +$

$+ \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0$

$\iff (2\alpha - 3\beta)^2 U_{\xi\xi} + \underbrace{2(4\alpha\gamma - 6(\alpha\delta + \beta\gamma) + 9\beta\delta)}_{=0\,(*)}U_{\xi\eta} + (2\gamma - 3\delta)^2 U_{\eta\eta} + \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0 \quad (1)$

$(=0$, επιλέξαμε $\alpha = \frac{3}{2}\beta)$

Επιλέγουμε:

$2\alpha - 3\beta = 0 \iff \boxed{\alpha = \frac{3}{2}\beta}$

- $2\left(4\cdot\frac{3}{2}\beta\gamma - 6\left(\frac{3}{2}\beta\delta + \beta\gamma\right) + 9\beta\delta\right) = 2(\cancel{6\beta\gamma} - 9\beta\delta + 9\beta\delta - \cancel{6\beta\gamma}) = 0 \quad (*)$

$$\begin{cases} \xi = \beta\frac{3}{2}x + \beta y = \beta\left(\frac{3}{2}x + y\right) \\ \eta = \gamma x + \delta y \quad \text{Επιλέγω } \delta = 0 \text{ άρα } \eta = \gamma x \end{cases}$$

Άρα, στην (1) έχουμε: $4\gamma^2 U_{\eta\eta} + \beta U_{\xi} = 0$

Επιλέγουμε $\beta = -4\gamma^2$
$(\gamma \neq 0)$

Άρα:

$U_{\eta\eta} - U_{\xi} = 0$ → κανονική μορφή της ΔΕ

$\xi = -6x - 4y$
$\eta = x$

$\left(\gamma = 1, \; \beta = -4, \; \alpha = -6 \right)$

Γυρίζουμε στο πρόβλημα Cauchy (θέλουμε να το λύσουμε):

$c \neq 0$

$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$

$\left.\begin{array}{ll} u(x,0) = f(x) & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & \end{array}\right\}$ αρχικές συνθήκες

"Υπερβολικού Τύπου"

$\begin{cases} \xi = \alpha t + \beta x \\ \eta = \gamma t + \delta x \end{cases}$

$u(x,t) = U(\xi,\eta)$

$u_x = \beta U_{\xi} + \delta U_{\eta}$

$u_{xx} = \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}$

$u_t = \alpha U_{\xi} + \gamma U_{\eta}$

$u_{tt} = \alpha(\alpha U_{\xi\xi} + \gamma U_{\xi\eta}) + \gamma(\alpha U_{\eta\xi} + \gamma U_{\eta\eta}) = \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}$

$\alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta} - c^2(\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 c^2)}_{0} U_{\xi\xi} + (2\alpha\gamma - 2\beta\delta c^2) U_{\xi\eta} + \underbrace{(\gamma^2 - c^2\delta^2)}_{0} U_{\eta\eta} = 0 \quad (1)$

(επιλέγω $\alpha - \beta c = 0$) (επιλέγω $\gamma + \delta c = 0$)

→

Επιλέγουμε $\alpha - 6c = 0 \Rightarrow \alpha = 6c$
$\gamma + \delta c = 0 \Rightarrow \gamma = -\delta c$

$2\alpha\gamma - 26\delta c^2 = 2(-6\delta c^2) - 26\delta c^2 = -46\delta c^2$

Άρα η (1) γίνεται $-46\delta c^2 U_{\xi n}(\xi, n) = 0 \Rightarrow -4c^2 U_{\xi n}(\xi, n) = 0$

άρα $\begin{cases} \xi = ct + x \\ n = -ct + x \end{cases}$

$\Rightarrow U_{\xi n}(\xi, n) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_\xi(\xi, n) = f(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(U(\xi, n)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\int_0^\xi \alpha(s)\, ds\right) \Rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(U(\xi, n) - \int_0^\xi \alpha(s) ds\right) = 0 \Rightarrow U(\xi, n) - \int_0^\xi \alpha(s) ds = B(n)$

Οπότε, $U(\xi, n) = A(\xi) + B(n)$

Άρα, $u(x,t) = U(\xi, n) = A(\xi) + B(n) = A(x+ct) + B(x-ct)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

Πρέπει A,B 2 φορές παραγωγίσιμες

Τα A,B θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες

$u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow A(x) + B(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,t) = cA'(x+ct) - cB'(x-ct) \Rightarrow cA'(x) - cB'(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Άρα $\begin{cases} A(x) + B(x) = f(x) \\ A'(x) - B'(x) = \frac{1}{c} g(x) \Leftrightarrow (A(x) - B(x))' = \left(\frac{1}{c}\int_0^x g(s) ds\right)' \Leftrightarrow \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(A(x) - B(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s) ds\right)' = 0 \overset{\exists c_1 \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} A(x) - B(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s) ds = c_1$, $x \in \mathbb{R}$

Οπότε

$\begin{cases} A(x) + B(x) = f(x) \\ A(x) - B(x) = c_1 + \frac{1}{c}\int_0^x g(s) ds \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s) ds, \quad B(x) = -\frac{c_1}{2} + \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s) ds \end{cases}$

Επομένως,

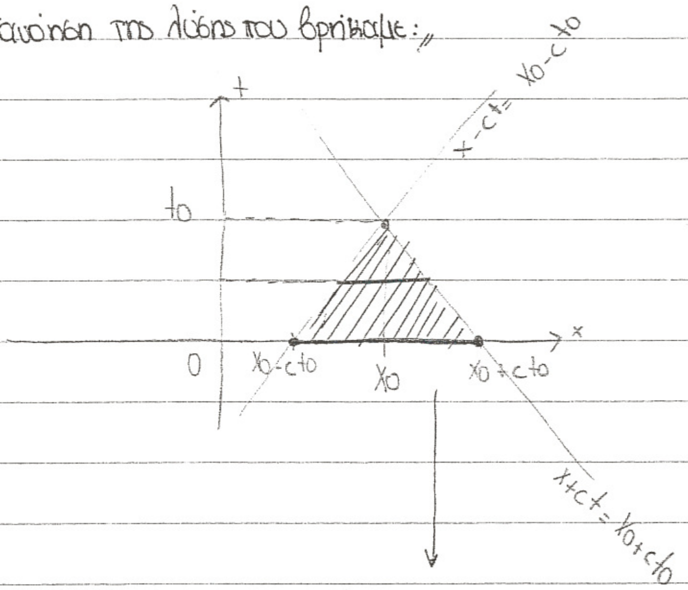
$$u(x,t) = A(x+ct) + B(x-ct) = \cancel{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds - \cancel{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds =$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds}$$

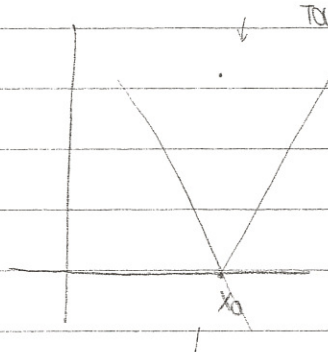
→ Λύση του προβλήματος Cauchy.

$u \in C^{2,2}(\mathbb{R}\times(0,+\infty)) \cap C^{0,1}(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$

"Κατανόηση της λύσης που βρήκαμε:"



το x_0 επηρεάζει μόνο τα σημεία που είναι μέσα στου "κώνο"

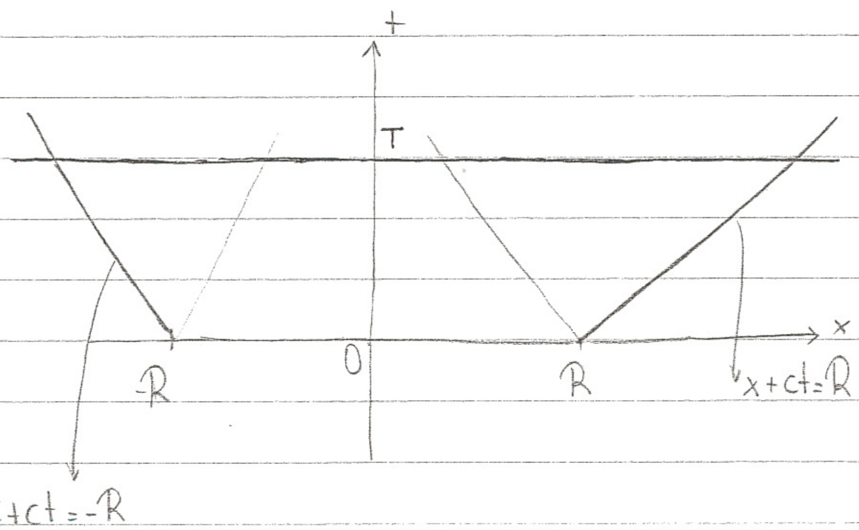


αν ξέρουμε αυτό το σημείο

Κώνος εξάρτησης της λύσης

Αν $f(x)=0$, $|x|\geq R$

$g(x)=0$, $|x|\geq R$



Για τα x:

$\begin{cases} x \leq -R-cT \\ x \geq R+cT \end{cases}$ η λύση είναι μηδέν.

Γιατί το Πρόβλημα Cauchy $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ έχει το πολύ μία λύση.

Ενεργειακή Μέθοδος

$u(x,t)$
$\downarrow$
πόσο μακριά είμαστε από τη θέση ισορροπίας

Ταχύτητα: $u_t(x,t)$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} u_t^2(x,t)\,dx \rightarrow \text{Κινητική Ενέργεια}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{c^2}{2} u_x^2(x,t)\,dx \rightarrow \text{Δυναμική Ενέργεια}$$

Άρα, $E(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} u_t^2(x,t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x,t)\right] dx \rightarrow$ Συνολική Ενέργεια του Συστήματος

Στόχος μας: $\frac{d}{dt} E(t) \leq 0$ (η ενέργεια θα φθίνει)

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} u_t^2(x,t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x,t)\right] dx\right) \quad (*)$$

"Υπενθύμιση"

$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \rightarrow$ προϋποθέσεις για να ισχύει αυτό: Riemann ολοκληρώσιμη να υπάρχει η μερική παράγωγος και να είναι συνεχής

Άρα, $(*) = \int_{\mathbb{R}} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})\,dx$

19/03/2015

ο μάθημα

$\boxed{\text{Μ.Δ.Ε}}$

Θεώρημα

Το πρόβλημα Cauchy
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0)=h(x) & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$
έχει το πολύ μία (κλασική) λύση

Απόδειξη:

(Χρήση Ενεργειακής μεθόδου)

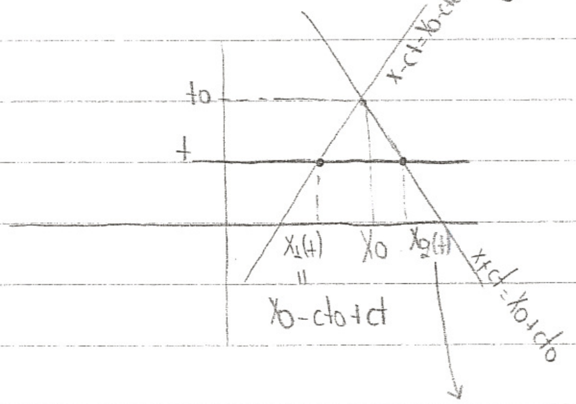
Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις του προβλήματος.

Τότε η συνάρτηση $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ λύνει το πρόβλημα:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=(u_1-u_2)_{tt}-c^2(u_1-u_2)_{xx}=(u_1)_{tt}-(u_2)_{tt}-c^2(u_1)_{xx}+c^2(u_2)_{xx}=$$
$$=f(x,t)-f(x,t)=0,\ x\in\mathbb{R}\ t>0$$

$u(x,0)=u_1(x,0)-u_2(x,0)=h(x)-h(x)=0 \quad x\in\mathbb{R}$

$u_t(x,0)=(u_1-u_2)_t(x,0)=u_{1,t}(x,0)-u_{2,t}(x,0)=g(x)-g(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$



Βοηθητική συνάρτηση για να βρούμε $\qquad = x_0+ct_0-ct$

την ενέργεια του συστήματος=

$$\sigma(t)=\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t(u_{tt}-c^2u_{xx})dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)}[u_t(x,t)(u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t))]dx =$$

$$= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} u_t^2(x,t)\right) - c^2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t \, u_{xx} \, dx =$$

$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} u_x^2 = u_x u_{xt} \right)$

$$= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} u_x^2 \right]}_{\longrightarrow E(t)} dx$$

Ενέργεια του συστήματος $= E(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left(\frac{1}{2} u_t^2(x,t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x,t) \right) dx$, $x_1(t) = x_0 - ct_0 + ct$

$x_2(t) = x_0 + ct_0 - ct$

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left[\frac{1}{2} u_t^2(x,t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x,t) \right] dx \right]$$

$$E'(t) = \overbrace{\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [u_t \cdot u_{tt}(x,t) + c^2 u_x u_{xt}] dx}^{A} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} u_t^2(x_2(t),t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x_2(t),t) \right) \frac{d}{dt} x_2(t) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} u_t^2(x_1(t),t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x_1(t),t) \right) \frac{d}{dt} x_1(t)$$

Υπενθύμιση

① $\frac{d}{dt} \int_{\varphi(t)}^{b} f(u) du = - f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

Αν f συνεχής και φ παραγωγίσιμη τότε η $t \longmapsto \int_{\varphi(t)}^{b} f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη

② $\frac{d}{dt} \int_a^b Q(x,t) dx = \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial t} dx$

αν $Q \in C^{0,1}([a,b] \times [c,d])$

$$A = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t \, u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} \, dx \overset{(u_{xt} = u_{tx})}{=} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t \cdot u_{tt} + c^2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_x \cdot u_{tx} \, dx =$$

$$= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{=0} dx + c^2 \left(u_x(x_2(t),t) u_t(x_2(t),t) \right) - u_x(x_1(t),t) \, u_t(x_1(t),t))$$

Επομένως, $E'(t) = c^2 u_x(x_2(t),t) u_t(x_2(t),t) - c^2 u_x(x_1(t),t) u_t(x_1(t),t) - c \left[\frac{1}{2} u_t^2(x_2(t),t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x_2(t),t) \right] -$

$$- c \left[\frac{1}{2} u_t^2(x_1(t),t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x_1(t),t) \right] =$$

$\rightarrow$

$$= -\frac{c}{2}\left[u_t^2(x_2(t),t) + c^2 u_x^2(x_2(t),t) - 2c\, u_x(x_2(t),t)\, u_t(x_2(t),t)\right] -$$

$$- \frac{c}{2}\left[u_t^2(x_1(t),t) + c^2 u_x^2(x_1(t),t) + 2c\, u_t(x_1(t),t)\, u_x(x_1(t),t)\right] =$$

$$= -\frac{c}{2}\left(u_t(x_2(t),t) - c\, u_x(x_2(t),t)\right)^2 - \frac{c}{2}\left(u_t(x_1(t),t) + c\, u_x(x_1(t),t)\right)^2 \le 0$$

Δηλαδή, $E'(x) \le 0 \Rightarrow E \downarrow$ (φθίνει η ενέργεια)

$\Rightarrow E(t) \le E(0) \quad , t>0$

Όμως, $E(0) = \displaystyle\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \left(\frac{1}{2}\underbrace{u_t^2(x,0)}_{0} + \frac{c^2}{2}\underbrace{u_x^2(x,0)}_{0}\right) dx = 0$

$u(x,0)=0 \Rightarrow u_x(x,0)=0$

$u_t(x,t)=0$

$$u(x,t) - \underbrace{u(x,0)}_{0} \overset{\xi\in(0,t)}{\underset{ΘΜΤ}{=}} (t-0)\, u_t(x,\xi) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 0 \overset{άρα}{\underset{συνεχείας}{\Rightarrow}} u(x_0,t_0) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u \equiv 0$ Αντίφαση

1ο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad 0<x<\ell \ , t>0$$

ΣΣ συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} u(0,t) = \phi_1(t) \\ u(\ell,t) = \phi_2(t) \quad , t>0 \end{cases}$

ΑΣ αρχικές συνθήκες $\begin{cases} u(x,0) = h(x) \quad , x\in[0,\ell] \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$

Το πρόβλημα Αρχικών - Συνοριακών Τιμών έχει το πολύ μία λύση.

Απόδειξη (Απαγωγή σε άτοπο)

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει 2 διακεκριμένες λύσεις u_1, u_2. Τότε, $u = u_1 - u_2$

Η u λύνει το πρόβλημα:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad 0<x<l \quad t>0$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$

$u(x,0) = 0$

$u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq l$

Τότε η $E(t) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_t^2(x,t) + \frac{c^2}{2} u_x^2(x,t) \right] dx$ είναι ενέργεια διότι,

$$E'(t) = \int_0^l (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) dx = \int_0^l (u_t u_{tt} - c^2 u_{xx} u_t) dx + c^2 (u_x u_t)\Big|_0^l =$$

$$= \int_0^l u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{0} dx + c^2 \big(u_x(l,t) u_t(l,t) - u_x(0,t) u_t(0,t)\big)$$

$$= c^2 \big(u_x(l,t) \cancelto{0}{u_t(l,t)} - u_x(0,t) \cancelto{0}{u_t(0,t)}\big) = 0$$

$\Rightarrow 0 \leq E(t) = E(0) = 0 \Rightarrow E(t) \equiv 0 \Rightarrow u_t(x,t) = 0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0$ άτοπο

Επόμενος Στόχος

Να λυθεί η μη ομογενή:

$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$

$u(x,0)=h(x)$

$u_t(x,0)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$

"Υπενθύμιση"

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

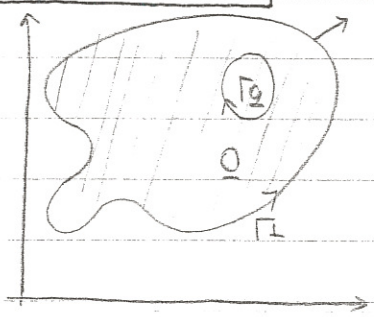
Παίρνω τα ομογενές:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = h(x) \\ w_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Τότε: $\Rightarrow u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$

"Υπενθύμιση (Απ3)"

$\boxed{\text{Ταυτότητες Green}}$ $\quad \vec{v}=(v_1,v_2)$ → μοναδιαίο προς τα έξω



$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy)$$ → Θεώρημα Green

(Ανάλογο στον Απ1 $\int_a^b f'(s)\,ds = f(b) - f(a)$)

$$\iiint \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iint \vec{F}\cdot d\vec{s}$$ → Θεώρημα Gauss

Επιφανειακό ολοκλήρωμα

→

Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\iiint_{\Omega} f(x)\frac{\partial}{\partial x_1} g(x)\,dx = -\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x)g(x) + \iint_{\partial\Omega} f(x)g(x)\cdot \nu_1(x)\,dS(x)$$

1η ταυτότητα Green

$$\int_{\Omega} f(x)\,\Delta g(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu}\,dS$$

(ανάδελτα)

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$$

(Λαπλασιανή)

Το γράφουμε τώρα ανάποδα:

$$\int_{\Omega} \Delta f(x)\cdot g(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS$$

Αφαιρώ κατά μέρη:

$$\int_{\Omega}\left[f\cdot\Delta g - \Delta f\cdot g\right]dx = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\cdot\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)dS$$

Πρόβλημα

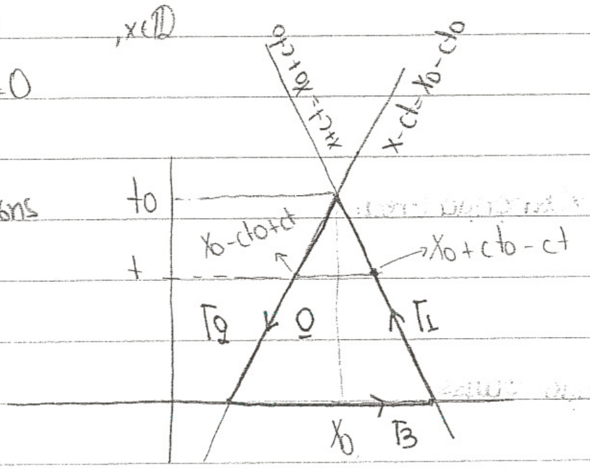
$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$

Α.Σ. $u(x,0)=0$, $x\in\mathbb{R}$

$u_t(x,0)=0$

Λύση:

Κώνος εξάρτησης



$$\underbrace{\iint_{\Omega} \left[u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) \right] dx\,dt}_{(*)} = \iint_{\Omega} f(x,t)\,dx\,dt = \int_0^{t_0} \left(\int_{x_0 - ct_0 + ct}^{x_0 + ct_0 - ct} f(x,t)\,dx \right) dt$$

Θεώρημα Green $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx\,dt = \int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dt$

Εδώ: $Q(x,t) = -c^2 u_x$

$P(x,t) = -u_t$

Οπότε $\underset{\substack{\downarrow \\ \Theta\, \text{Green}}}{(*)} = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\left[-u_t(x,t)\,dx - c^2 u_x(x,t)\,dt \right]}_{(1)} = \int_{\Gamma_1} (\overset{(1)}{\ldots}) + \int_{\Gamma_2} (\overset{(1)}{\ldots}) + \int_{\Gamma_3} (\overset{(1)}{\ldots})$

Στο Γ_3: $\int_{\Gamma_3} [-\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{u_t(x,0)}\,dx - c^2 \underset{0}{u_x(x,0)\,\cancel{dt}}] = 0$

(από τις Α.Σ)

Στο Γ_1: $\int_{\Gamma_1} [-u_t\,dx - c^2 u_x\,dt] = (*_1)$ $\boxed{du = u_x\,dx + u_t\,dt}$

Όμως, $x + ct = x_0 + ct_0 \Rightarrow dx + c\,dt = 0 \Rightarrow dx = -c\,dt$

Άρα, $(*_1) = \int_{\Gamma_1} -u_t(-c\,dt) - c^2 u_x \left(-\frac{dx}{c} \right) = \int_{\Gamma_1} c u_t\,dt + c u_x\,dx = c \int_{\Gamma_1} u_t\,dt + u_x\,dx =$

$= c \int_{\Gamma_1} du = c \left(u(x_0,t_0) - \overset{0}{\cancel{u(x_0 + ct_0, 0)}} \right)$

Λύση: $u(x_0,t_0) = \frac{1}{2c} \iint_{C(x_0,t_0)} f(x,t)\,dx\,dt$

$\downarrow$ κώνος εξάρτησης με κορυφή (x_0,t_0)

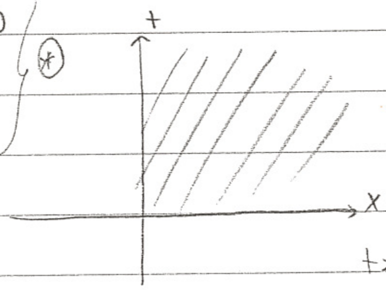
Πρόβλημα

Να λυθεί

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad x>0,\ t>0 \\ &\left.\begin{aligned} &u(x,0) = f(x) \\ &u_t(x,0) = g(x) \end{aligned}\right\} x \geq 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

αρχικές συνθήκες

Σ.Σ. $\boxed{u(0,t) = 0}$

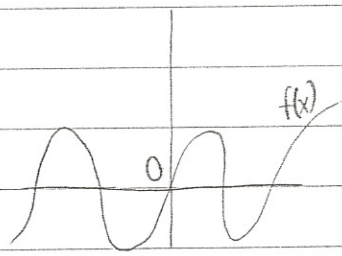


$t>0,\ x>0$

Λύση.

Παίρνω το πρόβλημα:

$$\left.\begin{aligned} &w_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ &w(x,0) = f_{\pi}(x) \quad (\text{περιττή επέκταση της } f) \\ &w_t(x,0) = g_{\pi}(x) \to (\text{περιττή επέκταση της } g) \end{aligned}\right\} x\in\mathbb{R}$$



↓ Περιττή επέκταση

$$f_{\pi}(x) = \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x<0 \end{cases}$$

Αν είχαμε Neumann Σ.Σ, τότε θα παίρναμε άρτια επέκταση

Η λύση αυτού του προβλήματος, έχουμε δει ότι είναι:

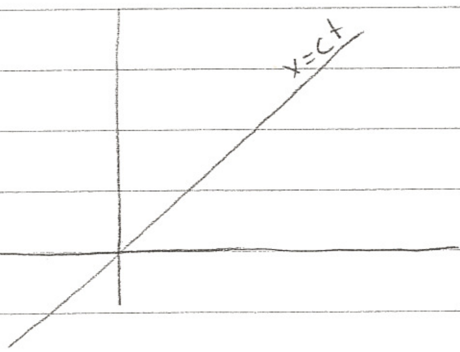
$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[f_{\pi}(x-ct) + f_{\pi}(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_{\pi}(s)\,ds$$

Ικανοποιεί τις (*).

Αρκεί να ελέγξω ότι $w(0,t) = 0$.

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\underbrace{\left[f_{\pi}(-ct) + f_{\pi}(ct)\right]}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g_{\pi}(s)\,ds}_{0} = 0$$

Οπότε, για $x>0, t>0$: $u(x,t) = w(x,t) = \frac{1}{2}\left(f_{\pi}(x-ct) + \underbrace{f_{\pi}(x+ct)}_{f(x+ct)\ (\text{γιατί } x>0)}\right) + \underbrace{\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_{\pi}(s)\,ds}_{(*)}$



$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds, & x-ct \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(-f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\,ds, & x-ct<0 \end{cases}$$

Άρα:

$$\circledast = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_n(s)\,ds = \underbrace{\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{ct-x} g_n(s)\,ds}_{0} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\,ds$$

17/03/2015

7ο μάθημα

ΜΔΕ

Πρόβλημα

Αποδείξτε ότι το Πρόβλημα Αρχικών Συνοριακών Τιμών

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = f(t), & t\geq 0 \\ u(x,0) = g(x), & 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

έχει το πολύ μία λύση

Λύση:

Έστω ότι το πρόβλημα έχει δύο διακεκριμένες λύσεις u_1, u_2. Τότε η $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ λύνει το πρόβλημα

$u_t = u_{xx}, \quad 0<x<1, \ t>0$

$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t\geq 0$

$u(x,0) = 0, \quad 0\leq x\leq 1$

$u(x,t)$:= θερμοκρασία στη x, τη χρονική στιγμή t

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\,dx \rightarrow \text{θερμική ενέργεια}$$

Παραγωγίζουμε: $\sigma'(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2u\cdot u_t(x,t)\,dx = \int_0^1 u\cdot u_{xx}\,dx =$

$$= -\int_0^1 u_x\cdot u_x\,dx + \left[(u\cdot u_x)\right]_0^1 = -\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx + \underbrace{u\, u_x(1,t) - u(0,t)\,u_x(0,t)}_{\to 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sigma(t) \overset{(t>0)}{\leq} \sigma(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{u^2(x,0)}_{\to 0}\,dx \Rightarrow \int_0^1 u^2(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \forall x\in[0,1] \Rightarrow u=0$$

→

Άλλη προσέγγιση

$$u_t = u_{xx} \xrightarrow{\text{πολ/ζω με } u_t} u_t^2 = u_t \, u_{xx}$$

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx - \int_0^1 u_t u_{xx}\,dx = 0 + \int_0^1 u_{tx} u_x\,dx - \cancel{\left[(u_t u_x)\right]_0^1}^{\to 0}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt} u_x^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_x^2\,dx = 0$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx$$

$$\sigma'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2u_x \cdot u_{xt}\,dx = \int_0^1 u_x \cdot u_{xt}\,dt = -\int_0^1 u_{xx} u_t\,dx + \left[u_x u_t\right]$$

$$= -\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx + u_x(1,t)\,\cancel{u_t(1,t)}^{0} - u_x(0,t)\,\cancel{u_t(0,t)}^{0} \le 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \sigma(t) \overset{(t>0)}{\le} \sigma(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(x,0)\,dx = 0 \overset{(\sigma(t)\ge 0)}{\Longrightarrow} u_x(x,t) = 0$$

ΘΜΤ

$0<x$, $\xi \in (0,x)$

$\underbrace{u(x,t)}\ - \underbrace{u(0,t)}_{0} = x\,u_x(\xi,t) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ <u>Άτοπο</u>

Άσκηση

$u_t = u_{xx}$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$

→ $\sigma(t) = \frac{1}{p}\int_0^1 |u(x,t)|^p\,dx$, $p>1$ → και αυτή θα μπορούσε να "παίξει" το ρόλο της ενέργειας

(και με αυτήν την $\sigma(t)$ μπορούμε να οδηγηθούμε → $u=0$

(άσκηση)

"Υπενθύμιση"

- αν $x \neq 0$, τότε $|x|^p$ παραγωγίσιμη, $p>1$ (*) →

→

(συνέχεια υπενθύμισης)

(*) για $x>0$: $\frac{x^p - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^{p-1} = 0$

για $x<0$: $-\frac{(-x)^p}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -(x)^{p-1} = 0$

$\frac{d}{dx}|x|^p = p|x|^{p-2}x$

$\boxed{\text{Πρόβλημα}}$ (λύση της εξίσωσης θερμότητας)

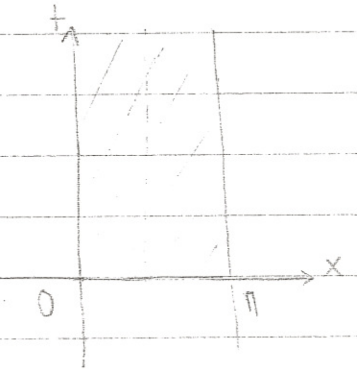
$u_t = u_{xx}$, $0<x<\pi$, $t>0$ → Εξίσωση θερμότητας

ΣΣ $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

ΑΣ $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,\pi]$

→ 1ο πρόβλημα που προσπάθησαν να λύσουν
Το έλυσε ο Fourier (μέθοδος Fourier)

Στόχος: να βρούμε πολλές λύσεις



Συμμετρίες χωρίου
Συμμετρίες του Διαφορικού Τελεστή

↳ άξονας συμμετρίας

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

Άρα, παραγωγίζουμε ως προς t: $u_t = X(x)\cdot T'(t)$

-//- 2 φορές ως προς x: $u_{xx} = X''(x)\cdot T(t)$

$\xRightarrow{(u_t = u_{xx})}$ $X(x)\cdot T'(t) = X''(x)\cdot T(t)$ (*)

$X(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ (γιατί αλλιώς αν $X(0)\neq 0$ τότε $T(t)\equiv 0$, οπότε $X(x)\cdot T(t) = 0$ → όμως δεν θέλουμε την τετριμμένη λύση)

Αντίστοιχα, $X(\pi)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$

(*) $\Rightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Και επομένως,
$$\begin{cases} ① \ \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \\ ② \ X''(t) + \lambda X(x) = 0 \quad 0 < x < \pi \\ \quad X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$
→ έχω να λύσω αυτό το σύστημα

Θα λύσουμε το ② (είναι πρόβλημα συνοριακών τιμών)

$$\begin{cases} X''(t) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

χαρακτηριστική εξίσωση: $p^2 + \lambda = 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) αν $\lambda = 0$, τότε $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $X(x) = c_1 x + c_2$

$X(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$
$X(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$
$\Rightarrow X(x) \equiv 0$ απορρίπτεται (θέλουμε μη τετριμμένη λύση)

(β) αν $\lambda < 0$, τότε $p^2 = -\lambda \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}$

$X(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0$
$X(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} = 0$
$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

απορρίπτεται

(γ) $\lambda > 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\lambda}\cdot i$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

$X(\pi) = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$

$\sqrt{\lambda_k}\,\pi = k\pi, \ k \in \mathbb{N}$

$\lambda_k = k^2, \ k \in \mathbb{N}$ →

$X_k(x) = \sin(kx), \ k \in \mathbb{N}$

$\frac{T_k'(t)}{T_k(t)} = -k^2 \Leftrightarrow T_k' + k^2 T_k = 0 \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{-k^2 t}$

Άρα: $u(x,t) = T(t) \cdot X(x) = C_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

Οπότε:

Γενική Μορφή των λύσεων:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin kx}$$

Πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x,\ t > 0 \\ \Sigma\Sigma \quad u(0,t) = 0 & \\ A\Sigma \quad u(x,0) = f(x) & x \geq 0 \\ \text{φραγμένες} & \end{cases}$$

Λύση

Ψάχνω για λύσεις στη μορφή $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$X(0) = 0$ (όπως πριν)

και πάλι $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} (1)\ T'(x) + \lambda T(t) = 0 \\ (2)\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \quad X(0) = 0 \end{cases}$

Ξεκινάμε πάλι με το (2):

(α) αν $\lambda = 0$, $X(x) = C_1 x + C_2$

$X(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$, $X(x) = C_1 x \Rightarrow C_1 = 0$ απορρίπτεται

αν δεν ήταν, η λύση θα ήταν άφραχτη (θέλουμε φραγμένη)

(β) αν $\lambda < 0$, $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot x}$

$X(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_1$

$X(x) = C_1 (e^{\sqrt{-\lambda} x} - e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot x})$ άφραχτη, εκτός αν $C_1 = 0$

(γ) $\lambda > 0$, $X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) \Rightarrow X(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$ Άρα $\lambda > 0$

$u_\lambda(x,t) = C_\lambda e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda} x) \rightarrow$ λύσεις

Οπότε, Γενική Μορφή των λύσεων:

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^{+\infty} c(\lambda) e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)\, d\lambda}$$

Γυρίζουμε τώρα στο προηγούμενο πρόβλημα: με $u(x,0)=f(x)$

Βρήκαμε γενική μορφή των λύσεων: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$

Για $t=0$ $\quad u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)} \xrightarrow[\sin(mx)]{\text{πολλ/ζω με}} \sin(mx) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) \cdot \sin(mx)$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx = \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \cdot \sin(mx) \right) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\pi} c_k \int_0^{\pi} \sin kx \cdot \sin(mx)\, dx \quad (*)$$

! $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin kx \cdot \cos mx\, dx = 0, \quad k \neq m$$

$$\left(\int_0^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \frac{\pi}{2} \right)$$

Άρα $(*) = c_m \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{c_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots}$$

Λύση του Προβλήματος: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$

8º μάθημα 19/03/2015

ΜΔΕ

Πρόβλημα (Εξίσωση θερμότητας με Neumann ΣΣ)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad , 0<x<\pi \, , t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Λύση

Ψάχνουμε για "πολλές" λύσεις (μη-τετριμμένες) $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$u_x(x,t) = X'(x) \cdot T(t)$

$u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X'(0)=0}$

Αντίστοιχα $u_x(\pi,t)=0 \Leftrightarrow \boxed{X'(\pi)=0}$

$u_{xx} = u_t \Rightarrow X(x) \cdot T'(t) = X''(x) T(t) \Leftrightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ τω

$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad , 0<x<\pi$

$X'(0) = X'(\pi) = 0$

και $T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad , t \geq 0$

$e^{px} \Rightarrow p^2 + \lambda = 0$

"Περιπτώσεις"

(i) $\lambda<0 \Rightarrow p^2 = -\lambda \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$, οπότε η γενική λύση της $X''(x)+\lambda X(x)=0$ είναι:

$(\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \; X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}$

$X'(0)=0 \Leftrightarrow X'(x) = \sqrt{-\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} - \sqrt{-\lambda}\, c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$

$\sqrt{-\lambda}\,(c_1 - c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2$

$X'(\pi)=0 \Leftrightarrow c_1\sqrt{-\lambda}\,(e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}) = 0$ όμως $e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} = e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\cdot\pi = -\sqrt{-\lambda}\,\pi \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}=0$ αδύνατο

→

(ii) $\lambda=0 \Rightarrow X(x)=C_1x+C_2$

$X'(x)=C_1$

$X'(0)=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow X(x)=C_2$

$\lambda=0$ ιδιοτιμή

$X_0(x)=1$ ιδιοσυνάρτηση

(iii) $\lambda>0 \Rightarrow \exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$: $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,x) \Rightarrow X'(x)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)+C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$

$X'(0)=0 \Leftrightarrow C_2\sqrt{\lambda}=0 \Leftrightarrow C_2=0$

$X'(\pi)=0 \Leftrightarrow -C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)=0$

$\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)=0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k}\,\pi = k\pi, \quad k\in\mathbb{N}$

$\lambda_k = k^2, \quad k\in\mathbb{N}$

$X_k(x)=\cos(kx), \quad k\in\mathbb{N}$

$\boxed{\text{αν } \lambda=0}$

$T'(t)+\cancel{\lambda T(t)}=0$

$T_0(t)=1$ (μια οποιαδήποτε σταθερά)

$\boxed{\text{αν } \lambda\neq 0}$

$T_k(t)=e^{-k^2t}, \quad k\in\mathbb{N}$

$u_0(x,t)=1$

$u_k(x,t)=e^{-k^2t}\cos(kx), \quad k\in\mathbb{N}$

$\boxed{\text{Γενική Λύση}}$

$$u(x,t)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2t}\cos(kx)$$

Θα προσδιορίσουμε τα C_k

$$u(x,0)=f(x) = \frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} C_k\cos(kx)=f(x)$$

Πολ/ζω με 1

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} C_k\cos(kx)\right]dx=\int_0^{\pi} f(x)\,dx \Rightarrow \frac{C_0}{2}\int_0^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx}_{0}=\int_0^{\pi}f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx}$$

πολλ/ζω τύπο με $\cos(mx)$

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{c_0}{2}\cos(mx)+\cos(mx)\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos(kx)\right]dx=\int_0^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx$$

$$\frac{c_0}{2}\int_0^{\pi}\cos(mx)\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_0^{\pi}\cos(kx)\cos(mx)\,dx=\int_0^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx$$

$$c_m\int_0^{\pi}\cos^2(mx)\,dx=\int_0^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx \Rightarrow c_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx,\quad m\in\mathbb{N}$$

Άρα,
$$\begin{cases} c_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\,dx \\ c_m=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx \end{cases}$$

Οπότε:
$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx\,e^{-m^2t}\cos(mx)$$

Ασκήσεις / φυλλάδιο 1

① $\begin{cases} f'(t)\le 2015f(t), & t>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Δείξτε ότι $f(t)\le 0,\ t\ge 0$

Λύση

$$f'(t)\le 2015f(t) \iff f'(t)-2015f(t)\le 0 \overset{\text{πολλ/ζω}}{\underset{\text{με } e^{-2015t}}{\iff}} e^{-2015t}f'(t)-2015e^{-2015t}f(t)\le 0 \iff$$

$$\big(\underbrace{e^{-2015t}f(t)}_{Q(x)}\big)'\le 0$$ Έστω $Q(x)=e^{-2015t}f(t)$ άρα $Q'(x)\le 0$ δηλαδή Q φθίνουσα

Άρα για $t>0 \Rightarrow Q(t)<Q(0) \Rightarrow e^{-2015t}f(t)<e^{-2015\cdot 0}\cancelto{0}{f(0)} \Rightarrow e^{-2015t}f(t)<0 \overset{\text{πολλ/ζω}}{\underset{\text{με } e^{2015t}}{\Rightarrow}}$
$\Rightarrow \boxed{f(t)<0 \text{ για } t>0}$

Για $t=0$, $f(0)=0$

Οπότε, $\boxed{f(t)\le 0 \text{ για } t\ge 0}$

② Βρείτε όλες τις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες η $\varphi(x,y)=e^{-x}f(y)$ λύνει την ΔΕ $\varphi_{xx}(x,y)+\varphi_{yy}(x,y)=\varphi(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$

Λύση:

Αφού η $\varphi(x,y)=e^{-x}f(y)$ λύνει την ΔΕ, τότε θα την ικανοποιεί, δηλαδή:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}f(y)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}f(y)\right)\right)=e^{-x}f(y)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{-x}f(y)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}f'(y)\right)=e^{-x}f(y)\Leftrightarrow e^{-x}f(y)+e^{-x}f''(y)=e^{-x}f(y)\overset{\text{πολ/ζω με } e^{x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{f(y)}+f''(y)=\cancel{f(y)}\Leftrightarrow f''(y)=0\overset{\exists c\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}f'(y)=c\overset{\exists c_1\in\mathbb{R}}{\Rightarrow}\boxed{f(y)=cy+c_1}\ (y\in\mathbb{R})$$

③

α' τρόπος

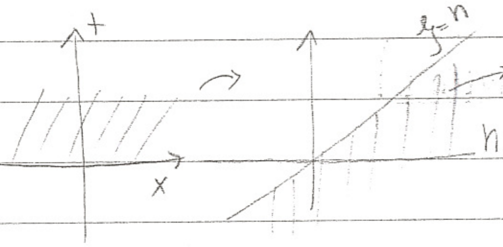
Θέτω $\begin{cases}\xi=x-t & ①\\ n=x+t & ②\end{cases}$ γιατί συντελεστές: 1 της εξίσωσης $(1,1)$

είναι κάθετο διάνυσμα του $(1,1)$: $(1,-1)$

Θεωρώ $u(x,t)=U(\xi,n)$

$①+② \Rightarrow \xi+n=2x\Leftrightarrow x=\frac{\xi+n}{2}$

$①-② \Rightarrow \xi-n=-2t\Rightarrow t=\frac{n-\xi}{2}>0$



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial n}\left(f(\xi,n)\right)=0\Rightarrow f(\xi,n)=f(\xi)}$$

$$U_x=U_\xi\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+U_n\cdot\frac{\partial n}{\partial x}=U_\xi\cdot 1+U_n\cdot 1\ ,\quad U_t=U_\xi\frac{\partial\xi}{\partial t}+U_n\frac{\partial\xi}{\partial t}=U_\xi(-1)+U_n$$

$$-\cancel{U_\xi}+U_n+\cancel{U_\xi}+U_n=1\Leftrightarrow 2U_n=1\Leftrightarrow U_n=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial n}\left(U(\xi,n)-\frac{1}{2}n\right)=0\Leftrightarrow$$

$$U(\xi,n)-\frac{1}{2}n\overset{\text{επιλέγω με } x=\xi}{=}U(\xi,\xi)-\frac{1}{2}\xi\Leftrightarrow u(x,t)-\frac{1}{2}(x+t)=(x-t)^2-\frac{1}{2}(x-t)$$

→

$\boxed{\text{β' τρόπος}}$ (με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών)

Επιλέγουμε $(t(0), x(0)) = (0, x_0)$ και $\sigma(s) = u(x(s), t(s))$, $s \in \mathbb{R}$ η καμπύλη που ψάχνουμε

$\sigma(s) = u(x(s), t(s))$ άρα από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε.

$\sigma'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s)$

Επιλέγουμε $\begin{cases} x'(s) = 1 & , x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1 & , t(0) = 0 \end{cases}$

Τότε:

$\sigma'(s) = u_x(x(s), t(s)) + u_t(x(s), t(s)) = 1$, $s \in \mathbb{R}$ και $\sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = x_0^2$

Άρα, καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} x'(s) = 1, x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1, t(0) = 0 \\ \sigma'(s) = 1, \sigma(0) = x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x(s) - s)' = 0, x(0) = x_0 \\ (t(s) - s)' = 0, t(0) = 0 \\ (\sigma(s) - s)' = 0, \sigma(0) = x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) - s = x(0) - 0 = x_0 \\ t(s) - s = t(0) - 0 = 0 \\ \sigma(s) - s = \sigma(0) - 0 = x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + s \\ t(s) = s \\ \sigma(s) = x_0^2 + s \end{cases} \Leftrightarrow u(x_0 + s, s) = x_0^2 + s$$

Έστω $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s, ώστε $(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x_1, t_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + \bar{s} = x_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 - t_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases}$

Όμως, επιλέγοντας $s = \bar{s}$ παίρνουμε $u(x_0 + \bar{s}, \bar{s}) = x_0^2 + \bar{s} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u(x_1, t_1) = t_1 + (x_1 - t_1)^2$

Άρα, η λύση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών είναι η:

$$\boxed{u(x,t) = t + (x-t)^2, x \in \mathbb{R}, t > 0}$$

④ Να λυθεί η Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) = u^2(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0 \quad (1) \\ u(x,0) = -1, & x\in\mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

Λύση:

(Με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών)

Επιλέγουμε $(t(0),x(0)) = (0,x_0)$ και $\sigma(s) = u(x(s),t(s))$, $s\in\mathbb{R}$ η καμπύλη που ψάχνουμε.

$\sigma'(s) = u_x(x(s),t(s))\, x'(s) + u_t(x(s),t(s))\cdot t'(s)$ (από κανόνα αλυσίδας)

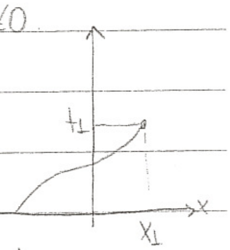
Επιλέγουμε $\begin{cases} x'(s)=1, & x(0)=x_0 \\ t'(s)=1, & t(0)=0 \end{cases}$

Άρα, $\sigma'(s) = u_x(x(s),t(s)) + u_t(x(s),t(s)) \overset{\text{από την (1)}}{=} u^2(x(s),t(s)) = \sigma^2(s)$ και $\sigma(0) = u(x(0),t(0)) = u(x_0,0) \overset{\text{από την (2)}}{=} -1$

Οπότε καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} x'(s)=1, & x(0)=x_0 \\ t'(s)=1, & t(0)=0 \\ \sigma'(s)=\sigma^2(s), & \sigma(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x(s)-s)'=0,\ x(0)=x_0 & \Leftrightarrow \boxed{x(s)=x_0+s} \\ (t(s)-s)'=0,\ t(0)=0 & \Leftrightarrow \boxed{t(s)=s} \\ \sigma'(s)=\sigma^2(s),\ \sigma(0)=-1 & (*) \end{cases}$$

Για την (*) έχουμε: $\dfrac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)} = 1$, για εκείνα τα s (τουλάχιστον τα μικρά) για τα οποία $\sigma(s)\neq 0$.



και $\left(\dfrac{-1}{\sigma(s)}\right)' = \dfrac{(-1)'\sigma(s) - (-1)\sigma'(s)}{\sigma^2(s)} = \dfrac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)}$

Οπότε, $\left(\dfrac{-1}{\sigma(s)} - s\right)' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sigma(s)} - s = \dfrac{-1}{\sigma(0)} - 0 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sigma(s)} = -s-1 \Leftrightarrow \sigma(s) = \dfrac{1}{-s-1}$, για $s>-1$

Άρα: $u(x_0+s,s) = \dfrac{1}{-s-1}$

Έστω $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s, ώστε $(x(\bar{s}),t(\bar{s})) = (x_1,t_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+\bar{s}=x_1 \\ \bar{s}=t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 - t_1 \\ \bar{s} = t_1 \end{cases}$

Όμως, επιλέγοντας $s=\bar{s}$, παίρνουμε $u(x_0+\bar{s},\bar{s}) = \dfrac{1}{-\bar{s}-1} \Leftrightarrow u(x_1,t_1) = \dfrac{1}{-t_1-1}$, για $t_1 \neq -1$ ($t_1>0$ από την εκφώνηση)

Άρα, η λύση του Π.Α.Τ. είναι η: $\boxed{u(x,t) = \dfrac{1}{-t-1} \quad x\in\mathbb{R},\ t>0}$

Άσκηση

Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων

$u_{tt}(x,t) - u_{xxtt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad 0<x<1,\ t>0$

ΑΣ $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

ΣΣ $\begin{cases} u_x(0,t) = h(t) & t>0 \\ u_x(1,t) = g(t) \end{cases}$

(το αντίστοιχο φραγμένες)

Λύση:

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις. Τότε η $u = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα

$u_{tt}(x,t) - u_{xxtt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = (u_1-u_2)_{tt} - (u_1-u_2)_{xxtt} - (u_1-u_2)_{xx} =$

$= (u_{1,tt} - u_{1,xxtt} - u_{1,xx}) - (u_{2,tt} - u_{2,xxtt} - u_{2,xx}) = f(x,t) - f(x,t) = 0$

$u(x,0) = 0$

$u_t(x,0) = 0$

$u_x(0,t) = 0$

$u_x(1,t) = 0$

στο πρόχειρο

Πολλ/ζω με u_t την εξίσωση:

$u_t \cdot u_{tt} - u_t \cdot u_{xxtt} - u_t \cdot u_{xx} = 0$

$\int_0^1 (u_t \cdot u_{tt} - u_t\, u_{xxtt} - u_t \cdot u_{xx})\,dx = (*)$

γιατί η χωρική μεταβλητή x είναι στο (0,1)

(*) $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \Rightarrow u_{xtt}(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=0 \Rightarrow u_{xtt}(1,t)=0 \end{cases}$

• $\int_0^1 u_t\, u_{tt}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(u_t^2)_t\,dt = \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}u_t^2\,dx$

• $\int_0^1 u_t\, u_{xxtt}\,dx = -\int_0^1 u_{tx}\, u_{xtt}\,dx + \cancel{[u_t\, u_{xtt}]_0^1}^{\,0 \text{ (από } (*))} = -\int_0^1 \frac{1}{2}(u_{tx}^2)_t\,dx$ →

$\bullet \int_0^1 u_t \cdot u_{xxt} dx = -\int_0^1 u_{tx} \cdot u_{xt} dx + [u_t \cancel{u_{xt}}]_0^1 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_{xt}^2 dx$

Οπότε $\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2} u_t^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 u_{tx}^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 dx = 0$

Άρα η Ενέργεια θα είναι

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2 + u_{tx}^2 + u_x^2) dx$$

(Λύση της άσκησης)

→ Θεωρώ τη συνάρτηση $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2(x,t) + u_{tx}^2(x,t) + u_x^2(x,t)) dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow E'(t) = \int_0^1 u_t \cdot u_{tt} + u_{tx} \cdot u_{xtt} + u_x u_{xt} dx = \int_0^1 (u_t \cdot u_{tt} - u_t \cdot u_{xttx} - u_{xx}(u_t)) dx + [u_t \cancel{u_{xtt}}]_0^1 + [u_t \cancel{u_x}]_0^1 =$$

$$= \int_0^1 u_t (u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx}) dx = 0$$

$\Rightarrow 0 \leq E(t) = E(0) = 0 \Rightarrow u(x,t) = u(x,0) = 0$ άτοπο

24/03/2015

9º μάθημα

$\boxed{\text{ΜΔΕ}}$

! πχ $u_t + u_{xxxx} = 0$

4 το πλήθος ΣΣ (γιατί έχω 4 παραγ. ως προς x

1 το πλήθος ΑΣ (-||- 1 -||- -||- t)

$\boxed{\text{Πρόβλημα}}$ (μέθοδος Fourier)

$u_t = u_{xx}$, $x \in [0, 2\pi]$, $t > 0$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ Σ.Σ $u(0,t) = u(2\pi, t)$, $t \geq 0$, $u_x(0,t) = u_x(2\pi, t)$, $t \geq 0$

Α Σ $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Λύση:

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή $\boxed{u(x,t) = X(x) \cdot T(t)}$

- $u(0,t) = u(2\pi, t) \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = X(2\pi) \cdot T(t) \Rightarrow$

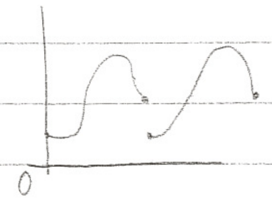
$\Rightarrow (X(0) - X(2\pi)) \cdot T(t) = 0 \xRightarrow{T(t) \neq 0} X(0) = X(2\pi)$

- $u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) \Rightarrow X'(0) = X'(2\pi)$

Περιοδικές Συναρτήσεις

$\exists$ T περίοδος, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$



$\lim_{x \to T^-} f(x) = f(T)$

I περιοδ. T

$\forall x \in I \Rightarrow x + T \in I$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \text{①} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(2\pi) \\ X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

② $T'(t) + \lambda T(t) = 0$

Για το ①:

χαρακτηριστική εξίσωση: $p^2 + \lambda = 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $\lambda < 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$ Γενική Λύση. $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}$ $\quad X(0) = X(2\pi) \Leftrightarrow c_1 + c_2 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, 2\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, 2\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{\sqrt{-\lambda}\, 2\pi} - 1) c_1 + (e^{-\sqrt{-\lambda}\, 2\pi} - 1) c_2 = 0$

$X'(0) = X'(2\pi) \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, 2\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, 2\pi}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{\sqrt{-\lambda}\, 2\pi} - 1) c_1 + (1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\, 2\pi}) c_2 = 0$

$D \neq 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$

(ii) $\lambda = 0 \Leftrightarrow X(x) = c_1 x + c_2$, $X(0) = X(2\pi) \Leftrightarrow c_2 = c_1 2\pi + c_2 \Leftrightarrow c_1 = 0$

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow X_0(x) = 1$, $x \in [0, 2\pi]$

→

(iii) $\lambda > 0 \Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$

$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$, $X'(x) = \sqrt{\lambda}\left(-C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)\right)$

$X(0) = X(2\pi) \Leftrightarrow C_1 = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) \Leftrightarrow (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1) C_1 + \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) C_2 = 0$

$X'(0) = X'(2\pi) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\, C_2 = \sqrt{\lambda}\left(-C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)\right) \Leftrightarrow -\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) C_1 + (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1) C_2 = 0$

$$\begin{cases} (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1) C_1 + \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) C_2 = 0 \\ -\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) C_1 + (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1) C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1 & \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$D = (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)$

Τότε, $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

Γενικά:

$\begin{cases} \sin\theta = \sin\theta_0 \\ \cos\theta = \cos\theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi + \theta_0, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_\kappa}\, 2\pi = 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \lambda_\kappa = \kappa^2 \quad \kappa \in \mathbb{N}$

Οπότε, $X(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)$

$\lambda_\kappa = \kappa^2 \rightarrow$ αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις

$X_{\kappa,1}(x) = \cos \kappa x$

$X_{\kappa,2}(x) = \sin \kappa x$

Για το (2).

$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \longrightarrow \lambda_0 = 0 \Rightarrow T_0(t) = 1$

$\searrow \lambda_\kappa = \kappa^2 \Rightarrow T_\kappa(t) = e^{-\kappa t}$

$u_0(x,t) = 1$

$u_\kappa^1(x,t) = \cos \kappa x\, e^{-\kappa^2 t}$

$u_\kappa^2(x,t) = \sin \kappa x\, e^{-\kappa^2 t}$

Άρα Γενική Λύση

$$\boxed{u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-\kappa^2 t}\left(a_\kappa \cos(\kappa x) + b_\kappa \sin x(\kappa x)\right)}$$

$\rightarrow$

"Αρχικές Συνθήκες"

$$u(x,0)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right) \Rightarrow$$

$\frac{1}{\frac{2\pi}{2}}$ (το μισό του μη cos (πάντα))

Συντελεστές Fourier $\Rightarrow$ της ανάλυσης της f σε $\cos x, \sin x$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$\left\{\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \end{aligned}\right. \quad ,k\in\mathbb{N}$$

→ Αν είχαμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & 0<x<\ell \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

$\lambda_k=k^2$

$X_k(x)=\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

(Προηγούμενο πρόβλημα: $\begin{cases} u_t=u_{xx}, & 0<x<\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$

$\lambda_k=k^2, k\in\mathbb{N} \quad X_k(x)=\sin(kx)$

$u(x,t)=\sum b_k e^{-k^2 t}\sin(kx)$,

όπου $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$)

$\boxed{\text{Πρόβλημα}}$ (κυματική εξίσωση)

$u_{tt}=u_{xx}$, $0<x<\pi$, $t>0$

$u(0,t)=u(\pi,t)=0$

$u(x,0)=f(x)$, $0\le x\le\pi$

$u_t(x,0)=g(x)$

Λύση: (με τη μέθοδο Fourier)

→

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$u(0,t) = 0 \iff X(0) = 0$ $\quad\Rightarrow \dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

$u(\pi,t) = 0 \iff X(\pi) = 0$

Οπότε, έχουμε το σύστημα:

① $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$

② $T''(t) + \lambda T(t) = 0$

Για το ①:

$\lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbb{N}$

$X_k(x) = \sin(kx)$

Για το ②:

$p^2 + k^2 = 0$

$T(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right) \sin(kx)}$$ $\rightarrow$ Γενική Λύση

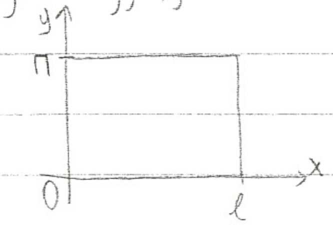
$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = f(x) \Rightarrow \boxed{a_k = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx}$

$u_t(x,t) = \sum \left(-k a_k \sin(kt) + k b_k \cos(kt)\right) \sin(kx)$

$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin(kx)$, $\quad k b_k = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(kx)\,dx \Rightarrow \boxed{b_k = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx}$

Πρόβλημα (ελλειπτική εξίσωση) (με τη μέθοδο Fourier)

$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ (αρμονικές συναρτήσεις)



$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \ell$

$u(0,y) = 0$

$u(\ell,y) = 0$

$u(x,\pi) = 0$

αντίστοιχη εξίσωση θερμότητας

$u_t = u_{xx} + u_{yy}$

ΣΣ $u(x,y,t) = 0$, $(x,y) \in \partial\Omega$, $t > 0$

ΑΣ $u(x,y,0) = f(x,y)$, $x,y \in \partial\Omega$

αντίστοιχη κυματική εξίσωση

$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$

Λύση:

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή

$\boxed{u(x,y) = X(x)\,Y(y)}$

$u(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0 \overset{(Y(y) \neq 0)}{\Rightarrow} X(0) = 0$

$u(\ell,y) = 0 \Rightarrow X(\ell) = 0$

$u(x,\pi) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(\pi) = 0$ $\rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = X(\ell) = 0 \\ Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Άρα: ① $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y(\pi) = 0 \end{cases}$

Για το ①: $p^2 + \lambda = 0$

(i) $\lambda < 0$ δεν υπάρχουν

(ii) $\lambda = 0$ αδύνατο

(iii) $\lambda > 0$: $p = \pm i\sqrt{\lambda}$

$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, $X(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$, $X(\ell) = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\cdot\ell) = 0$

$\sqrt{\lambda_k}\, \ell = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{\ell}$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$ $k \in \mathbb{N}$

$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$

Για το ②: $Y''(y) - \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \cdot Y(y) = 0$, $p^2 - \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow p = \pm \frac{k\pi}{\ell}$

$Y(y) = C_3 e^{\frac{k\pi}{\ell}y} + C_4 e^{-\frac{k\pi}{\ell}y}$, $Y(\pi) = 0 \Leftrightarrow C_3 e^{\frac{k\pi}{\ell}\cdot\pi} + C_4 e^{-\frac{k\pi}{\ell}\pi} = 0 \Leftrightarrow C_4 = -C_3 e^{\frac{2k\pi^2}{\ell}}$

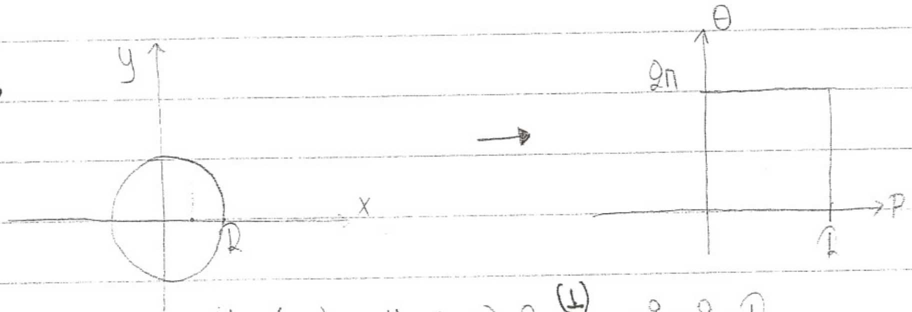
$Y_k(y) = \left(e^{\frac{k\pi y}{\ell}} - e^{\frac{2k\pi^2}{\ell} - \frac{k\pi y}{\ell}}\right)$, $0 < y < \pi$

$$u_k(x,y) = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\left(e^{\frac{k\pi}{\ell}y} - e^{\frac{2k\pi^2}{\ell} - \frac{k\pi}{\ell}y}\right) \qquad k=1,2,\dots$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\left(e^{\frac{k\pi}{\ell}y} - e^{\frac{2k\pi^2}{\ell} - \frac{k\pi y}{\ell}}\right)} \to \text{Γενική Λύση}$$

Θέλουμε $u(x,0)=f(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(1-e^{\frac{2k\pi^2}{\ell}}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = f(x) \Rightarrow c_k\left(1-e^{\frac{2k\pi^2}{\ell}}\right) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{2}{\ell\left(1-e^{\frac{2k\pi^2}{\ell}}\right)}\int^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx}$$



σε πολικές συντεταγμένες

$U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y) = 0 \quad (1), \quad x^2+y^2<R$

$u(x,y) = U(\rho,\theta)$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad (*) \qquad \boxed{x = \rho\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (**) \qquad \boxed{y = \rho\sin\theta}$

προκύπτουν από αυτά

$u_x \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} U_\rho \cdot \frac{\partial\rho}{\partial x} + U_\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} \quad (2)$

$\frac{\partial\rho}{\partial x} \overset{(*)}{:} 2\rho\rho_x = 2x \Rightarrow \boxed{\rho_x = \frac{x}{\rho} = \cos\theta}$ και $\boxed{\rho_y = \frac{y}{\rho} = \sin\theta}$

$(**)$

$\frac{\partial\theta}{\partial x}: (1+\tan^2\theta)\theta_x = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\theta_x = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow \boxed{\theta_x = \frac{-y}{\rho^2}}$ και $\boxed{\theta_y = \frac{x}{\rho^2}}$

→

Άρα:

(2): $u_x = u_\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial x} + u_\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = u_\rho \cdot \cos\theta + u_\theta \dfrac{\sin\theta}{\rho}$

$$u_{xx} = \left(u_\rho \cos\theta + u_\theta \frac{\sin\theta}{\rho}\right)_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(u_\rho \cos\theta + u_\theta \frac{\sin\theta}{\rho}\right)_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} =$$

$$= \left(u_{\rho\rho}\cos\theta - u_{\theta\rho}\frac{\sin\theta}{\rho} + u_\rho \frac{\sin\theta}{\rho^2}\right)\cos\theta + \left(u_{\rho\theta}\cos\theta - u_\rho \sin\theta - u_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{\rho} - u_\theta \frac{\cos\theta}{\rho}\right)\left(\frac{-\sin\theta}{\rho}\right) =$$

$$= \cos^2\theta\, u_{\rho\rho} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho} u_{\theta\rho} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} u_{\theta\theta} + u_\rho\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\right) + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2} u_\theta$$

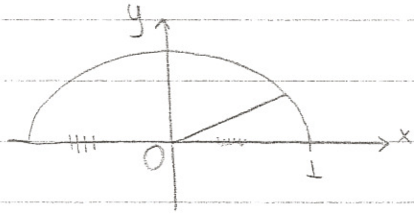
Ομοίως, και με το y.

Η εξίσωση (1) γράφεται με πολικές συντεταγμένες:

$$\boxed{u_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0}$$

Πρόβλημα

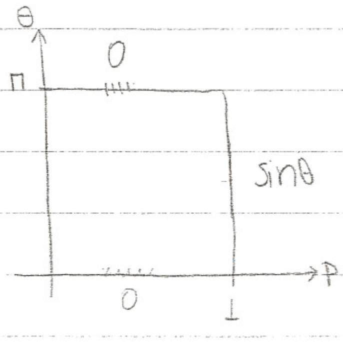
Να λυθεί το πρόβλημα



$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(1,\theta) = \sin\theta, \quad 0<\theta<\pi \end{cases}$$

Λύση:

σε πολικές συντεταγμένες:



→

Η εξίσωση γράφεται σε πολικές συντεταγμένες:

$$u_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0 \quad ,0<\rho<1 \quad ,0<\theta<\pi$$

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή:

$$R(\rho)\cdot\Theta(\theta)$$

(σχήμα)

$$R(\rho)\cdot\Theta(0)=0 \Rightarrow \boxed{\Theta(0)=0}$$

και $R(\rho)\cdot\Theta(\pi)=0 \Rightarrow \boxed{\Theta(\pi)=0}$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση: $R''(\rho)\cdot\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta)=0 \Rightarrow$

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \overset{(\cdot\rho^2)}{\Longrightarrow} \rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda$$

Άρα, θα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \\ \rho^2R''(\rho)-\lambda R(\rho)=0 \end{cases}$$

$\lambda_k = k^2$

$\Theta_k(\theta) = \sin(k\theta)$

$\boxed{\rho^2 R_k''(\rho) - k^2 R_k(\rho)=0}$ → Δ.Ε του Euler

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή: $R(\rho)=\rho^m \Rightarrow m(m-1)\cancel{\rho^m} - k^2\cancel{\rho^m}=0 \Rightarrow m^2-m-k^2=0$

$$\Delta = 1+4k^2$$

$$m_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4k^2}}{2}$$

αν $m_1>0$: ρ^{m_1} απορρίπτεται

$m_2>0$: ρ^{m_2} άρα $\boxed{R_k(\rho)=\rho^{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}}$

Οπότε: $U_k(\rho,\theta) = \rho^{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}} \sin(k\theta)$

$$U(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho^{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}} \sin(k\theta) = (*)$$

Προσδιορίζουμε τα c_k:

$$U(1,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\theta) = \sin\theta$$

$$c_k = 0 \quad , k = 2, \ldots$$

$$c_1 = 1$$

Άρα η λύση θα είναι:

$$\boxed{(*) = \rho^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sin\theta}$$

26/03/2015

10º μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ασκήσεις / φυλλάδιο 2

Άσκηση 4

Να βρεθεί η λύση του π.α.τ.

$$\begin{cases} 2u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) + u_{xt}(x,t) = 0, & x\in\mathbb{R}\ \ t>0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Λύση:

Διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9 > 0$, $\Delta>0$ άρα Υπερβολικού Τύπου → κανονική μορφή της εξίσωσης

(Αλλαγή συστήματος)

$\boxed{u(x,t) = \omega(\xi,\eta)}$

$\begin{cases} \xi = ax+bt \\ \eta = cx+dt \end{cases}$ → επειδή η ΔΕ έχει σταθερούς συντελεστές

Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$u_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}\omega_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x}\omega_\eta = a\omega_\xi + c\omega_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\omega_\xi + c\omega_\eta\right) \overset{(\text{πράξεις})}{=} \Rightarrow \boxed{a^2\omega_{\xi\xi} + 2ac\,\omega_{\xi\eta} + c^2\omega_{\eta\eta} = u_{xx}}$$

Παραγωγίζουμε ως προς t.

$$u_t = w_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + w_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = b w_\xi + d w_\eta$$

$$\boxed{u_{tt} = b^2 w_{\xi\xi} + 2bd\, w_{\xi\eta} + d^2 w_{\eta\eta}}$$

Επίσης,

$$\boxed{u_{xt} = ab\, w_{\xi\xi} + ad\, w_{\xi\eta} + cb\, w_{\xi\eta} + cd\, w_{\eta\eta}}$$

Αντικαθιστούμε τώρα στην εξίσωση και έχουμε.

$$2u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) + u_{xt}(x,t) = 0$$

$$2(a^2 w_{\xi\xi} + 2ac\, w_{\xi\eta} + c^2 w_{\eta\eta}) - (b^2 w_{\xi\xi} + 2bd\, w_{\xi\eta} + d^2 w_{\eta\eta}) + (ab\, w_{\xi\xi} + (ad+cb) w_{\xi\eta} + cd\, w_{\eta\eta} = 0$$

$$\Rightarrow w_{\xi\xi}(2a^2 - b^2 + ab) + w_{\xi\eta}(4ac - 2bd + ad + cb) + w_{\eta\eta}(2c^2 - d^2 + cd) = 0 \quad (*)$$

Επιλέγω $2a^2 - b^2 + ab = 0$ και $2c^2 - d^2 + cd = 0$

$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 + \frac{a}{b} = 0$ $\qquad$ $2\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 1 + \frac{c}{d} = 0$

για $p = \frac{a}{b}$, $2p^2 + p - 1 = 0$ $\qquad$ Ομοίως, για $p = \frac{c}{d}$ $\Rightarrow p_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Delta = 9$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Οπότε επιλέγω $\frac{c}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{d}{2}$

και $\frac{a}{b} = -1 \Rightarrow a = -b$

Άρα, $4ac - 2bd + ad + cb = 4(-b)\cdot\frac{d}{2} - 2bd + (-b)d + \frac{d}{2}b = -2bd - 2bd - bd + \frac{d}{2}b =$

$$= \frac{-5bd}{1} + \frac{d\,b}{2} = \frac{-10bd + db}{2} = \frac{-9bd}{2}$$

Οπότε: $\left(\underset{''}{a=-b}\right)$ $\quad \underset{''}{c=\frac{d}{2}}$

Επιλέγω $d=2$ και $b=-1$ άρα $a=1$ και $c=1$

Άρα, $\begin{cases} \xi = x-t \\ n = x+2t \end{cases}$

Επομένως, (*) $\Rightarrow 9\omega_{\xi n}=0 \Rightarrow \boxed{\omega_{\xi n}=0}$ Κανονική μορφή της εξίσωσης (Υπερβολικού Τύπου)

$$\Rightarrow \omega_{\xi n}(\xi,n)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}\left(\omega_\xi(\xi,n)\right)=0 \Rightarrow \omega_\xi(\xi,n)=a'(\xi)$$, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega(\xi,n)\right)=a(\xi)=\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^\xi a(\theta)d\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega(\xi,n)-\int_0^\xi a(\theta)d\theta\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(\xi,n)-\int_0^\xi a(\theta)d\theta=b(n) \Rightarrow \boxed{\omega(\xi,n)=a(\xi)+b(n)}$$

$$\Leftrightarrow u(x,t)=a(x-t)+b(x+2t) \quad (1)$$

Θα προσδιορίσω τα a, b από τις αρχικές συνθήκες

- $u(x,0)=f(x)$

 για $t=0$: η (1) γίνεται: $u(x,0)=a(x)+b(x) \Rightarrow \boxed{a(x)+b(x)=f(x)}$

- $u_t(x,0)=0$

 $u_t(x,t)=-a'(x-t)+2b'(x+2t)$

 για $t=0$: $u_t(x,0)=-a'(x)+2b'(x) \Rightarrow \boxed{-a'(x)+2b'(x)=0} \Leftrightarrow \left(-a(x)+2b(x)\right)'=0 \overset{\exists c\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \boxed{-a(x)+2b(x)=c}$$

Άρα, έχω το σύστημα:

$$\begin{cases} a(x)+b(x)=f(x) \\ -a(x)+2b(x)=c \end{cases}$$ προσθέτω κατά μέλη (+):

$$3b(x)=f(x)+c \Rightarrow \boxed{b(x)=\frac{f(x)}{3}+\frac{c}{3}}$$

$$a(x)+b(x)=f(x) \Rightarrow \boxed{a(x)=f(x)-\frac{f(x)}{3}-\frac{c}{3}} \Rightarrow \boxed{a(x)=\frac{2f(x)}{3}-\frac{c}{3}}$$

→

Οπότε, η λύση θα είναι

$u(x,t) = \frac{2}{3} f(x-t) - \cancel{\frac{c}{3}} + \frac{1}{3} f(x+2t) + \cancel{\frac{c}{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3} f(x-t) + \frac{1}{3} f(x+2t) = u(x,t)} \rightarrow$ Λύση του Προβλήματος

Άσκηση 2

(α) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση

$\Delta = 1 > 0$ Άρα, η κανονική μορφή της εξίσωσης θα είναι Υπερβολικού Τύπου

$u(x,t) = U(\xi,\eta)$

$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}$ → επειδή έχουμε σταθερούς συντελεστές

$$u_x = U_\xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha U_\xi + \gamma U_\eta$$

$$u_t = U_\xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta U_\xi + \delta U_\eta$$

$$u_{tt} = \beta^2 U_{\xi\xi} + \beta\delta U_{\xi\eta} + \beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}$$

$$u_{xt} = \alpha\cdot\beta U_{\xi\xi} + \alpha\delta U_{\xi\eta} + \gamma\beta U_{\eta\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta}$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$\beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta} - \alpha\beta U_{\xi\xi} - (\alpha\delta + \gamma\beta) U_{\xi\eta} - \gamma\delta U_{\eta\eta} = 0$

$U_{\xi\xi}(\beta^2 - \alpha\beta) + U_{\xi\eta}(2\beta\delta - (\alpha\delta + \gamma\beta)) + U_{\eta\eta}(\delta^2 - \gamma\delta) = 0$

Επιλέγω $\beta = 0$ και $\gamma = \delta$ θέλω

Οπότε $2\beta\delta - (\alpha\delta + \gamma\beta) = -\alpha\delta \neq 0$, $\alpha = \delta = 1$

→

Άρα $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = x+t \end{cases}$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στην εξίσωση

(όπως στην άσκ 4)

$u_{\xi\eta} = 0 \implies u(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta) \iff u(x,t) = A(x) + B(x+t)$

• $u(x,0) = f(x)$

για $t=0$: $u(x,0) = A(x) + B(x) \implies \boxed{A(x) + B(x) = f(x)}$ (1)

• $u_t(x,0) = g(x)$

$u_t(x,t) = B'(x+t)$

για $t=0$: $u_t(x,0) = B'(x) \implies B'(x) = g(x) \implies \boxed{B(x) = \int_0^x g(s)ds + c}$

Οπότε (1) $\implies \boxed{A(x) = f(x) - \int_0^x g(s)ds - c}$

Άρα $u(x,t) = A(x) + B(x+t) = f(x) - \int_0^x g(s)ds \cancel{-c} + \int_0^{x+t} g(s)ds \cancel{+c} \implies$

$$\implies \boxed{u(x,t) = \int_x^{x+t} g(s)ds + f(x)}$$

(β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) = 0 & , x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \quad (*) \\ u(x,-x) = 0 & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,-x) = 0 & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

δεν έχει ομαλή λύση

Λύση: (όπως πριν) $\boxed{\text{α' τρόπος}}$

$u_{\xi\eta} = 0 \implies w(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta)$

① $u(x,t) = A(x) + B(x+t)$

② $u_t(x,t) = B'(x+t)$

$\rightarrow$

για $t=-x$: ① $\Rightarrow A(x)+B(x-x)=0 \Rightarrow A(x)+B(0)=0 \Rightarrow A(x)=-B(0)$

② $\Rightarrow B'(0)=x$, $x\in\mathbb{R}$ αδύνατο

Άρα, δεν υπάρχει λύση

$\boxed{\text{β' τρόπος}}$ (με άτοπο)

Έστω ότι το πρόβλημα έχει ομαλή λύση.

$u_t(x,-x)=x$ Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$\frac{d}{dx}\left(u_t(x,-x)\right)=\frac{d}{dx}(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(u_t(x,-x)\right)=1 \Rightarrow u_{tx}(x,-x)\frac{\partial}{\partial x}(x)+u_{tt}(x,-x)\frac{\partial}{\partial x}(-x)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{tx}(x,-x)-u_{tt}(x,-x)=1}\ , \text{ άτοπο}$$

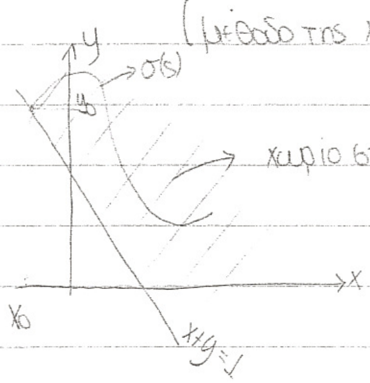
γιατί

Στην ⊛ για $t=-x$: $u_{tt}(x,-x)-u_{xt}(x,-x)=0\neq 1$

$\boxed{\text{Άσκηση 1}}$

Να λυθεί το πρόβλημα : $\begin{cases} u_x(x,y)+(x+y)u_y(x,y)=0 & ,\ x+y>1 \quad ① \\ u(x,1-x)=f(x) & ,\ x\in\mathbb{R} \quad ② \end{cases}$

Λύση (μέθοδο της χαρακτηριστικής καμπύλης)



$\sigma(s)=u(x(s),y(s))$, $s\in\mathbb{R}$ και επιλέγω $(x(0),t(0))=(1-x_0,x_0)$

Από κανόνα αλυσίδας $\sigma'(s)=u_x(x(s),y(s))x'(s)+u_y(x(s),y(s))\cdot y'(s)$

Επιλέγουμε $\begin{cases} x'(s)=1 & ,\ x(0)=x_0 \\ y'(s)=x(s)+y(s) & ,\ y(0)=1-x_0 \end{cases}$

→

Οπότε $\sigma'(s) = u_x(x(s), y(s)) + (x(s)+y(s))\, u_y(x(s), y(s)) \overset{\text{από}}{\underset{\text{την } (1)}{=}} 0$

και $\sigma(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, 1-x_0) \overset{\text{από}}{\underset{\text{την } (2)}{=}} f(x_0)$

Άρα, καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} x'(s) = 1 & , x(0) = x_0 \quad \Rightarrow (x(s)-s)' = 0 \Rightarrow x(s) - s = x(0) - 0 = x_0 \Rightarrow \boxed{x(s) = x_0 + s} \\ y'(s) = x(s) + y(s) & , y(0) = 1 - x_0 \quad (*) \\ \sigma'(s) = 0 & , \sigma(0) = f(x_0) \quad \Rightarrow \sigma(s) = \sigma(0) = f(x_0) \Rightarrow \boxed{\sigma(s) = f(x_0)} \end{cases}$$

Για την $(*)$:

$$y'(s) = x(s) + y(s) \Rightarrow y'(s) = (x_0 + s) + y(s) \Rightarrow y'(s) - y(s) = x_0 + s \underset{\text{με } e^{-s}}{\overset{\text{πολ/ζω}}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow e^{-s}y'(s) - e^{-s}y(s) = e^{-s}(x_0+s) \Rightarrow (e^{-s}y(s))' = e^{-s}x_0 + e^{-s}s \overset{(s\geq 0)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \int_0^s (e^{-s}y(s))'\,dt = \int_0^s e^{-t}(x_0+t)\,dt \Rightarrow e^{-s}y(s) - e^0 y(0) = \int_0^s (-e^{-t})'(x_0+t)\,dt$$

$$\underset{\text{κατά μέρη}}{\overset{\text{ολοκλήρωση}}{\Longrightarrow}} e^{-s}y(s) - 1 + x_0 = [-e^{-t}(x_0+t)]_0^s - \int_0^s -e^{-t}(x_0+t)'\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-s}y(s) - 1 + x_0 = [-e^{-s}(x_0+s) - (-e^{-0}(x_0+0))] - \int_0^s -e^{-t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-s}y(s) - 1 + x_0 = -e^{-s}(x_0+s) + x_0 + [-e^{-t}]_0^s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-s}y(s) - 1 + \cancel{x_0} = -e^{-s}x_0 - e^{-s}s + \cancel{x_0} - e^{-s} + 1$$

$$\Rightarrow e^{-s}y(s) = -e^{-s}x_0 - e^{-s}s - e^{-s} + 2 \Rightarrow \boxed{y(s) = -x_0 - s - 1 + 2e^s}$$

Οπότε $u(x(s), y(s)) = \sigma(s) \Rightarrow u(x_0 + s, -x_0 - s - 1 + 2e^s) = f(x_0)$

Έστω $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s ώστε $(x(\bar{s}), y(\bar{s})) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_0 + \bar{s} = x_1 \\ -x_0 - \bar{s} - 1 + 2e^{\bar{s}} = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{s} = x_1 - x_0 \\ 2e^{\bar{s}} - \bar{s} = y_1 + x_0 + 1 \Rightarrow 2e^{(x_1-x_0)} - (x_1 - x_0) = y_1 + x_0 + 1 \Rightarrow 2e^{(x_1-x_0)} - x_1 + x_0 = y_1 + x_0 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2e^{x_1-x_0}}{2} = \frac{y_1+x_1+1}{2} \Rightarrow \ln e^{(x_1-x_0)} = \ln\left(\frac{y_1+x_1+1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{s} = \ln\left(\frac{y_1+x_1+1}{2}\right)}$$

Άρα, $\bar{s} = x_1 - x_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{y_1 + x_1 + 1}{2}\right) = x_1 - x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = x_1 - \ln\left(\frac{y_1 + x_1 + 1}{2}\right)}$

Όμως επιλέγοντας $s = \bar{s}$ παίρνουμε $u(x_0 + s, -x_0 - s - 1 + 2e^s) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$$u(x_1, y_1) = f\left(x_1 - \ln\left(\frac{y_1 + x_1 + 1}{2}\right)\right)$$

Άρα, η λύση του π.α.τ είναι η:

$$\boxed{u(x,y) = f\left(x - \ln\left(\frac{y + x + 1}{2}\right)\right) \quad x \in \mathbb{R},\ x + y > 1}$$

(συνέχεια μέθοδος Fourier)

Πρόβλημα

$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , x^2 + y^2 < 1$

$u(x,y) = f(\theta)$

Λύση:

$u(x,y) = U(\rho, \theta) \qquad 0 < \rho < 1 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x = \rho \sin\theta$

$\Leftrightarrow U_{\rho\rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} U_{\theta\theta}(\rho, \theta) = 0$

$U(\rho, \theta) = R(\rho) \cdot \Theta(\theta)$

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \Rightarrow -\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda$$

περιοδικές ΣΣ

① $\Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \Theta(0) = \Theta(2\pi) \quad \lim_{x \to 0^+} R(\rho) \cdot \Theta(\theta) = R(\rho)\, \Theta(0) \quad \to$ Άρα, πρέπει

② $\rho^2 R''(\rho) - \lambda R(\rho) = 0 \qquad 0 < \rho < 1 \qquad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ (ομοίως) $\quad \lim_{x \to 2\pi} R(\rho)\, \Theta(\theta) = R(\rho) \cdot \Theta(\pi) \qquad \Theta(0) = \Theta(\pi)$

Ιδιοτιμές: $\lambda_0 = 0$, $\Theta_0(\theta) = 1$, $\lambda_k = k^2$, $\cos k\theta, \sin k\theta$, $k \in \mathbb{N}$

31/03/2015

11º μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Green

$$\iint_{D\subseteq\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x^2+y^2)u_x\Big)\omega(x)\,dx\,dy \qquad \begin{matrix}\omega=\omega(x,y)\\ u=u(x,y)\end{matrix}$$

$$= -\iint_D (1+x^2+y^2)u_x\cdot\omega_x\,dx + \int_{\partial D}(1+x^2+y^2)u_x\cdot\omega(x,y)\cdot\nu_x(x,y)\,ds$$

ν - μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(fg)=g\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

Γενικά,

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x} f\cdot g\,dx\,dy = -\iint_D f\cdot\frac{\partial}{\partial x}g\,dx\,dy + \int_{\partial D} f\cdot g\cdot n_x\,ds \qquad \left(\text{αν ήταν } \frac{\partial}{\partial y} \xleftrightarrow{\text{θα έπαιρνα}} n_y\right)$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \text{το ίδιο} \qquad, n=n(x,y)=(n_x,n_y) \rightarrow \text{κάθετο διάνυσμα}$$

συνιστώσες

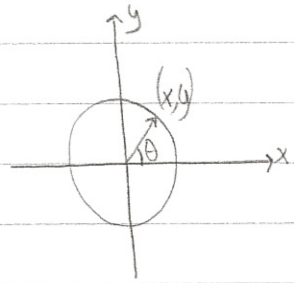
$$A^0=\iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dx\,dy = \iint_D (f_x,f_y)\cdot(g_x,g_y)\,dx\,dy = \iint_D (f_x g_x + f_y g_y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D f_x g_x\,dx\,dy + \iint_D f_y g_y\,dx\,dy \overset{\nu=(\nu_1,\nu_2)}{=} -\iint_D f g_{xx}\,dx\,dy + \int_{\partial D} f g_x \nu_1\,dS - \iint_D f g_{yy}\,dx\,dy + \int_{\partial D} f g_y \nu_2\,ds =$$

$$= -\iint_D f\,(g_{xx}+g_{yy})\,dx\,dy + \int_{\partial D} f\,(g_x\nu_1+g_y\nu_2)\,dS = -\iint_D f\cdot\Delta g\,dx\,dy + \int_{\partial D} f\cdot\nabla g\cdot\nu\,ds$$

$$\Rightarrow \iint_D (f\Delta g - g\Delta f)\,dx\,dy = \int_{\partial D}\left(f\frac{\partial f}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)ds$$

Αρμονικές Συναρτήσεις



$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 & , x^2+y^2<1 \\ u(x,y) = f(\theta) & , x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Πολικές Συντεταγμένες:

$u(x,y) = U(\rho,\theta)$

$x = \rho\cos\theta \qquad 0<\rho$

$y = \rho\sin\theta$

$\Rightarrow U_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0 \quad , 0<\rho<1 \ , 0\leq\theta<2\pi$

$u(1,\theta) = f(\theta) \quad , 0\leq\theta<2\pi$

Εφαρμόζω μέθοδο Fourier:

$$U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta} = 0$$

Ψάχνω λύσεις στη μορφή: $U(\rho,\theta) = R(\rho)\cdot\Theta(\theta)$

Λόγω συνέχειας της U πρέπει: $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$

Λόγω συνέχειας της U_θ πρέπει: $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$\Rightarrow \rho^2\cdot\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \Rightarrow -\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} - \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda$$

- $\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \quad , 0<\theta<2\pi$

  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$

  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$

  (λύνουμε το πρόβλημα με την περισσότερη πληροφορία πρώτα)

- $\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \lambda R(\rho) = 0$

Θ)

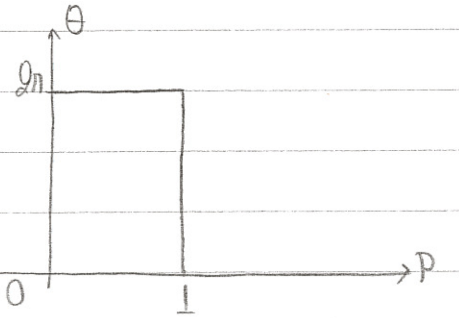
Ιδιοτιμές	Ιδιοσυναρτήσεις
$\lambda_0 = 0$	$\Theta_0(\theta) = 1$
$\lambda_k = k^2, k\in\mathbb{N}$	$\cos k\theta, \sin k\theta$ (δύο στο πλήθος)

B) για $\boxed{\lambda_0=0}$

$p^2R''(p)+pR'(p)=0$, $0<p<1$ $(p\neq0)$

$\Rightarrow pR''(p)+R'(p)=0 \Rightarrow \left(pR'(p)\right)'=0 \overset{(\exists c_1\in\mathbb{R})}{\Rightarrow} pR'(p)=c_1 \Rightarrow R'(p)=\frac{c_1}{p} \Rightarrow \left(R(p)-c_1\ln p\right)'=0 \Rightarrow$

$\overset{(\exists c_2\in\mathbb{R})}{\Rightarrow} R(p)=c_1\ln p+c_2$, $p>0$



Θέλω $R(p)$ να είναι φραγμένη. Επιλέγω $c_1=0 \Rightarrow R_0(p)=1$.

Οπότε, $\lambda_0 \to u_0(p,\theta)=1\cdot1=1$

για $\boxed{\lambda_k=k^2}$

$p^2R''(p)+pR'(p)-k^2R(p)=0$, $0<p<1$

Δ.Ε του Euler

Ψάχνω λύσεις στη μορφή: $R(p)=p^m$ (σε δύναμη)

$R'(p)=mp^{m-1}$

$R''(p)=m(m-1)p^{m-2}$

Δηλαδή, $p^2\, m(m-1)p^{m-2}+mp^m-k^2p^m=0 \overset{(p\neq0)}{\Rightarrow} m^2-k^2=0 \Rightarrow m^2=k^2 \Rightarrow m=k$ ή $m=-k$

Η γενική λύση είναι $R_k(p)=c_1p^k+c_2p^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$, $0<p<1$

αν $p\to0$ αυτό απειρίζεται

για να είναι φραγμένη επιλέγω $c_2=0$

άρα: $R_k(p)=p^k$

Οπότε, $\lambda_k=k^2 \to u_k(p,\theta)=p^k\cos k\theta$, $p^k\sin k\theta$

Επομένως:

Γενική Λύση $\to u(p,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}p^k\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)$ →

Θέλω επίσης να ικανοποιούνται τις συνοριακές συνθήκες:

$$U(1,\theta)=f(\theta) \overset{(\text{Θα πρέπει})}{\Rightarrow} f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)$$

<u>Συντελεστές Fourier</u> διάστημα ολοκλήρωσης: $(0,2\pi)$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta\, d\theta \quad , k=0,1,2,\dots$$

Πάντα

$$\boxed{\frac{1}{\left(\substack{\text{μισό του}\\ \text{διαστή-}\\ \text{ματος}}\right)}=\frac{1}{\frac{2\pi}{2}}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}}$$

και $$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta\, d\theta \quad , k=1,2,\dots$$

Έχω βρει:

$$f\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)$$ την σειρά Fourier της f.

(Δεν είναι πάντα "=" , συγκλίνει;)

- Τι σημαίνει $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει; A

Φτιάχνω $S_N=\sum_{k=0}^{N} c_k$, $\exists \lim\limits_{\substack{N\to+\infty\\ \text{στο } \mathbb{R}}} S_N \overset{\text{"}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ $(n_0=n_0(\varepsilon))$ τ.ω. $|S_N-A|<\varepsilon, \forall n\geq n_0$

$\Leftrightarrow$ ακολουθία Cauchy

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $|S_N-S_M|<\varepsilon, n,m\geq$

$\Leftrightarrow \left|\sum_{k=M+1}^{\infty} c_k\right|<\varepsilon \quad \forall N,M\geq n_0$

μικρή ουρά

$f_k:[a,b]\to\mathbb{R}$

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

Σύγκλιση κατά σημείο στην $f(x)$

<u>Δηλαδή</u>, $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\left|\sum_{k=M+1}^{N} f_k(x)\right|<\varepsilon$, $N>M\geq N_0(\varepsilon,x)$ (1)

$\overset{(n)}{\Leftrightarrow} \left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon$, $N\geq N_0(\varepsilon,x)$ (2) →

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ομοιόμορφη σύγκλιση

(όποιο κι αν είναι το x)

ίδιοι αριθμοί (1),(2) με

$n_0 = n_0(\varepsilon)$ <u>χωρίς x</u>

Η ομοιόμορφη σύγκλιση διατηρεί τις ιδιότητες των f_k (ή Q_n)

$Q_n \to Q$ ομοιόμορφα

$Q_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

- Αν οι Q_n είναι συνεχείς στο x_0, τότε και η Q είναι συνεχής στο x_0 $(\forall x_0 \in [\alpha, \beta])$.
- Αν οι Q_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες, τότε και η Q είναι ολοκληρώσιμη.

Το Θεώρημα Παραγωγισιμότητας:

Αν (i) οι Q_n πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$

(ii) οι $Q_n' \to g$ ομοιόμορφη σύγκλιση

(iii) $Q_n(t_0)$ συγκλίνουσα ακολουθία αριθμών ($t_0 \in [\alpha, \beta]$ σταθεροποιημένο)

<u>Τότε</u>:

(α) $Q_n \to Q$ συγκλίνει ομοιόμορφα (κάπου στην Q)

(β) Η Q είναι παραγωγίσιμη

(γ) και μάλιστα, $Q' = g$ $\quad (Q'(x) = g(x))$

- Φτιάχνω $S_N(p, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} p^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{k=1}^{N} p^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ συγκλίνει κατά σημείο και ομοιόμορφα στο $|x| \leq \alpha < 1$, $\forall \alpha \in (0,1)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$ συγκλίνει κατά σημείο και ομοιόμορφα στο $|x| \leq \alpha < 1$, $\forall \alpha \in (0,1)$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (ακτίνα σύγκλισης $+\infty$)

(και sinx, cosx, sinhx, coshx ← το ίδιο)

• Θέλω να υπολογίσω το A_N.
Τύπος Euler : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$

$$\tilde{A}_N = 1+2\sum_{k=1}^{N} p^k (\cos k(t-\theta) + i\sin(k(t-\theta)) = e^{ik(t-\theta)} = 1+2\sum_{k=1}^{N} p^k e^{ik(t-\theta)} =$$

$$= 1+2\sum_{k=1}^{N}\left(pe^{i(t-\theta)}\right)^k = 1+2\left(pe^{i(t-\theta)}\right)\sum_{k=1}^{N}\left(pe^{i(t-\theta)}\right)^{k-1} = 1+2pe^{i(t-\theta)} \cdot \frac{\left(pe^{i(t-\theta)}\right)^N - 1}{pe^{i(t-\theta)}-1}$$

Αν $x = pe^{i(t-\theta)}$ με $|x|<1$, τότε $\tilde{A}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1+x}{1-x}$

$$\tilde{A}_N \longrightarrow \frac{1+pe^{i(t-\theta)}}{1-pe^{i(t-\theta)}} , \ |p|<1 \ (\text{στο } \mathbb{R})$$

Άρα, $A_N = \mathrm{Re}(\tilde{A}_N)$ $\qquad \left(\overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i\sin x} = \cos x - i\sin x = e^{-ix}\right)$

$$\frac{1+pe^{i(t-\theta)}}{1-pe^{i(t-\theta)}} = \frac{1+pe^{i(t-\theta)}}{1-pe^{i(t-\theta)}} \cdot \frac{1-pe^{i(\theta-t)}}{1-pe^{i(\theta-t)}} = \frac{1-pe^{-i(t-\theta)}+pe^{i(t-\theta)}-p^2}{(1-p\cos(t-\theta))^2+p^2\sin^2(t-\theta)} =$$

$$= \frac{1-p^2+p(\cos(t-\theta)+i\sin(t-\theta)) - p(\cos(t-\theta)-i\sin(t-\theta))}{1-2p\cos(t-\theta)+p^2} = \frac{1-p^2+2pi\sin(t-\theta)}{1-2p\cos(t-\theta)+p^2}$$, δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \mathrm{Re}(\text{ορίου}) = \frac{1-p^2}{1-2p\cos(t-\theta)+p^2} , \ |p|<1$$

κατά σημείο, ομοιόμορφα
$|p| \leq \alpha < 1 \ \forall \alpha \in (0,+\infty)$

$\lim_{N\to\infty} S_N(p,\theta)$ υπάρχει για $|p|<1$ και είναι ίσο με : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \frac{1-p^2}{1-2p\cos(t-\theta)+p^2} dt = U(p,\theta)$

(κατά σημείο σύγκλιση)

→ Αυτός ονομάζεται τύπος του Poisson ή πυρήνας Poisson για ύπαρξη λύσης $|p|<1$

Σειρές Fourier

Έστω ακολουθία συναρτήσεων $X_i : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $i = 1, 2, 3, \ldots \in \mathbb{N}$ συνεχείς

Στις $C[\alpha, \beta]$ ορίζω εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g \rangle = \int_\alpha^\beta f(t) g(t) dt$$

- Τι σημαίνει ότι το $\langle f, g \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο, (γενικά)

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

$$C[\alpha,\beta] \times C[\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \quad (\text{συνεχείς στο } [\alpha,\beta] \to \mathbb{R})$$

$$\langle f, g \rangle \longmapsto \int_\alpha^\beta f(t) g(t) dt$$

(i) $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$

(ii) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

(iii) $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle f, h \rangle$ γραμμικότητα ως προς την 1η μεταβλητή.

(iv) $\langle f, f \rangle \geq 0$ πάντα

(iv) $\Rightarrow$ Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \langle f, f \rangle^{1/2} \cdot \langle g, g \rangle^{1/2}$$

Ορίζω:

- $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ Νόρμα
- $f \perp g \iff \langle f, g \rangle = 0$ f, g κάθετες
- Λέμε τις X_i, $i \in \mathbb{N}$ ορθογώνιες συναρτήσεις αν και μόνον αν $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$

! Σε διαφορετικές ιδιοτιμές, οι ιδιοσυναρτήσεις είναι κάθετες.

- Διανύσματα

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ n-διανύσματα βάση

$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \ , \forall u$

$u \cdot u_j = \sum \lambda_i u_i u_j = \lambda_j u_j^2$, όπου $\lambda_j = \dfrac{u \cdot u_j}{\|u_j\|^2}$

εσωτερικό γινόμενο

- Το $X_i : [a,b] \to \mathbb{R} \in C[a,b]$, $i \in \mathbb{N}$ λέγεται ορθοκανονικό, αν

$<X_i, X_j> = 0 , \forall i \neq j$ ορθογώνιο

$<X_i, X_i> = 1 , \forall i$ κανονικό

$(=\delta_{ij}$ Kronecker$) = 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{N} p^k \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \cos k\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt \sin k\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{N} p^k \cos(k(t-\theta))\right]dt$$

$\boxed{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$

$1 + 2\sum p^k \cos(k(t-\theta)) = A_N$

$\boxed{\sum_{n=0}^{N} x^n = \dfrac{x^{N+1}-1}{x-1} \ , x \neq 1 \quad \text{γεωμετρική σειρά}}$

Θεώρημα

Έστω $x \in C[a,b]$, τότε $\forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

(τα X_i από βάση)

$$\int_a^b |x(t) - c_1 X_1(t) - \dots - c_n X_n(t)|^2 dt \geq \int_a^b |x(t) - a_1 X_1(t) - \dots - a_n X_n(t)|^2 dt$$

, όπου $a_i = \dfrac{\int_a^b x(t) X_i(t) dt}{\int_a^b X_i^2(t) dt}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ συντελεστές Fourier

02/04/2015

$\boxed{12^{\text{ο}} \text{ μάθημα}}$

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad X_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (συνεχείς)

$\langle X_n, X_m \rangle = 0 \,,\ \forall n \neq m$ Εσωτερικό Γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

$X \in C[a,b]$ συνεχής

$$A_i = \frac{\langle X, X_i \rangle}{\langle X_i, X_i \rangle} \quad \text{συντελεστής Fourier} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

αναπτύσσω την X σε σειρά Fourier: $X \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_i X_i$ (αν αναπτύσσεται)

$$\langle X, X_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i, X_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i X_i, X_k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \langle X_i, X_k \rangle = A_k \langle X_k, X_k \rangle + \cancel{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{\infty} A_i \langle X_i, X_k \rangle} \to 0$$

κτλ

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$

Έστω $X_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots n$) ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων και X τυχαία συνάρτηση $X : [a,b] \to \mathbb{R}$

Τότε: $\forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ έχουμε την ανισότητα:

$$\int_a^b \left| X(x) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_i(x) \right|^2 dx \geq \int_a^b \left| X(x) - \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x) \right|^2 dx$$

, όπου A_i συντελεστές Fourier

$$A_i = \frac{\int_a^b X(x) \cdot X_i(x)\, dx}{\int_a^b (X_i(x))^2\, dx} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \to$$

Απόδειξη:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\|_2 \geq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \right\|_2$$

$$\int_a^b \left| x(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(x) \right|^2 dx = \left\| x - \sum c_i x_i \right\|_2^2$$ L_2 νόρμα

$$= \int_a^b \left[x^2(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 x_i^2(x) - 2\sum_{i=1}^{n} c_i\, x(x)\, x_i(x) + 2\sum_{i<j} c_i c_j x_i x_j \right] dx \quad ⊛$$

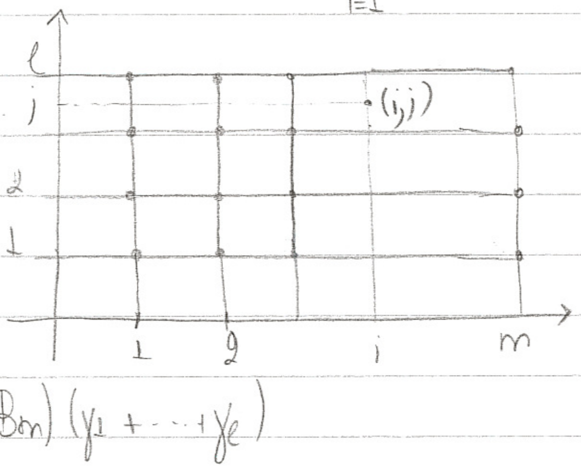
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t)\, dt, \quad \|f\|_2^2 = \int_a^b f^2(t)\, dt$$ L_2 νόρμα $L^2[a,b]$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$ άπειρη νόρμα

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$ νόρμα 1 $L^1[a,b]$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$(B_1 + \dots + B_m)^2 = \sum_{i=1}^{m} B_i^2 + 2\sum_{\substack{i<j \\ i=1}}^{m} B_i B_j$$



Δουλεύω στο πλέγμα για τους δείκτες του γινομένου

$$(B_1 + B_m)(y_1 + \dots + y_\ell)$$

$$\circledast = \int_a^b x^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \int_a^b x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b x\cdot x_i\,dx + \cancel{2\sum_{i<j} c_i c_j \int_a^b x_i x_j\,dx} \to 0$$

(ορθογώνια)

$$= \int_a^b x^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\left[c_i^2\int_a^b x_i^2\,dx - 2c_i\int_a^b x\cdot x_i\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b x^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_a^b \left(c_i^2 x_i^2 - 2c_i x x_i\right)dx =$$

$$= \quad -\|- \quad + \sum_{i=1}^{n}\int_a^b \left(c_i^2 x_i^2 - 2c_i x x_i + x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \quad -\|- \quad + \sum_{i=1}^{n}\int_a^b (c_i x_i - x)^2\,dx - n\int_a^b x^2(x)\,dx$$

Από την αρχή:

$$= \int_a^b x^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\left(c_i^2\int_a^b x_i^2\,dx - 2c_i\int_a^b x\cdot x_i\,dx\right)$$

Θέλω να ελαχιστοποιήσω το $\phi(c_i) = c_i^2\int_a^b x_i^2\,dx - 2c_i\int_a^b x\cdot x_i\,dx$ ως προς c_i

$$\left(\begin{array}{l} At^2 - 2Bt \text{ συμπλήρωση} \\ \quad\;\; \| \qquad\qquad \text{τετραγώνου} \\ A\left(t-\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A} \end{array}\right)$$

$$= \int_a^b x^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\left[\int_a^b x^2(x)\,dx\left(c_i - \frac{\int_a^b x x_i\,dx}{\int_a^b x_i^2\,dx}\right)^2 - \frac{\left(\int_a^b x\cdot x_i\,dx\right)^2}{\int_a^b x_i^2(x)\,dx}\right] =$$

→

$$= \int_\alpha^\beta X^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\int_\alpha^\beta X\cdot X_i\,dx\right)^2}{\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx} + \sum_{i=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx \underbrace{\left(C_i - \frac{\int_\alpha^\beta X X_i dx}{\int_\alpha^\beta X_i dx}\right)^2}_{\geq 0} \geq$$

το μηδενίζω $(=0)$

$$\geq \int_\alpha^\beta X^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\int_\alpha^\beta X\cdot X_i\,dx\right)^2}{\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx} = \int_\alpha^\beta X^2(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx\cdot A_i^2\right) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left| X(x) - \sum A_i X_i \right|^2 dx \qquad \left(A_i = \frac{\int_\alpha^\beta X X_i}{\int_\alpha^\beta X_i^2} \right)$$

Επιλέγω $C_i = A_i$

$\overset{n\in\mathbb{N}}{\Rightarrow}$ $$\int_\alpha^\beta |X(x) - \sum A_i X_i|^2 dx = \int_\alpha^\beta X^2(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_\alpha^\beta X_i^2(x)\,dx\cdot A_i^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx\, A_i^2}_{S_n} \leq \underbrace{\int_\alpha^\beta X^2(x)dx}_{\text{ομοιόμορφος}}$$

Η ακολουθία S_n είναι φραγμένη, $\forall n\in\mathbb{N}$ με σειρά $\sum_{i=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx\, A_i \leq \int_\alpha^\beta X^2(x)dx$

Η σειρά συγκλίνει   Ανισότητα Bessel

- $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i$ δεν ξέρω πως σχετίζονται

$\boxed{\text{Ορισμός}}$

Αν $X_i \in L^2[\alpha,\beta]$ ορθογώνιο σύστημα τ.ω. $\forall X \in L^2[\alpha,\beta]$ με $X_i = \frac{\int_\alpha^\beta X X_i}{\int_\alpha^\beta X_i^2}$, $i=1,2,$

και $\sum_{i=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta X_i^2(x)dx = \int_\alpha^\beta X^2(x)dx$ (Ταυτότητα Parseval)

, το ορθογώνιο σύστημα είναι πλήρες

$X \sim \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i$ σειρά Fourier , X_i ορθογώνια

Τα X_i είναι πλήρες σύστημα αν και μόνο αν $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i X_i(x)$

$S_n \xrightarrow{L^2} X$ συγκλίνει στην L^2 νόρμα

$\lim_{n\to+\infty} S_n \overset{L^2}{=} X$

δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |S_n(x) - X(x)|^2 dx = 0$

$$\int_a^b |X(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i X_i^2|^2 dx = \int_a^b |S_n(x) - X(x)|^2 dx = \int_a^b X^2(x) dx - \sum_{i=1}^{n} \int_a^b X_i^2(x) A_i dx$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |X(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_a^b X^2(x) dx - \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} X_i^2(x) dx A_i = 0$$

L^2 σύγκλιση

πχ

Το ορθογώνιο σύστημα $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$ $([0,\pi])$ είναι πλήρες σύστημα στο $L^2[0,\pi]$.

Το $1, \cos kx, \sin kx$ $([0, 2\pi])$ είναι πλήρες σύστημα στο $L^2[0, 2\pi]$

Η ακολουθία Fourier συγκλίνει στην L^2 νόρμα.

Μη πλήρη συστήματα

Π.χ $\sin 2x, \sin 3x, \ldots, n \geq 2$ στο $[0,\pi]$ είναι ορθογώνιο σύστημα.

Δεν είναι πλήρες, διότι μπορώ να βρω μια συνάρτηση στον $L^2[a,b]$, $(X(x) = \sin x)$ με συντελεστές Fourier ως προς αυτό το ορθογώνιο σύστημα $\sin 2x, \sin 3x, \ldots, n \geq 2$ είναι $A_k = 0$ $k = 2, 3, 4, \ldots$

$A_k = \dfrac{\int_0^\pi \sin x \sin kx \, dx}{\int_0^\pi \sin^2 x \, dx} = 0$ Θα έπρεπε $\sin x \sim 0$ (κάτι που δεν ισχύει)

Ερώτημα: Πότε ισχύει $X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x)$;

21/04/2015

13ο μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 3

Άσκηση 2

$2u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) + u_{xt} = f(x,t) \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$

$u(x,0) = 0 \quad x\in\mathbb{R}$

$u_t(x,0) = 0 \quad x\in\mathbb{R}$

Λύση

$$\left(2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)u = f(x,t) \Rightarrow 2\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x,t)$$

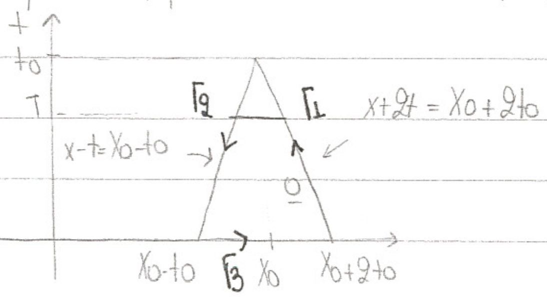
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4\cdot 2\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = 9\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial}{\partial t} \pm 3\frac{\partial}{\partial t}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x,t)$$

Οι $g(x+2t)$, $h(t-x)$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δε για οποιεσδήποτε 2 φορές παραγωγίσιμες g, h.

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι $x+2t = x_0+2t_0$, $x-t = x_0-t_0$



→

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)dx\,dt \quad \int_{\partial\Omega}(P\,dx+Q\,dt)$$

Επιλέγουμε $Q=2u_x+u_t$
και $P=u_t$

Τότε:

$$\iint_{\Omega}(2u_{xx}-u_{tt}+u_{xt})\,dx\,dy=\iint_{\Omega}f(x,t)\,dx\,dt=\int_0^{t_0}\int_{x_0-t_0+\tau}^{x_0+2t_0-2\tau}f(x,\tau)\,dx\,d\tau=\int_{\Omega}(u_t\,dx+(2u_x+u_t)dt)$$

$\boxed{\Sigma\text{το } \Gamma_1}$

$$x+2t=x_0+2t_0 \Rightarrow dx+2dt=0$$

$$\int_{\Gamma_1}u_t\,dx+(2u_x+u_t)dt=\int_{\Gamma_1}(-2u_t\,dt-u_x\,dx+u_t\,dt)=\int_{\Gamma_1}-u_t\,dt-u_x\,dx=-\int_{\Gamma_1}\underbrace{u_t\,dt+u_x\,dx}_{du}=$$

(τέλειο διαφορικ

$$=-\int_{\Gamma_1}du=-\left[u(x_0,t_0)-\cancelto{0}{u(x_0+2t_0,0)}\right]=-u(x_0,t_0)$$

$\boxed{\Sigma\text{το } \Gamma_2}$

$$x-t=x_0-t_0 \Rightarrow dx=dt$$

$$\int_{\Gamma_2}(u_t\,dx+(2u_x+u_t)dt)=\int_{\Gamma_2}2u_t\,dt+2u_x\,dx=2\int_{\Gamma_2}du=2\left[\cancelto{0}{u(x_0-t_0,0)}-u(x_0,t_0)\right]=-2u(x_0,t_0)$$

$\boxed{\Sigma\text{το } \Gamma_3}$

$$t=0 \Rightarrow dt=0$$

$$\int_{\Gamma_3}(u_t\,dx+(2u_x+\cancelto{0}{u_t})dt)=\int_{\Gamma_3}\cancelto{0}{u_t(x,0)}\,dx=0$$

Οπότε, $-u(x_0,t_0)-2u(x_0,t_0)=\int_0^{t_0}\int_{x_0-t_0+\tau}^{x_0+t_0-2\tau}f(x,\tau)\,dx\,d\tau \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x_0,t_0)=-\frac{1}{3}\int_0^{t_0}\int_{x_0-t_0+\tau}^{x_0+t_0-2\tau}f(x,\tau)\,dx\,d\tau$$

Άσκηση 4

Δείξτε με τη μέθοδο της ενέργειας Cauchy

$$u_{tt}(x,t) - u_{xt}(x,t) = f(x,t) \quad , x\in\mathbb{R}, \ t>0$$

$$u(x,0) = g(x) \quad , x\in\mathbb{R}$$

$$u_t(x,0) = h(x) \quad , x\in\mathbb{R}$$

έχει το πολύ μια λύση

Λύση

Έστω δύο διαφορετικές λύσεις u_1, u_2.

Η $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ λύνει το αντίστοιχο ομογενές:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xt} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Έχουμε βρει επίσης, από την άσκηση 1 τις χαρακτηριστικές καμπύλες:

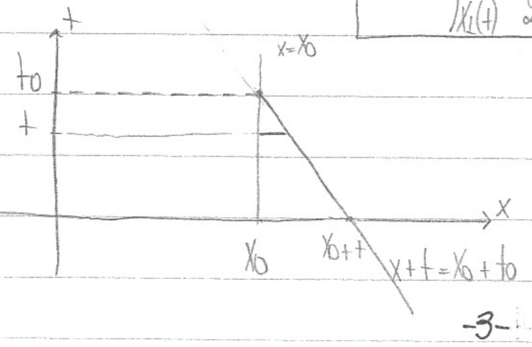
$$\begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x \end{cases}$$

$\boxed{\text{Πρόχειρο}}$

$$\int_{x_1}^{x_2} w_t (w_{tt} - w_{xt})\, dx = \int_{x_1}^{x_2} w_t \cdot w_{tt}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} w_t \cdot w_{xt}\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} w_t^2\right) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} w_t^2\right) dx =$$

Η ενέργεια του συστήματος είναι: $\boxed{E(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{2} w_t^2\, dx}$



→

$$E'(t) = \frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{2} w_t^2(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_2(t)} \frac{1}{2} w_t^2(x,t)\,dx =$$

$$(w_{tt} = w_{xt})$$

$$= \frac{1}{2} w_t^2(x_2(t),t)\cdot x_2'(t) + \int_{x_0}^{x_2(t)} w_t(x,t)\cdot w_{tt}(x,t)\,dx = -\frac{1}{2} w_t^2(x_2(t),t) + \int_{x_0}^{x_2(t)} w_t\, w_{xt}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} w_t^2(x_2(t),t) + \int_{x_0}^{x_2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2} w_t^2\right)dx = -\frac{1}{2}\cancel{w_t^2(x_2(t),t)} + \frac{1}{2}\cancel{w_t^2(x_2(t),t)} - \frac{1}{2} w_t^2(x_0,t) \le 0$$

Άρα, $E'(t) \le 0$, $t \ge 0$, οπότε E φθίνουσα

Επομένως, $0 \le E(t) \le E(0) = 0$ $t \ge 0$ $\qquad E(0) = \int_{x_0}^{x_2(0)} \frac{1}{2} w_t^2(x,0)\,dx = 0$

$\Rightarrow E(t) = 0$ $\quad t \ge 0$

$E(t) = 0 \Rightarrow w_t^2 = 0 \Rightarrow w_t = 0$, $0 \le t \le t_0$

$\exists \xi \in (0,t)$

$w(x,t) - w(x,0) = (t-0)\,w_t(x_0,\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow w(x_0,t) = 0$ άτοπο.

Άσκηση 3

$u_{tt}(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $0<x<1$, $t>0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $0<x<1$

$u_t(x,0) = \psi(x)$, $0<x<1$ $\quad\rightarrow$ έχει το πολύ μία λύση

$u(0,t) = h(t)$, $t>0$

$u(1,t) = g(t)$, $t>0$

Λύση: (με τη μέθοδο της ενέργειας)

Έστω δύο διακεκριμένες λύσεις u_1, u_2. Τότε, η $w(x,t)$ λύνει το αντίστοιχο ομογενές πρόβλ/μα

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xxt} - w_{xx} = 0 & \\ w(x,0) = 0, & 0<x<1 \\ w_t(x,0) = 0, & 0<x<1 \\ w(0,t) = 0, & t>0 \\ w(1,t) = 0, & t>0 \end{cases} \rightarrow$$

ενέργεια του συστήματος

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t)\right)dx$$

$$E'(t) = \int_0^1 (w_x w_{xt} + w_t w_{tt})\, dx = \int_0^1 \left[w_x \cdot w_{xt} + w_t\,(w_{xxt} + w_{xx})\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (w_x w_{xt} + w_t \cdot w_{xxt} + w_t w_{xx})\, dx =$$

$$= \left[w_x w_t\right]_0^1 - \cancel{\int_0^1 w_t w_{xx} dx} + \int_0^1 w_t w_{xxt} + \cancel{\int_0^1 w_t w_{xx} dx} =$$

$$= \big(w_x(1,t)\underbrace{w_t(1,t)}_{\substack{0 \\ (\text{γιατί } w(1,t)=0)}} - w_x(0,t)\underbrace{w_t(0,t)}_{\substack{0 \\ (\text{γιατί } w(0,t)=0)}}\big) + \int_0^1 w_t w_{xxt}\, dx =$$

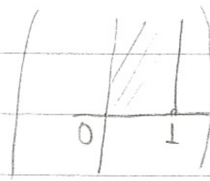
$$\overset{\text{ολοκλήρωση κατά μέρη}}{=} \left[w_t w_{xt}\right]_0^1 - \int_0^1 w_{tx}^2\, dx = \left[w_t(1,t)\,\cancelto{0}{w_{xt}(1,t)} - w_t(0,t)\,\cancelto{0}{w_{xt}(0,t)}\right] = -\int_0^1 w_{tx}^2\, dx \le 0$$

Άρα, $E'(t) \le 0$ οπότε $E(t)$ φθίνουσα

Επομένως, για $t>0 \Rightarrow 0 \le E(t) < E(0) = 0$

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\underbrace{w_x^2(x,0)}_{0} + \underbrace{w_t^2(x,0)}_{0}\big)dx = 0$$

$\left(\text{γιατί } w(x,0)=0 \Rightarrow w_x^2(x,0)=0\right)$



Οπότε, $E(t)=0 \Rightarrow w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t) = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} & w_x(x,t) = 0 \\ \text{και } & w_t(x,t) = 0 \end{aligned}\right\}$

$\exists \xi: \ w(x,t) - w(x,0) = (t-0)\, w_t(x, \xi_t)$

$\Rightarrow w(x,t) = 0$ άτοπο

$\boxed{\text{Ασκήσεις / φυλλάδιο 4}}$

$\boxed{\text{Ασκ 4}}$

Με τη μέθοδο του Fourier να βρείτε τη γενική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & , 0 < x < \pi \ , t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Λύση:

Ψάχνω λύσεις στη μορφή $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$

$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(\pi) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(\pi) = 0}$

$u_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$

$u_{xx}(x,t) = X''(x) \cdot T(t)$

$u_{xxt}(x,t) = X''(x) \cdot T'(t)$

$u_t - u_{xxt} - u_{xx} = 0$

$$\Rightarrow X(x) \cdot T'(t) - X''(x) \cdot T'(t) - X''(x) \, T(t) = 0 \overset{X(x) \cdot T(t) \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x) \, T'(t)}{X(x) \cdot T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} \left(1 - \frac{X''(x)}{X(x)} \right) = \frac{X''(x)}{X(x)} \overset{\frac{X''(x)}{X(x)} \neq 1}{\Longrightarrow} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\frac{X'(x)}{X(x)}}{1 - \frac{X''(x)}{X(x)}} \overset{\exists \lambda \in \mathbb{R}}{=} -\lambda$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \left(1 - \frac{X''(x)}{X(x)} \right) \Rightarrow X''(x) = -\lambda \left(X(x) - X''(x) \right) \Rightarrow (1-\lambda) X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$\overset{\lambda \neq 1}{\Longrightarrow} \boxed{X''(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} X(x) = 0} \qquad X(0) = X(\pi) = 0 \qquad \rightarrow$$

αλλιώς $X(x) \equiv 0$ απορρίπτεται (δεν θέλω τετριμμένη λύση)

Διακρίνω περιπτώσεις για το λ:

(α) $\boxed{\text{αν } \lambda=0}$

$X''(x)=0 \overset{\exists c_1 \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} X'(x)=c_1 \overset{\exists c_2 \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} X(x)=c_1 x + c_2$

$X(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \rightsquigarrow X(x)=c_1 x$

$X(\pi)=0 \Rightarrow c_1 \cdot \pi = 0 \Rightarrow c_1=0$

απορρίπτεται

Χαρακτηριστική εξίσωση $\mu^2 + \frac{\lambda}{1-\lambda} = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$

1η περίπτωση

- αν $\frac{-\lambda}{1-\lambda} > 0 \Leftrightarrow (-\lambda)(1-\lambda)>0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)>0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

άρα $X(x) = c_1 e^{\mu_1(\lambda)x} + c_2 e^{\mu_2(\lambda)x}$ $\quad$ ($\mu_1(\lambda)>0$ η μία θετική, η άλλη $\mu_2(\lambda)<0$ αρνητική)

$X(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -c_1}$

$X(\pi)=0 \Rightarrow c_1 e^{\mu_1(\lambda)\pi} + c_2 e^{\mu_2(\lambda)\pi} = 0 \Rightarrow c_1\left(e^{\mu_1(\lambda)\pi} - e^{\mu_2(\lambda)\pi}\right)=0 \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow c_2=0$

απορρίπτεται

2η περίπτωση

- αν $\frac{-\lambda}{1-\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0,1)$

$-p^2 = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$, $p>0$

$\mu^2 = -p^2 = p^2 i^2 \Rightarrow \boxed{\mu = \pm ip}$

άρα

$X(x) = c_1\cos(px) + c_2\sin(px)$

$X(0)=0 \Rightarrow c_1 = 0 \rightsquigarrow X(x) = c_2\sin(px)$

$X(\pi)=0 \Rightarrow c_2\sin(p\pi)=0 \Rightarrow \sin(p\pi)=\sin 0 \Rightarrow p\pi = k\pi,\ k\in\mathbb{N} \Rightarrow \boxed{p=k,\ k\in\mathbb{N}}$

Η ιδιοσυνάρτηση λοιπόν, είναι: $\boxed{X_k(x) = \sin(kx)}$

$\frac{\lambda}{1-\lambda} = k^2 \Rightarrow \lambda = k^2(1-\lambda) \Rightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{k^2}{1+k^2} \quad k\in\mathbb{N}}$

Γυρίζουμε τώρα στο δεύτερο πρόβλημα:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = ce^{-\lambda t} \Rightarrow T_k(t) = e^{-\frac{k^2}{1+k^2}t}$$

$$u_k(x,t) = \sin(kx)\, e^{-\frac{k^2}{1+k^2}t}$$

Γενική Λύση

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)\, e^{-\frac{k^2}{1+k^2}t}}$$

πχ (Υπενθύμιση)

① $\begin{cases} X''(x) + p\,X(x) = 0 \quad 0<x<\pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$

$p_k = k^2$, $X_k(x) = \sin(kx)$

ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

② $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $0<x<2\pi$

$\left.\begin{matrix} X(0) = X(2\pi) \\ X'(0) = X'(2\pi) \end{matrix}\right\}$ περιοδικές ΣΣ

ιδιοτιμές $\lambda_0 = 0 \rightarrow X_0(x) = 1$

$\lambda_k = k^2 \rightarrow X_k(x) \rightarrow \cos(k\theta)$, $\sin(k\theta)$ $\Big|$ $a_k\cos(k\theta) + b_k\cos(k\theta)$

23/04/2015

$\boxed{\text{14ο μάθημα}}$

$\boxed{\text{Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις}}$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (από προηγούμενο μάθημα)

Έστω X_n ορθογώνια βάση. Αν $f \in L^2[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει η ανισότητα Bessel.

Δηλαδή, $\sum a_n^2 \|X_n\|^2_{L^2} \leq \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$, όπου $a_n = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(x) X_n(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta X_n^2(x)\,dx}$, $n=1,2,\ldots$ ↳ συντελεστές Fourier

και $\|X_n\|^2_{L^2[\alpha,\beta]} = \int_\alpha^\beta X_n^2(x)\,dx$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Ταυτότητα Parseval)

Έστω X_n πλήρης ορθογώνια βάση στο $L^2[\alpha,\beta]$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_\alpha^\beta X_n^2(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$$

όπου $a_n = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(x) X_n(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta X_n^2(x)\,dx}$, $n=1,2,\ldots$

Απόδειξη (Υπενθύμιση)

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \int_\alpha^\beta X_i^2(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \Big|f(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i X_i\Big|^2 dx$$

$$\Rightarrow \lim \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \int_\alpha^\beta X_n^2(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$$

"Υπενθύμιση"

• Έστω X_n ορθογώνια βάση πλήρης

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$$

$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n X_n(x) \rightarrow$ ακολουθία μερικών αθροισμάτων

ορισμός:

πλήρης $\lim S_N(x) \overset{L^2[\alpha,\beta]}{=} f(x)$

, δηλαδή $\lim_{N\to+\infty} \int_\alpha^\beta |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$

• Επίσης, δείξαμε ότι: (συντελεστές Fourier)

$$\int_\alpha^\beta \Big| f(x) - \sum_{i=1}^{N} c_i X_i\Big|^2 dx \geq \int_\alpha^\beta \Big|f(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i X_i\Big|^2 dx = $$

$$= \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \int_\alpha^\beta X_i^2(x)\,dx$$

οπότε

$\boxed{\text{Εφαρμογές}}$ (Ταυτότητα Parseval)

① Έστω f περιοδική με περίοδο 2π, ολοκληρώσιμη, τότε

$$f \sim \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{A_0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Οι συναρτήσεις $1, \cos kx, \sin kx$ είναι πλήρες σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων ($k \in \mathbb{N}$)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin lx\,dx, \quad l=1,2,\dots$$

Έστω $\frac{a_0}{2} = A_0$

Η ταυτότητα του Parseval παίρνει τη μορφή:

$$A_0^2 \int_0^{2\pi} 1\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2 kx}_{=\pi} + b_k^2 \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2 kx\,dx}_{=\pi}\right) = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow A_0^2 \cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\pi = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_0^2}{2}\pi + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\pi = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum (a_k^2 + b_k^2)\right)\cdot\pi = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$$

② Οι συναρτήσεις $\sin kx$, $k \in \mathbb{N}$ είναι πλήρης ορθοκανονική βάση στο $L^2[a,b]$, και αν $f \in L^2[a,b]$:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad , \text{ όπου } b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \quad , \ k=1,2,\ldots$$

Τότε η ταυτότητα Parseval παίρνει τη μορφή:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{Πάντα είναι το μισό του μήκους}} = \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f <u>2π περιοδική</u> συνάρτηση, <u>$C^1(\mathbb{R})$</u> συνάρτηση.

Τότε, αν
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx \ , \ k=0,1,2,\ldots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx \ , \ k=1,2,\ldots$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$$

<u>Τότε</u>:

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)}_{} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

↳ αφού έχουμε ισότητα, σημαίνει ότι η σειρά συγκλίνει κατά σημείο

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$

Όμως, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx \quad k=0,1,\ldots$ και $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$

→

Οπότε, $S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)dy + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(y)\cos ky\,dy\cos kx + \int_0^{2\pi} f(y)\sin ky\,dy\sin kx\right.$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{N}\underbrace{\left(\cos ky\sin kx + \sin ky\sin kx\right)}_{\cos(k(x-y))}\right.f(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(k(x-y))\right)f(y)dy$$

$\circledast$ $e^{it} = \cos t + i\sin t$

$\cos(k(x-y)) = \frac{1}{2}\left(e^{k(y-x)i} + e^{-k(y-x)i}\right)$

(από $\circledast$) $$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(e^{k(y-x)i} + e^{-k(y-x)i}\right)\right)f(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{k(y-x)i}\right)f(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{-N(y-x)i}\sum_{k=0}^{2N} e^{k(y-x)i}\right)f(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{-N(y-x)i}\,\frac{1-e^{(2N+1)(y-x)i}}{1-e^{(y-x)i}}\right)f(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{-N(y-x)i} - e^{(N+1)(y-x)i}}{1-e^{(y-x)i}}\right)f(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{-(N+\frac{1}{2})(y-x)i} - e^{(N+\frac{1}{2})(y-x)i}}{e^{-\frac{(y-x)}{2}i} - e^{\frac{y-x}{2}i}}\right)f(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-2i\sin\left((N+\frac{1}{2})(y-x)\right)}{-2i\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}\right)f(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})(y-x)\right)}{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}\right)f(y)dy$$

$$\boxed{K_N(y-x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})(y-x)\right)}{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)} \rightarrow \text{Πυρήνας Poisson}}$$

Θέτω $\theta = y - x \Rightarrow y = \theta + x$

Οπότε, $S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi - x}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}f(\theta + x)\,d\theta$ $\circledast$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$

Έστω g συνεχής, 2π περιοδική συνάρτηση

Τότε, $\int_0^{2\pi} g(t)dt = \int_x^{2\pi+x} g(t)dt$.

$$\int_x^{2\pi+x} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_x^{2\pi} \cdots + \int_{2\pi}^{2\pi+x} \cdots - \int_0^x g(t)dt$$

$\boxed{g(t+2\pi)=g(t)}$

συνέχεια (απόδειξης θεωρήματος):

(από άσκηση)

$$\text{άρα, } (*) \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} f(\theta+x)d\theta$$

Οπότε:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} f(x)d\theta$$

Επειδή $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = 1$,

γιατί:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{N} \cos k\theta \cos kx + \sin k\theta \sin kx\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos k\theta \cos kx}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin k\theta \sin kx}_{0}\right)$$

$$= 1$$

θα έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} f(x)d\theta$$

$$\Downarrow$$

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta \underbrace{\left(\frac{f(\theta+x)-f(x)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}_{g(\theta)} d\theta$$

$\rightarrow$

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta \cdot g(\theta)\,d\theta$$

• $\lim \int_0^{2\pi} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) g(\theta)\,d\theta = 0$

γιατί;

$\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$, $N=0,1,2,\dots$

$$\begin{cases} X''(\theta) + \left(N+\frac{1}{2}\right)^2 X(\theta) = 0, & 0 \le \theta \le 2\pi \\ X(0)=0, \; X(2\pi)=0 & \text{Dirichlet ΣΣ} \end{cases}$$

(θα μπορούσα και Neumann ΣΣ: $X'(-\pi) = X'(\pi) = 0$)

$\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta$, $N=0,1,\dots$ → ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_k = \left(N+\frac{1}{2}\right)^2$

άρα, ορθογώνιες μεταξύ τους.

Οπότε, $g \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta$, με $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta \cdot g(\theta)\,d\theta$ $k=0,1,\dots$

Επομένως, η ανισότητα Bessel είναι:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2\right)\pi \le \int_0^{2\pi} g^2(\theta)\,d\theta$$

$$\boxed{\begin{gathered} ! \; \textstyle\sum b_k^2 \text{ συγκλίνει} \\ \Downarrow \\ \lim_{k\to+\infty} b_k = 0 \end{gathered}}$$

28/04/2015

15ο μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

__Ερώτημα:__ Πότε η $f:[0,2\pi]$ είναι κατά τμήματα C^1 συνάρτηση;

__Απαίτηση:__ Αν $f\in C^1((x_i, x_{i+1}))$ και $\exists \lim\limits_{x\to x_{i+1}^-} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_i^+} f'(x)$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\exists \lim_{x\to x_{i+1}^-} f(x) \qquad \exists \lim_{x\to x_i^+} f(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα C^1 συνάρτηση.
Αν $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$, τότε:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \begin{cases} \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\in(0,2\pi) \\[2ex] \dfrac{f(0^+)+f(2\pi^-)}{2}, & x\in\{0,2\pi\} \end{cases}$$

$-\|-$

, όπου $\left.\begin{array}{l} x^+ = \lim\limits_{y\to x^+} f(y) \\ \text{και } x^- = \lim\limits_{y\to x^-} f(y) \end{array}\right\}$

__Απόδειξη:__ όμοια με το προηγούμενο θεώρημα

→

Στοιχεία Απόδειξης

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(όπως προηγ θεώρημα)

$$S_N(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} f(x+\theta)d\theta - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot (f(x+\theta)-f(x^-))d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} (f(x+\theta)-f(x^+))d\theta \to 0$$

$\left(\sin(N+\frac{1}{2})\theta \ , N=1,2,\dots \quad [-\pi,0] \ [0,\pi] \right.$

Ανισότητα Bessel $\Rightarrow \dots \Big)$

$\boxed{\text{Ερώτημα}}$: Και f 2π περιοδική!

Έστω $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με f' ολοκληρώσιμη και $f \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$

(! οι συντελεστές Fourier a_k, b_k ορίζονται αν υπάρχουν τα $\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$ αντίστοιχα.)

$$f' \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos kx + b_k'\sin kx), \text{ όπου } a_i' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx\,dx \quad , k=1,2,\dots$$

$$b_i' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\,dx$$

Πως σχετίζονται οι συντελεστές Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f';

"Υπενθύμιση"
αν $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad |x|<R$, τότε $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, $|x|<R$.

→

Οπότε:

$a_0' = 0$, $a_k' = k b_k$, $b_k' = -k a_k$ ← συσχέτιση των συντελεστών Fourier της f
με τους συντελεστές Fourier της f'

$\boxed{\text{Απάντηση}}$ (στο ερώτημα)

Ναι, ισχύει $a_0' = 0$, $a_k'(f') = k b_k(f)$, $b_k'(f') = -k a_k'(f)$

Απόδειξη:

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(s)ds = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{f(2\pi) - f(0)}\right] = 0$$

$f(2\pi) - f(0) = 0$

$$a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx\, dx = k\cdot \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx}_{b_k} + \frac{1}{\pi}\left[\cancel{f(x)\cos kx}\right]_0^{2\pi}$$

$= k b_k$

Ομοίως, $b_k' = -k a_k'$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$

Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π περιοδική και αν $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Τότε $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x)$ ομοιόμορφα

Απόδειξη:

Υπενθύμιση:

Κριτήριο (για ομοιόμ. σύγκλιση) $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left|\sum_{n=k}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, $m > k \geq n_0$ — ομοιόμορφη ακολουθία Cauchy

$\boxed{\text{Κριτήριο Weierstrass}}$: $|f_n(x)| < M_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση

(Απόδειξη Θεωρήματος):

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$|a_k \cos kx| \leq |a_k|$, $|S_N(x)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{N} (|a_k| + |b_k|)$

Είδαμε ότι $f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (k b_k \cos kx - k a_k \sin kx)$ (*)

Ανισότητα Bessel:

$f \in L^2[a,b]$, X_i ορθογώνιο σύστημα

$$a_i = \frac{\int_a^b f(x) X_i(x) dx}{\int_a^b X_i^2 dx}$$

συντελεστής Fourier της f

Ανισότητα Bessel:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_a^b X_i^2(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\text{Bessel} \Rightarrow \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

$$(*) \overset{\text{(Bessel)}}{\Rightarrow} \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 b_k^2 + k^2 a_k^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$$

$$|S_N(x)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} k (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{|a_0|}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ομοιόμορφη σύγκλιση (από κριτήριο Weierstrass)

05/05/2015

16ο μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Εξίσωση θερμότητας (σε άφρακτο χωρίο)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Η μέθοδος Fourier για το πρόβλημα αυτό.
Ψάχνω λύσεις στη μορφή: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \overset{\exists \lambda \in \mathbb{R}}{=} -\lambda$$

Οπότε, έχω να λύσω το σύστημα:

$$① \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in \mathbb{R} \quad (*) \\ X \text{ φραγμένη} \end{cases}$$

$$② \ \{ \ T'(t) + T(t) = 0$$

Για το ①: $p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda$

(i) αν $\lambda < 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$, άρα η γενική λύση της (*) είναι $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $x \in \mathbb{R}$
Για να είναι η X φραγμένη, πρέπει $c_1 = c_2 = 0$.

(ii) αν $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x$ για να είναι η X φραγμένη πρέπει $c_2 = 0$
οπότε $X_0(x) = 1$.

(iii) αν $\lambda > 0 \Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$, άρα η γενική λύση της (*) είναι $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, $x \in \mathbb{R}$

(ιδιοτιμές του προβλήματος → όλοι οι θετικοί)

$\boxed{\text{Για το } ②}$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{T(t) = ce^{-\lambda t}}$$

<u>Άρα</u>: $u_\lambda(x,t) = e^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$e^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$\boxed{\text{Γενική Λύση}}$:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= \int_0^{+\infty}\left(c_1(\lambda)e^{-\lambda t}\cos\sqrt{\lambda}x\right)d\lambda \\ u_2(x,t) &= \int_0^{+\infty}\left(c_2(\lambda)e^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x)\right)d\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1, c_2 &: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ c &: [0,+\infty) \to \mathbb{C} \end{aligned}}$$

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty}\left(c(\lambda)e^{-\lambda t}e^{i\sqrt{\lambda}x}\right)d\lambda$$ → Γενική Λύση

(γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2)

$\boxed{\text{Αρχικές Συνθήκες}}$

$$u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = \int_0^{+\infty}\left(c(\lambda)e^{i\sqrt{\lambda}x}\right)d\lambda$$

$\Downarrow$

$c = c(\lambda)$

$$\left(\begin{aligned} \text{Θέτω } \sqrt{\lambda} &= t \\ \lambda &= t^2 \\ d\lambda &= 2t\,dt \end{aligned}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\int_0^{+\infty}\left(c(t^2)e^{itx}t\right)dt$$

$\boxed{\text{Άλλος τρόπος}}$ (καλύτερος)

<u>Αρχή</u>

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}(x,t)\,dx = 0$$

$\downarrow$

Διατήρηση της Θερμικής Ενέργειας

μάζα Dirac

$\delta_0(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\delta_0 \geq 0$

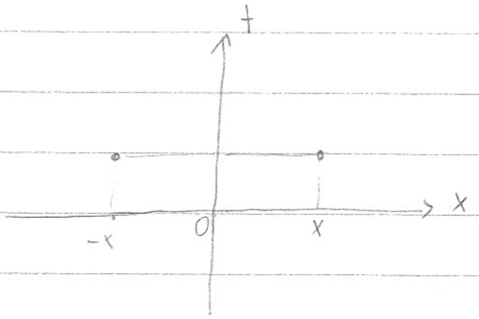
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)dx = 1 \quad , \delta_0(x) = 0 \quad , \forall x \neq 0$

(όταν το πρόβλημα έχει συμμετρίες, τότε μπορώ να βρω λύση)

Θέλω να λύσω το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \delta_0 \end{cases}$$

$u(x,t) = u(-x,t)$



$u_t(-x,t)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u(-x,t)\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial x} u_x(-x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(-x) =$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-u_x(-x,t)\right) = u_{xx}(-x,t)$

είναι επίσης λύση

Αν $u(x,t)$ λύση της $u_t = u_{xx} \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad \Rightarrow u(\lambda x, \lambda^2 t) = v(x,t)$

$\Rightarrow v_t = v_{xx}$

γιατί;

$$\begin{cases} v_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(v(\lambda x, \lambda^2 t)\right) = v_t(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\lambda^2 t) = \lambda^2 v_t(\lambda x, \lambda^2 t) \\ v_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v(\lambda x, \lambda^2 t)\right) = \lambda v_x(\lambda x, \lambda^2 t) \\ v_{xx}(x,t) = \lambda^2 v_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t)$

$u(\lambda x, \lambda^2 t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$

$\left(\text{για } \lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

$\left(\Rightarrow u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi \quad \left(\frac{x}{\sqrt{t}} = \xi \Rightarrow dx = \sqrt{t}\, d\xi\right) \right)$

Ψάχνουμε για λύση στη μορφή:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x^2}{t}\right)}$$

Πρέπει $f(\infty) = 0$ όριο στο άπειρο
και $f(0) > 0$

Θέτω $\xi = \frac{x^2}{t}$

$$\begin{cases} u_t = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}} f(\xi) - \frac{x^2}{\sqrt{t} \cdot t^2} f'\left(\frac{x^2}{t}\right) \\ u_x = \frac{2x}{t^{3/2}} f'\left(\frac{x^2}{t}\right), \quad u_{xx} = \frac{2}{t^{3/2}} f'(\xi) + \frac{4x^2}{t^{5/2}} f''(\xi) \end{cases}$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{t^{3/2}}} f(\xi) - \frac{x^2}{\cancel{t^{3/2}} \cdot t} f'(\xi) = \frac{2}{\cancel{t^{3/2}}} f'(\xi) + \frac{4}{t^{3/2}} \cdot \frac{x^2}{t} \cdot f''(\xi)$$

$$\Leftrightarrow 2f'(\xi) + 4\xi f''(\xi) + \frac{1}{2} f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(f(\xi) + 4f'(\xi)\right) + \xi\left(f'(\xi) + 4f''(\xi)\right) = 0$$

$\left(\text{Έστω } \sigma(\xi) = 4f'(\xi) + f(\xi)\right)$

$$\Leftrightarrow \xi \sigma'(\xi) + \frac{1}{2}\sigma(\xi) = 0 \xRightarrow{(\text{διαιρώ με } \sqrt{\xi})} \sqrt{\xi}\, \sigma'(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot \sigma(\xi) = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\xi} \cdot \sigma(\xi)\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(\xi) = \frac{c}{\sqrt{\xi}}} \Rightarrow 4f'(\xi) + f(\xi) = \frac{c}{\sqrt{\xi}} \quad (*) \quad \xRightarrow{\boxed{c=0}}$$

$$\Rightarrow 4f'(\xi) + f(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi) = ce^{-\frac{\xi}{4}}}$$

γιατί $c=0$;

Πολλ/ζω την ⊛ με $\sqrt{\xi}$: $\quad 4\sqrt{\xi}\, f'(\xi) + \sqrt{\xi}\, f(\xi) = c$

από ΘΜΤ:

$$f(2\xi) - f(\xi) = \xi\, f'(t\xi) \quad , t\xi \in (\xi, 2\xi)$$

$$4\sqrt{\xi_n}\, f'(\xi_n) + \sqrt{\xi_n}\, f(\xi_n) = c \Rightarrow \xi_n f'(\xi_n) \to 0 \Rightarrow \text{αδύνατο}$$

Οπότε, $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, c\, e^{\frac{-x^2}{4t}}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = 1 \quad (**)$$

Θέτω $\frac{x}{2\sqrt{t}} = y \Leftrightarrow dx = 2\sqrt{t}\,dy$

άρα:

$$(**) \Leftrightarrow \frac{c}{\cancel{\sqrt{t}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, 2\cancel{\sqrt{t}}\,dy = 1 \Leftrightarrow 2c \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy}_{I} = 1$$

Έστω $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \Rightarrow I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-r^2}\, r\,d\theta\,dr = 2\pi \int_{0}^{+\infty} r e^{-r^2}\,dr =$$

$$\left(\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & , \; r^2 = t \Rightarrow \\ y = r\sin\theta & , \; 2r\,dr = dt \\ r \geq 0,\; 0 \leq \theta < 2\pi & \end{array}\right)$$

$$= \pi \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt = \pi$$

άρα: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$

άρα, $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}}$

Αν $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = c_1 \delta_0 + c_\xi \delta_\xi \end{cases}$

$$u(x,t) = c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + c_\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

$$u(x,0) = f(x) \implies \boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy}$$ → <u>Λύση</u> του προβλήματος $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

07/05/2015

17ο μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad , x \geq 0 \quad , t>0 \quad \text{(στην ημιευθεία)} \\ u(x,0) = f(x) \quad , x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Λύση:

Περιττή επέκταση

Ορίζουμε $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ -f(-x) & , x<0 \end{cases}$ και λύνουμε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} & , x \in \mathbb{R} \\ w(x,0) = \bar{f}(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Είδαμε ότι η λύση είναι: $w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \bar{f}(y)\,dy$

Ισχυρίζομαι ότι αν $x \geq 0$ και θέσω $v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \bar{f}(y)\,dy =$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \underbrace{\bar{f}(y)}_{(-f(-y))}\,dy = (*)$$

Υπολογίζω το $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \bar{f}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (-f(-y))\,dy \underset{(\text{θέτω } -y=\xi)}{=} \int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} f(\xi)\,d\xi$

→

Οπότε, $(*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} f(y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right) f(y)dy$

Όμως, $v(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \Big[\underbrace{\cancel{e^{-\frac{y^2}{4t}} - e^{-\frac{y^2}{4t}}}}_{\to 0}\Big] f(y)dy = 0$

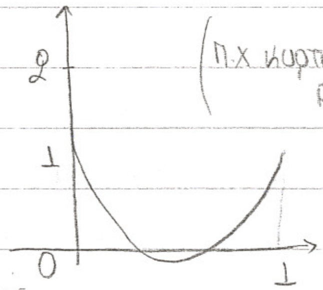
Άρα: το μηδέν είναι λύση του προβλήματος (1).

Η Αρχή Μεγίστου

Η πιο απλή περίπτωση

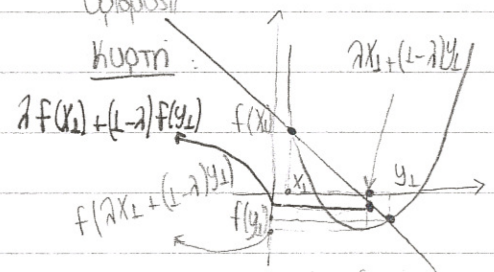
Αν η $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι κυρτή, τότε

$$\boxed{\begin{gathered} f(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(y_1) \\ \Updownarrow \text{ (αν f ομαλή)} \\ f''(x) \geq 0 \end{gathered}}$$



(π.χ κυρτής συνάρτησης

"Ορισμός" κυρτή:



η ευθεία είναι: $y - f(x_1) = \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1}(x - x_1)$

άρα: ορισμός (κυρτής)

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(y_1)$$
$$\Updownarrow \text{ αν f ομαλή}$$
$$f''(x) \geq 0$$

Πρόταση

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f''(x)+g(x)f'(x)\geq 0 \ \forall x\in[0,1]$, g συνεχής στο $[0,1]$, τότε $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=\max(f(0),f(1))$.

Απόδειξη:

Αν είχαμε $f''(x)+g(x)f'(x)>0$, $\forall x\in[0,1]$ τότε η απόδειξη είναι απλή

Έστω ότι δεν ισχύει, δηλαδή $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)\neq\max(f(0),f(1))$

Παρατήρηση

$f:B\to\mathbb{R}$

$\emptyset\neq A\subset B\subseteq\mathbb{R}$

$\sup\limits_{x\in A} f(x)\leq\sup\limits_{x\in B} f(x)$

Όμως, (από παρατήρηση)

$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)\geq\max(f(0),f(1))$.

Επομένως, $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)>\max(f(0),f(1))$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in(0,1)$, ώστε: $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=f(\xi) \Rightarrow$ (από Θεώρημα Fermat) $\boxed{\begin{gathered} f'(\xi)=0 \\ f''(\xi)\leq 0\end{gathered}}$

Άτοπο

Οπότε, $f''(x)+g(x)f'(x)>0$, $\forall x\in[0,1]$

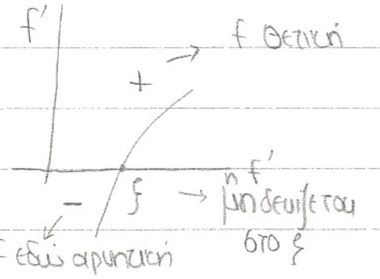
Για $x=\xi$: $f''(\xi)+g(\xi)f'(\xi)>0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0$

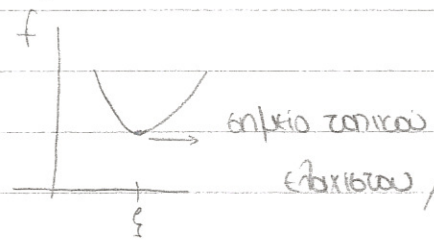
άτοπο

(!) Γιατί έχουμε $f''(\xi)\leq 0$;

αν $f''(\xi)>0 \Rightarrow f'\nearrow$



άρα:



Έστω $\varepsilon>0$.

$u(x)=\varepsilon e^{\alpha x}$

$u'(x)=\varepsilon\alpha e^{\alpha x}$ $\qquad (\alpha>0,\ \alpha>-g(x) \overset{\text{παίρνω}}{\rightsquigarrow} \alpha>\max(-g))$

$u''(x)=\varepsilon\alpha^2 e^{\alpha x}$

$u''(x)+g(x)u'(x)=\alpha^2 e^{\alpha x}+\alpha g(x)e^{\alpha x}=\varepsilon\alpha e^{\alpha x}[\alpha+g(x)]>0$

Έστω $\varepsilon>0$

Θέτουμε $f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon e^{\alpha x}$, $x\in[0,1]$

$\left(\alpha>\max\limits_{x\in[0,1]}(-g(x),0)\right)$

Τότε η f_ε ικανοποιεί $f_\varepsilon''(x)+g(x)f_\varepsilon'(x)=\underbrace{f''(x)+g(x)f(x)}_{\geq 0}+\varepsilon\alpha e^{\alpha x}[\alpha+g(x)]>0$

<u>Τότε</u> για την f_ε ισχύει:

$$\max_{x\in[0,1]} f_\varepsilon(x)=\max(f_\varepsilon(0),f_\varepsilon(1)) \qquad \left(\begin{array}{l} f_\varepsilon(0)=f(0)+\varepsilon \\ f_\varepsilon(1)=f(1)+\varepsilon e^{\alpha}\end{array}\right)$$

$$=\max(f(0),f(1))+\varepsilon e^{\alpha}$$

$$f(x)\leq f_\varepsilon(x)\leq\max_{x\in[0,1]} f_\varepsilon(x)\leq\max(f(0),f(1))+\varepsilon e^{\alpha}$$

Καταλήξαμε λοιπόν, $f(x)\leq f_\varepsilon(x)\leq\max\limits_{x\in[0,1]} f_\varepsilon(x)\leq\max(f(0),f(1))+\varepsilon e^{\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)\leq\max(f(0),f(1))+\varepsilon e^{\alpha}\ \forall x\in[0,1],\ \forall\varepsilon>0}$$

Παίρνουμε όριο με $\varepsilon\to 0^+$, οπότε:

$$\boxed{f(x)\leq\max(f(0),f(1)),\ \forall x\in[0,1]}$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} f(x)\leq\max(f(0),f(1))\overset{\text{ξέρω (από παρατήρηση)}}{\leq}\max_{x\in[0,1]} f(x)\Rightarrow \boxed{\max_{x\in[0,1]} f(x)=\max(f(0),f(1))}$$

Οπότε :

αν $f''(x) + g(x)f'(x) \geq 0$ → Αρχή Μεγίστου $\max f(x)$ στα άκρα

αν $f''(x) + g(x)f'(x) \leq 0$ → Αρχή Ελαχίστου $\min f(x)$ στα άκρα

(δηλ. $\overset{\text{πχ}}{}$ $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \min(f(0), f(1))$)

$\boxed{\text{Εφαρμογή}}$ (Μία διάσταση)

Το πρόβλημα $\begin{cases} u''(x) + g(x)u'(x) = h(x) \quad , x\in(0,1) \\ u(0) = c_1 \\ u(1) = c_2 \end{cases}$

εάν η $g\in C[0,1]$, έχει το πολύ μία λύση

Λύση

(με άτοπο)

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις, τότε $\omega(x) = u_1(x) - u_2(x)$ λύνει το πρόβλημα.

$$\begin{cases} \omega''(x) + g(x)\omega'(x) = 0 \quad , x\in[0,1] \\ \omega(0) = 0 \\ \omega(1) = 0 \end{cases}$$

Επειδή : $\omega''(x) + g(x)\omega'(x) \geq 0$, η αρχή μεγίστου δίνει ότι $\max\limits_{x\in[0,1]} \omega(x) = \max(\omega(0), \omega(1)) = 0$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\omega \leq 0}$ (ω μη θετική)

Επίσης , $\omega''(x) + g(x)\omega'(x) \leq 0$, η αρχή ελαχίστου δίνει ότι $\min\limits_{x\in[0,1]} \omega(x) = \min(\omega(0), \omega(1)) = 0$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\omega \geq 0}$ (ω θετική)

$(1),(2) \Rightarrow \omega \equiv 0$ Άτοπο. Άρα, το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση.

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ (για 2 διαστάσεις, ισχύει για >2)

Έστω $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη, $g_1, g_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και Ω συνεκτικό, ανοιχτό και φραγμένο χωρίο $\subseteq \mathbb{R}^2$

Εάν ισχύει $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + g_1(x,y)\, u_x(x,y) + g_2(x,y)\, u_y(x,y) \geq 0$, (στο Ω)

Τότε, ισχύει η αρχή μεγίστου για την u, δηλαδή:

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u}$$

18ο μάθημα 12/05/2015

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

!!! **Mail:** Να δηλώσουμε ποια φυλλάδια έχουμε στείλει υλικό και με ποιον τρόπο.

Θεώρημα (από προηγούμενη φορά)

Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, όπου Ω ανοιχτό και φραγμένο $\subset \mathbb{R}^2$, ικανοποιεί

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + g_1(x,y)\,u_x(x,y) + g_2(x,y)\,u_y(x,y) \geq 0 \qquad (x,y) \in \Omega$$

, όπου $g_1, g_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.

Τότε, ισχύει η Αρχή του Μεγίστου, δηλαδή $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(x,y) = u(x,y) + \varepsilon e^{ax}$, όπου το a θα το επιλέξουμε ώστε

$$V^\varepsilon_{xx} + V^\varepsilon_{yy} + g_1 V^\varepsilon_x + g_2 V^\varepsilon_y > 0 \qquad , x,y \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{xx} + \varepsilon a^2 e^{ax} + u_{yy} + g_1(x,y)(u_x + \varepsilon a e^{ax}) + g_2 u_y = \underbrace{u_{xx} + u_{yy} + g_1 u_x + g_2 u_y}_{\geq 0} + \varepsilon e^{ax}(a^2 + a g_1(x,y)) > 0$$

Επιλέγουμε $a > 0$, ώστε $a(a + g_1(x,y)) > 0$, $\forall (x,y) \in \overline{\Omega}$.

Αρχικά, θα αποδείξουμε $\forall \varepsilon > 0$ ότι $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} V_\varepsilon(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} V_\varepsilon(x)$ (με απαγωγή σε άτοπο)

Υποθέτουμε ότι $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} V_\varepsilon(x) \neq \max\limits_{x \in \partial\Omega} V_\varepsilon(x)$

$\left(\text{Πάντοτε } \max\limits_{\overline{\Omega}} V_\varepsilon \geq \max\limits_{\partial\Omega} V_\varepsilon \right) \Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}} V_\varepsilon > \max\limits_{\partial\Omega} V_\varepsilon$.

Οπότε, $\exists (x_0, y_0) \in \Omega$ ώστε $\max\limits_{\overline{\Omega}} V_\varepsilon = V_\varepsilon(x_0, y_0)$

"Υπενθύμιση"

Σε μία μεταβλητή

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ στο t_0 έχει μέγιστο

$f(t_0)\geq f(t),\ \forall t\in(0,1)$

τότε: $f'(t_0)=0$

$f''(t)\leq 0$

Σε δύο μεταβλητές

$f(X_0)\geq f(x)$, $x\in\Omega$, $X_0\in\Omega$

$Hf(X_0) \leq 0$

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(X_0) & f_{xy}(X_0) \\ f_{yx}(X_0) & f_{yy}(X_0) \end{pmatrix} \to \text{Πίνακας του Hess}$$

$A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$A\geq B \iff A-B\geq 0$

θετικά ορισμένος πίνακας

$\iff \boxed{x^{+}(A-B)x\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^{n\times 1}}$

ανάστροφος

$\iff$ Κάθε ιδιοτιμή ≤ 0.

$\Delta f(X_0)=tr\,Hf(X_0)\leq 0$ (αφού ιδιοτιμές ≤ 0)

ίχνος του πίνακα του Hess

(το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα)

$g(t)=f(X_0+t)$

$g'(0)=\nabla f(X_0)\cdot v=0$

$g''(0)=\vec{v}^{+}\cdot\nabla f(X_0)\cdot\vec{v}$

(συνέχεια απόδειξης)

$\nabla V_\varepsilon(x_0,y_0)=0$

$HV_\varepsilon(x_0,y_0)\leq 0 \Rightarrow \Delta V_\varepsilon(x_0,y_0)\leq 0 \Rightarrow V^{\varepsilon}_{xx}+V^{\varepsilon}_{yy}(x_0,y_0)\leq 0$

Τότε όμως:

$V_{xx}^{\varepsilon}(x_0,y_0) + V_{yy}^{\varepsilon}(x_0,y_0) + g_1 V_x^{\varepsilon}(x_0,y_0) + g_2 V_y^{\varepsilon}(x_0,y_0) \le 0$

Αντίφαση, διότι $V_{xx}^{\varepsilon} + V_{yy}^{\varepsilon} + g_1 V_x^{\varepsilon} + g_2 V_y^{\varepsilon} > 0$

Οπότε $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} V_\varepsilon(x) = \max\limits_{x\in\partial\Omega} V_\varepsilon(x)$

$u(x,y) + \varepsilon e^{ax} = V_\varepsilon(x) \le \max\limits_{y\in\bar{\Omega}} V_\varepsilon(y) = \max\limits_{x\in\partial\Omega} V_\varepsilon(x) \le \max\limits_{x\in\partial\Omega}[u(x) + \varepsilon e^{ax}] \le \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x) + \varepsilon \max\limits_{x\in\partial\Omega} e^{ax}$

$u(x) \le u(x) + \varepsilon e^{ax} \le \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x) + \varepsilon M, \ \forall x \in \Omega$

Παίρνουμε όριο $\varepsilon \to 0^+$

$u(x) \le \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x) \Rightarrow \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x) \le \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$ (όμως, πάντοτε $\max\limits_{\bar{\Omega}} u \ge \max\limits_{\partial\Omega} u$)

Επομένως, $\boxed{\max\limits_{\bar{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u}$

($x = (x,y)$
μόνο στον όρο $e^{ax} \to x$: 1η συντεταγμένη)

Ανάλογο Θεώρημα

Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω ανοικτό, φραγμένο που ικανοποιεί

$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + g_1(x,y) u_x(x,y) + g_2(x,y) u_y(x,y) \le 0$, όπου $g_1, g_2 \in C(\bar{\Omega})$

Τότε: ισχύει η Αρχή Ελαχίστου για την u, δηλαδή $\boxed{\min\limits_{\bar{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u}$

Απόδειξη:

Ομοίως με τη προηγούμενη: $\max\limits_{\Omega}(-u) = \max\limits_{\partial\Omega}(-u)$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$

Έστω Ω ανοιχτό, φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^2$, $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,+\infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,+\infty))$ συνάρτηση που ικανοποιεί:

$$\underbrace{u_t(x,y,t) - \Delta_{(x,y)} u(x,y,t)}_{⊛} - g_1(x,y,t) \cdot u_x(x,y,t) - g_2\, u_y(x,y,t) \leq 0, \quad (x,y) \in \Omega,\ t>0$$

, όπου για $T>0$ οι συναρτήσεις $g_1, g_2 \in C((\bar{\Omega} \times [0,T]))$

$$\left(⊛ = \Delta_{(x,y)} u(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) \right)$$

$\Delta u \geq 0 \Rightarrow \boxed{-\Delta u \leq 0}$

αρχή μεγίστου για ελλειπτικά προβλήματα

Αντίστοιχα:

$\boxed{u_t - \Delta u \leq 0}$

αρχή μεγίστου για παραβολικά προβλήματα

Τότε, για το χωρίο $\Omega_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$ έχουμε Αρχή Μεγίστου. Ειδικότερα:

$$\max_{x \in \bar{\Omega},\, t \in [0,T]} u(x,t) = \max_{\substack{\text{παραβολικό}\\ \text{σύνορο (συμβ. } \sqcup \Omega_T)}} u(x,t)$$

$$\sqcup \Omega_T = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial \Omega \times [0,T])$$

Πραγματικό σύνορο:

$\partial(\Omega_T) = \bar{\Omega} \times \{t=0\} \cup$

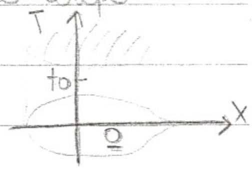
$\cup\, \partial \Omega \times [0,T] \cup \bar{\Omega} \times \{t=T\}$

$\neq$ παραβολικό σύνορο

Απόδειξη

Ομοίως με την προηγούμενη.

Παίρνω $V^{\varepsilon}(x,y,t) = u(x,y,t) + \varepsilon e^{-\lambda t}$



$t_0 < T$

$\nabla u^{\varepsilon}(x_0,t_0) = 0$, $u_t^{\varepsilon}(x_0,t_0) = 0$

$\Delta u^{\varepsilon}(x_0,y_0) \leq 0$

Ασκήσεις

Άσκηση 3 / φυλλάδιο 5

Να βρεθεί η γενική λύση:

$$\Sigma\Sigma \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & , 0<x<1, t>0 \\ u(0,t)=0 & , t>0 \\ u_x(1,t) + u_t(1,t) = 0 & , t>0 \end{cases}$$

Λύση:

Ψάχνω για λύσεις στη μορφή: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, $u_x(x,t) = X'(x) \cdot T(t)$, $u_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$

$u(0,t)=0 \Leftrightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \underset{(T(t)\neq 0)}{\Rightarrow} \boxed{X(0)=0}$

$u_x(1,t) + u_t(1,t) = 0 \Leftrightarrow X'(1) \cdot T(t) + X(1)\, T'(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{X'(1) + X(1) \cdot \dfrac{T'(t)}{T(t)} = 0}$ (*)

$\Delta E \Rightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} \overset{\exists \lambda \in \mathbb{R}}{=} -\lambda$

Οπότε η (*) γράφεται $\boxed{X'(1) - \lambda X(1) = 0}$

Επομένως, έχουμε τα προβλήματα:

$$(1) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0)=0 \\ X'(1) - \lambda X(1) = 0 \end{cases}$$

$(2)\quad T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{T(t) = c e^{-\lambda t}}$

Για το (1)

Διακρίνω περιπτώσεις. (α) $\boxed{\lambda=0}$: $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x$

$X(0)=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$, $X'(1)=0 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$

(β) $\boxed{\lambda<0}$: Χαρ. εξίσωση $\rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 = -\lambda \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda}$

Γενική λύση: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$

$X(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$, άρα $X(x) = c_1 (e^{-\sqrt{\lambda}\, x} + e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}) \Rightarrow X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}\,(e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + e^{-\sqrt{-\lambda}\, x})$

$X'(1) - \lambda X(1) = 0 \Rightarrow c_1\sqrt{-\lambda}\,(e^{+\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}) - \lambda c_1 (e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{c_1}\sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) - (\sqrt{-\lambda})^2 \cancel{c_1}\left(e^{+\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow e^{+\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}} + \sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{e^t}_{+} + \underbrace{e^{-t}}_{+} + \underbrace{t(e^t - e^{-t})}_{+} = 0$ αδύνατη $(\sqrt{-\lambda}=t>0)$

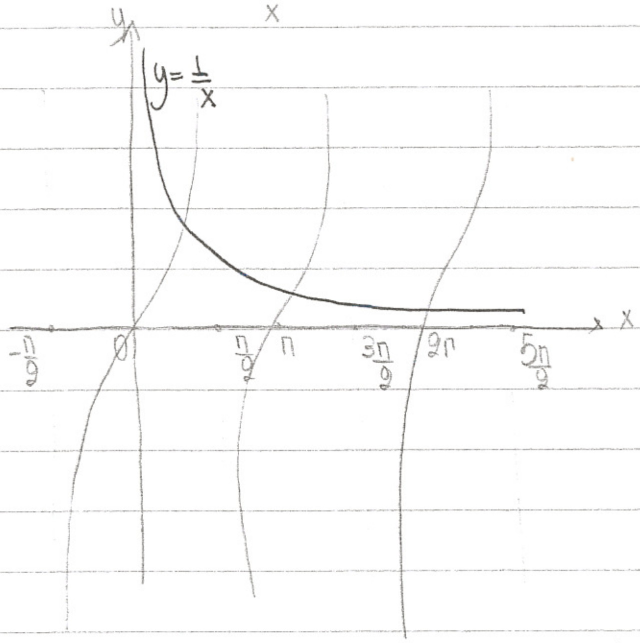
γ) $\boxed{\lambda>0} \Rightarrow X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\cdot x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0)=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$

$X'(x) = c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(1) - \lambda X(1) = 0 \iff c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) - \lambda c_2\sin(\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow \boxed{\tan\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$

Θέτω $\sqrt{\lambda} = x$: $\tan x = \frac{1}{x}$, $x>0$



$\tan x = \frac{1}{x}$, $x>0$

$f(x) = \tan x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = (1+\tan^2 x) + \frac{1}{x^2} > 0$

$\boxed{\text{ρίζες της εξίσωσης}}$ $\rightarrow$ $0<x_1<\frac{\pi}{2}$, $\pi<x_2<\frac{3\pi}{2}$ Γενικά $(k-1)\pi < x_k < (k-1)\pi + \frac{\pi}{2}$

$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{k-1} = \pi$ $\boxed{\sqrt{\lambda_k} = x_k}$ ← ιδιοτιμές

$\Downarrow$

$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{(k-1)} = \pi \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}\cdot k}{(k-1)k} = \pi$

Ιδιοσυναρτήσεις: $X_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}\cdot x)$, $k=1,2,\dots \Rightarrow u_k(x,t) = \sin(\sqrt{\lambda_k}\,x)\,e^{-\lambda_k\cdot t}$

άρα:

$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x)e^{-\lambda_k t}}$ → Γενική λύση

Άσκηση 6 / φυλλάδιο 6 (Πρόοδος: θέμα 6)

$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xt} - \cos^2 x\, u_{tt} - \cos x\, u_t = f(x,t)$, $0<x<1$, $t>0$ ← Υπερβολικού Τύπου

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & , 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & , 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = h(t) & , t>0 \\ u(1,t) = g(t) & , t>0 \end{cases}$$

Λύση: (Απαγωγή σε άτοπο)

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις, θέτουμε $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

Η w λύνει το πρόβλημα:

$$\begin{cases} w_{xx} - 2\sin x\, w_{xt} - \cos^2 x\, w_{tt} - \cos x\, w_t = 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 & , 0 \le x \le 1 \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & , t>0 \end{cases}$$

Πρόχειρο:

Πολ/ζω με w_t την ΔΕ και παίρνω το ολοκλήρωμα από 0 έως 1 : $\displaystyle\int_0^1 \left(w_t \cdot w_{xx} - 2\sin x\, w_t\, w_{xt} - \cos^2 x\, w_t \cdot w_{tt} - \cos x\, w_t^2\right) dx = 0$ (*)

• $\displaystyle\int_0^1 w_t \cdot (w_x)_x\, dx = -\int_0^1 w_{tx} \cdot w_x\, dx + [w_t \cdot w_x]_0^1 =$

$$= -\int_0^1 w_{tx} \cdot w_x\, dx + [\underbrace{w_t(1,t)}_{0} w_x(1,t) - \underbrace{w_t(0,t)}_{0} w_x(0,t)] = -\int_0^1 w_{tx} \cdot w_x\, dx =$$

(γιατί $w(1,t)=0$ $\Rightarrow w_t(1,t)=0$)

$$= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} w_x^2\right) dx = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \frac{1}{2} w_x^2(x,t)\, dx \Rightarrow \int_0^1 w_t \cdot (w_x)_x\, dx = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \frac{1}{2} w_x^2(x,t)\, dx$$

• $\int_0^1 \sin x \, w_t \, w_{xt} \, dx = \int_0^1 \sin x \left(\frac{1}{2} w_t^2\right)_x dx =$ $\left(\frac{1}{2}(w_t^2)_x = \frac{1}{2} \cdot 2 \, w_t \, w_{tx}\right)$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \cos x \, w_t^2(x,t) \, dx + \cancelto{0}{\left[\frac{1}{2}\sin x \, w_t^2\right]_0^1} \Rightarrow \int_0^1 \sin x \, w_t \cdot w_{xt} \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \cos x \, w_t^2(x,t) \, dx$

• $\int_0^1 \cos^2 x \, w_t \cdot w_{tt} \, dx = \int_0^1 \cos^2 x \, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} w_t^2\right) dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^1 \cos^2 x \, w_t^2(x,t) \, dx$

Επομένως:

$(*) \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx + \cancel{\int_0^1 \cos x \, w_t^2 \, dx} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^1 \cos^2 x \, w_t^2 \, dx - \cancel{\int_0^1 \cos x \, w_t^2 \, dx} =$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^1 \left(w_x^2(x,t) + \cos^2 x \, w_t^2(x,t)\right) dx = 0$

Λύση (συνέχεια):

$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(w_x^2(x,t) + \cos^2 x \, w_t^2(x,t)\right) dx$

$\mathcal{E}'(t) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$, $\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\cancelto{0}{w_x^2(x,0)} + \cos^2 x \, \cancelto{0}{w_t^2(x,0)}\right) dx$

$w(x,0) = 0 \Rightarrow w_x(x,0) = 0$

$w_t(x,0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \left(w_x^2(x,t) + \cos^2 x \, w_t^2(x,t)\right) dx = 0 \Rightarrow w_x(x,t) = 0$ και $\cos^2 x \, w_t^2(x,t) = 0$

$\Downarrow$

$w_x = 0 \;,\; w_t = 0$

ΘΜΤ: $w(x,t) - w(0,t) = x \, \cancelto{0}{w_x}(\xi_x, t)$

$\Rightarrow w(x,t) = 0 \quad \forall x$

$, \forall t > 0$

14/05/2015

$\boxed{\text{19º μάθημα}}$

$\boxed{\text{Ασκήσεις}}$

Άσκηση 3 / φυλλάδιο 4

$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad , 0<x<\pi , t>0$

$u_x(0,t) = 0 \quad , t>0$

$u(\pi,t) = 0 \quad , t>0$

Λύση:

Ψάχνω λύσεις στη μορφή: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$X'(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X'(0)=0}$

$X(\pi) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(\pi)=0}$

$\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} \overset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} -\lambda$

Οπότε, έχω το σύστημα:

① $\{ T'(t) + \lambda T(t) = 0$

② $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Για το ②}}$

χαρακτηριστική εξίσωση: $\rho^2 + \lambda = 0$

Διακρίνω περιπτώσεις για το λ:

(i) $\boxed{\lambda=0}$: $X(x) = c_1 x + c_2 \quad , X'(x) = c_1$

$X'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad , \quad X(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\Rightarrow X(x) = 0$ απορρίπτεται (γιατί δεν θέλω τετριμμένη λύση)

(ii) $\boxed{\lambda<0}$: $p=\pm\sqrt{-\lambda}$

$X(x)=C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $X'(x)=C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x}-C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X'(0)=0 \Rightarrow C_1\sqrt{-\lambda}-C_2\sqrt{-\lambda}=0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}(C_1-C_2)=0 \Rightarrow C_1=C_2$

$X(\pi)=0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0 \Rightarrow C_1(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})=0 \Rightarrow C_1(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})=0 \Rightarrow$

$C_1=0$

$\Rightarrow C_2=0$ άρα $X(x)\equiv 0$ απορρίπτεται

(iii) $\boxed{\lambda>0}$: $p=\pm i\sqrt{\lambda}$

$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$, $X'(x)=-C_1\sin(\sqrt{\lambda}x)\sqrt{\lambda}+C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(0)=0 \Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow C_2=0$

$X(\pi)=0 \Rightarrow C_1\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0=\cos(\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}$ $k=1,2,\dots$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}=k-\frac{1}{2}$

$\left(\begin{array}{l}\cos\varphi=\cos\theta \Leftrightarrow \varphi=2k\pi\pm\theta,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{αν } \theta=\frac{\pi}{2}, \text{ τότε } \varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right)$

$\Rightarrow \lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$, $k=1,2,\dots$

Οπότε $\lambda_k \rightarrow \underbrace{X_k(x)}_{\text{αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση}}=\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$

$\boxed{\text{Για το (1)}}$

$T'(t)+\lambda T(t)=0 \Rightarrow T(t)=C_{\lambda k}e^{-(k-\frac{1}{2})^2 t}$, $t>0$

άρα, $u_k(x,t)=\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot C_{\lambda k}e^{-(k-\frac{1}{2})^2 t}$, $k=1,2,\dots$ $\rightarrow$ ειδική λύση

Επομένως:

Γενική Λύση: $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(k-\frac{1}{2})^2 t}\cdot\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$

Άσκηση 1/ φυλλάδιο 4

$$u_t(x,t) - u_{xxx}(x,t) = f(x,t) \quad , 0<x<1 \, , t>0$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , 0<x<1$$
$$u_x(0,t) = h(t) \quad , t>0$$
$$u_{xx}(0,t) = H(t) \quad , t>0$$
$$u_x(1,t) = g(t) \quad , t>0$$

(Υπόδειξη: $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dt$)

Λύση:

Έστω ότι το Π.Α.Σ.Τ έχει 2 διαφορετικές λύσεις u_1, u_2. Τότε, η $w = u_1 - u_2$ λύνει το ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} w_t(x,t) - w_{xxx}(x,t) = 0 \quad , 0<x<1, t>0 \\ w(x,0) = 0 \quad , 0<x<1 \\ w_x(0,t) = 0 \quad , t>0 \\ w_{xx}(0,t) = 0 \quad , t>0 \\ w_x(1,t) = 0 \quad , t>0 \end{cases}$$

Η ενέργεια του συστήματος είναι $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx$

$$\mathcal{E}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 2w_x(x,t)\,w_{xt}(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cancel{2}\,w_x(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x}(w_t)\,dx =$$

$$= \cancel{\left[w_x \cdot w_t\right]_0^1}^{\,0} - \int_0^1 w_{xx}(x,t)\cdot w_t\,dx = -\int_0^1 w_{xx}\cdot w_{xxx}\,dx = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(w_{xx}^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[w_{xx}^2(1,t) - w_{xx}^2(0,t)\right] = -\frac{1}{2}w_{xx}^2(1,t) \leq 0$$

Άρα, η $\mathcal{E}(t)$ είναι φθίνουσα.

$t \geq 0 \Rightarrow \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,0) = 0$ →

$\omega(x,0)=0 \Rightarrow \omega_x(x,0)=0$

Οπότε, $E(t)=0 \Rightarrow \int_0^1 \omega_x^2(x,t)dx=0 \Rightarrow \omega_x(x,t)=0 \Rightarrow \int_0^x \omega_\xi(\xi,t)d\xi=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(x,t)-\omega(0,t)=0$ (από ΘΜΤ)

$\omega_x(x,t)=0 \Rightarrow \omega(x,t)=f(t)$

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε.: $f'(t)=0 \Rightarrow f(t)=f(0)$

$\omega(x,t)=\omega(0,0)=0 \Rightarrow u_1=u_2$ Άτοπο

Άσκηση 2/φυλλάδιο 4

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-(1+x^2+y^4)}_{(A)}=f(x,y) \qquad x^2+y^2<1$$

$u(x,y)=g(x,y) \qquad , x^2+y^2=1$ → Ν.δ.ό. το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση

Λύση:

Έστω u_1, u_2 δύο διακεκριμένες λύσεις.

Τότε, η $u:=u_1-u_2$ λύνει το πρόβλημα:

$(A)=0$

$u(x,y)=0$

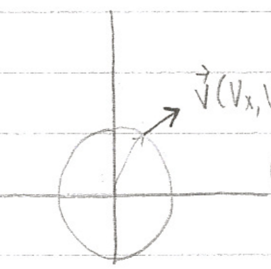
Πολλ/ζω με την u και ολοκληρώνω:

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-(1+x^2+y^4)u^2\right)dxdy=0 \qquad , x^2+y^2<1$$

$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$

$$I_1=\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)u\,dxdy=-\int_\Omega (1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dxdy+\int_{\partial\Omega}(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{u}_{0}\cdot V_x\,ds$$

→



$\vec{V}(V_x,V_y)=(x,y)$

$$\frac{(x,y)}{\sqrt{(x,y)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=(x,y)$$

$$I_2 = -\int_{\Omega} (1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

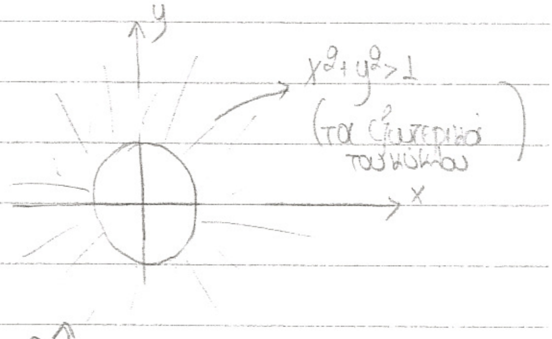
$$I_3 = -\int_{\Omega} (1+x^2+y^4)\,u^2\, dx\,dy$$

Επομένως, έχουμε $\displaystyle\int_{\Omega}\left((1+x^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + (1+x^2+y^4)u^2\right)dx\,dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$
Έχουμε μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις, άρα καθεμία από αυτές αναγκαστικά "$=0$"

$$\Rightarrow (1+x^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = (1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = (1+x^2+y^4)u^2 = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \quad \underline{\text{άτοπο}}$$

<u>Άσκηση 1/φυλλάδιο 5</u>



$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , \; x^2+y^2>1 \qquad (1)$

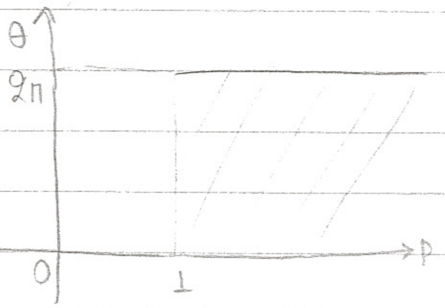
$u(1,\theta) = 1 + 3\sin^2\theta \qquad , \; 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad$, u φραγμένη

<u>Λύση</u>: (γράφω την δε σε πολικές συντεταγμένες)

$x = \rho\cos\theta \quad , \rho > 1 \quad , \theta \in [0, 2\pi]$

$y = \rho\sin\theta$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$



$(1) \Rightarrow u_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}u_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0 \quad (*) \quad , \rho > 1$ και $\theta \in [0, 2\pi]$

(με τη μέθοδο Fourier)

Ψάχνω λύσεις στη μορφή:

$u(\rho,\theta) = R(\rho)\cdot\Theta(\theta) \quad , \rho>1, \theta \in [0,2\pi]$ Αντικαθιστώ στην δε $(*)$:

$$R''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\cdot\Theta''(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) - \rho R'(\rho)}{R(\rho)} \overset{(\sigma\tau\alpha\theta.)}{=} -\lambda \qquad \rightarrow$$

Οπότε, έχω το σύστημα:

① $\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0 \quad , \theta\in[0,2\pi] \\ \Theta(0)=\Theta(2\pi) \; , \; \Theta'(0)=\Theta'(2\pi) \end{cases} \rightarrow$ Περιοδικές Σ.Σ.

② $p^2R''(p)+pR'(p)-\lambda R(p)=0 \; , \; p>1$

$\boxed{\text{Για το ①}}$:

$\lambda_0=0 \rightarrow \Theta_0(\theta)=1$

$\lambda_k=k^2 \rightarrow \Theta_k(\theta)=\begin{cases}\cos kx, \\ \sin kx\end{cases} \xrightarrow{(\text{δηλαδή})} \Theta_k(\theta)=c_1\cos k\theta+c_2\sin k\theta$

$\boxed{\text{Για το ②}}$

για $\lambda_0=0$: $p^2R''(p)+pR'(p)=0 \Rightarrow p\left(pR''(p)+R'(p)\right)=0 \Rightarrow \left(pR'(p)\right)'=0 \Rightarrow$

$\overset{(\exists c\in\mathbb{R})}{\Rightarrow} pR'(p)=c_1 \Rightarrow R'(p)=\dfrac{c_1}{p} \Rightarrow R(p)=c_1\ln p+c_2$

Επιλέγω $c_1=0$ (επειδή θέλω να είναι φραγμένη και $\ln p$ αφορακτη)

Οπότε, $\boxed{R(p)=c_2}$

για $\lambda_k=k^2$

$p^2R''(p)+pR'(p)-k^2R(p)=0$

Ψάχνω λύσεις στη μορφή: $R(p)=p^m$

$\Rightarrow p^2m(m-1)p^{m-2}+pmp^{m-1}-k^2p^m=0$

$\Rightarrow p^m\left(m(m-1)+m-k^2\right)=0 \Rightarrow m^2-k^2=0 \Rightarrow m^2=k^2 \Rightarrow \boxed{m=\pm k}$

Οπότε $R(p)=c_1p^k+c_2p^{-k}$ Επιλέγω $c_1=0$ (γιατί p^k αφορακτη)

άρα, $\boxed{R(p)=c_2p^{-k}}$

Οπότε: $u_k(p,\theta)=p^{-k}\left(c_1\cos k\theta+c_2\sin k\theta\right) \leftarrow$ ειδική λύση

Επομένως $u(p,\theta)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right) \rightarrow$ Γενική Λύση

Συνοριακές Συνθήκες: $u(1,\theta)=1+3\sin^2\theta=(*)$ $\rightarrow$

$$\circledast = 1+3\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{\sin 3\theta}{4}\right) =$$

$$= 1 + \frac{9}{4}\sin\theta - \frac{3}{4}\sin 3\theta$$

$$u(1,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

άρα, $\frac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow a_0 = 2$

$a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

$b_1 = \frac{9}{4}$, $b_3 = -\frac{3}{4}$, $b_k = 0$, $k \neq 1, 3$

Άρα, $u(\rho,\theta) = 1 + \frac{1}{\rho}\frac{9}{4}\sin\theta - \frac{3}{4}\frac{1}{\rho^3}\sin 3\theta$

(!) $\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) =$

$= \sin 2\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cos 2\theta =$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta =$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\Rightarrow \boxed{\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta}$

19/05/2015

20ο μάθημα

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ασκήσεις

Άσκηση 2 (φυλλάδιο 6 (Πρόοδος))

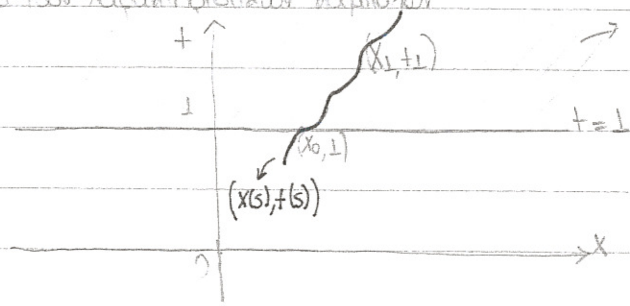
Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} (t+u(x,t))\,u_x(x,t) + t\,u_t(x,t) = x-t, & x\in\mathbb{R},\ t>1 \\ u(x,1) = 1+x, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση:

Με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών

εδώ θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα



Επιλέγω $(x(0),t(0))=(x_0,1)$ και έστω $\sigma(s)=u(x(s),t(s))$

$$\sigma'(s)=\frac{d}{ds}u(x(s),t(s)) = u_x(x(s),t(s))\cdot x'(s) + u_t(x(s),t(s))\cdot t'(s)$$

Επιλέγουμε $\begin{cases} x'(s) = t(s)+u(x(s),t(s)), & x(0)=x_0 \\ t'(s)=t(s), & t(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(s)=t(s)+\sigma(s), & x(0)=x_0 \\ t'(s)=t(s), & t(0)=1 \end{cases}$

άρα, $\sigma'(s) = x(s)-t(s)$, $\sigma(0)=u(x(0),t(0))=u(x_0,1) = 1+x(0)=1+x_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(s)=e^s+\sigma(s), & x(0)=x_0 \quad (1) \\ t'(s)-t(s)=0, & t(0)=1 \Rightarrow (e^{-s}t(s))'=0 \Rightarrow e^{-s}t(s)=e^{-0}t(0)=1 \Rightarrow \boxed{t(s)=e^s} \\ \sigma'(s)=x(s)-e^s, & \sigma(0)=1+x_0 \quad (2) \end{cases}$$

Προσθέτω τις ① και ② $\Rightarrow x'(s)+\sigma'(s)=\sigma(s)+x(s) \Rightarrow x'(s)-x(s)=-(\sigma'(s)-\sigma(s)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{-s}x(s))' = -(e^{-s}\sigma(s))' \Rightarrow e^{-s}x(s) = -e^{-s}\sigma(s)+c$

για $s=0$: $e^{-0}x(0) = -e^{-0}\sigma(0)+c \Rightarrow x_0 = -1-x_0+c \Rightarrow \boxed{c=2x_0+1}$

Άρα, $e^{-s}x(s) = -e^{-s}\sigma(s)+2x_0+1 \Leftrightarrow x(s) = -\sigma(s)+e^{s}(2x_0+1)$

Οπότε: $\sigma'(s) = -\sigma(s)+e^{s}(2x_0+1)-e^{-s} \Leftrightarrow \sigma'(s)+\sigma(s) = e^{s}2x_0 \Leftrightarrow e^{s}(\sigma'(s)+\sigma(s)) = e^{2s}2x_0$

$\Leftrightarrow (e^{s}\sigma(s))' = 2x_0e^{2s} \Leftrightarrow (e^{s}\sigma(s))' = (x_0e^{2s})' \Leftrightarrow e^{s}\sigma(s)-x_0e^{2s} = e^{0}\sigma(0)-x_0e^{2\cdot 0} = 1+x_0-x_0 = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\sigma(s) = x_0e^{s}+e^{-s}}$

άρα:

$x(s) = -\sigma(s)+e^{s}(2x_0+1) = -x_0e^{s}-e^{-s}+2x_0e^{s}+e^{s} = e^{s}(-x_0+2x_0+1)-e^{-s} = e^{s}(x_0+1)-e^{-s}$

$\Leftrightarrow \boxed{x(s) = e^{s}(x_0+1)-e^{-s}}$

$\sigma(s) = u(x(s),t(s)) = x_0e^{s}+e^{-s} \Leftrightarrow u(e^{s}(x_0+1)-e^{-s}, e^{s}) = x_0e^{s}+e^{-s}$

Έστω $\bar{s}$ η τιμή της παραμέτρου s, ώστε $u(x(\bar{s}),t(\bar{s})) = u(x_1,t_1) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x(\bar{s}) &= x_1 \\ t(\bar{s}) &= t_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &e^{\bar{s}}(x_0+1)-e^{-\bar{s}} = x_1 \\ &e^{\bar{s}} = t_1 \Leftrightarrow \boxed{\bar{s}=\ln t_1} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &t_1(x_0+1)-\frac{1}{t_1} = x_1 \\ &\bar{s} = \ln t_1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &t_1x_0+t_1-\frac{1}{t_1} = x_1 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{x_1}{t_1}-1+\frac{1}{t_1^2}} \\ &\boxed{\bar{s}=\ln t_1} \end{aligned}\right.$$

Όμως, επιλέγοντας $\bar{s}=s$: $u(x(\bar{s}),t(\bar{s})) = x_0e^{\bar{s}}+e^{-\bar{s}} \Leftrightarrow u(x_1,t_1) = \left(\frac{x_1}{t_1}-1+\frac{1}{t_1^2}\right)t_1 + \frac{1}{t_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{u(x_1,t_1) = x_1-t_1+\frac{2}{t_1}}$

Άσκηση 3 / φυλλάδιο 6 (Πρόοδος)

Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ

$$3u_{xx}(x,t) - 2u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t) = 0 \quad , x\in\mathbb{R} \,, t>0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

Λύση:

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1) = 4+12 = 16>0$ άρα η εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου.

Εισάγουμε νέο σύστημα συντεταγμένων $\boxed{u(x,t)=U(\xi,\eta)}$ με $\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}$

$$U_{xx} = \alpha^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\gamma U_{\xi\eta} + \gamma^2 U_{\eta\eta}$$

$$U_{tt} = \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\beta\delta U_{\xi\eta} + \delta^2 U_{\eta\eta}$$

$$U_{xt} = \alpha\beta U_{\xi\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta} + (\alpha\delta+\beta\gamma) U_{\xi\eta}$$

Οπότε αντικαθιστώ στην (1):

$$3\alpha^2 U_{\xi\xi} + 3\gamma^2 U_{\eta\eta} + 6\alpha\beta U_{\xi\eta} - 2\alpha\gamma U_{\xi\xi} - 2\beta\delta U_{\eta\eta} - 2(\alpha\delta+\beta\gamma)U_{\xi\eta} - \beta^2 U_{\xi\xi} - \delta^2 U_{\eta\eta} - 2\beta\delta U_{\xi\eta} = 0$$

$$\Rightarrow (3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2)U_{\xi\xi} + (3\gamma^2 - 2\gamma\delta - \delta^2)U_{\eta\eta} + (6\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta)U_{\xi\eta} = 0$$

Επιλέγουμε $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 = 0$ θέτω $p=\frac{\alpha}{\beta}$: $3p^2 - 2p - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 3(-1) = 16$

$p = \frac{2\pm 4}{6} \Rightarrow p_1 = 1, \; p_2 = -\frac{1}{3}$

Επιλέγουμε $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ και $\frac{\gamma}{\delta} = -\frac{1}{3}$

$\alpha = \beta \qquad \delta = -3\gamma$

Οπότε: $6\beta\gamma + 6\beta\gamma - 2\beta\gamma + 6\beta\gamma = 16\beta\gamma \neq 0$

$\beta = 1 = \gamma = \alpha$ και $\delta = -3$

Επομένως: $\begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x-3t \end{cases}$

$\Rightarrow U(\xi,\eta)=0 \Rightarrow U(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta) \Rightarrow u(x,t) = A(x+t) + B(x-3t)$

$$u_t(x,t) = A'(x+t) - 3B'(x-3t)$$

Για $t=0$: $u(x,0) = f(x) \Rightarrow A(x) + B(x) = f(x) \Rightarrow \boxed{A(x) = f(x) - B(x)}$

και $u_t(x,0) = g(x) = A'(x) - 3B'(x) = g(x) \Rightarrow \boxed{A'(x) = 3B'(x) + g(x)} \Rightarrow$

$A(x) = 3B(x) + \int_0^x g(s)ds + c \Rightarrow A(x) = 3f(x) - 3A(x) + \int_0^x g(s)ds + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{3}{4} f(x) + \frac{1}{4}\int_0^x g(s)\,ds + \frac{1}{4}c$$

Όποτε, $B(x) = \frac{1}{4} f(x) - \frac{1}{4} g(s)ds - \frac{1}{4}c$

Άρα: $u(x,t) = \frac{3}{4} f(x+t) + \frac{1}{4}\int_0^{x+t} g(s)ds + \cancel{\frac{1}{4}c} + \frac{1}{4}f(x-3t) - \frac{1}{4}\int_0^{x-3t} g(s)ds - \cancel{\frac{1}{4}c}$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{3}{4} f(x+t) + \frac{1}{4} f(x-3t) + \frac{1}{4}\int_{x-3t}^{x+t} g(s)\,ds}$$

Άσκηση 4 / φυλλάδιο 6 (Πρόοδος)

Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ :

$3u_{xx}(x,t) - 2u_{xt}(x,t) - u_{tt}(x,t) = f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$

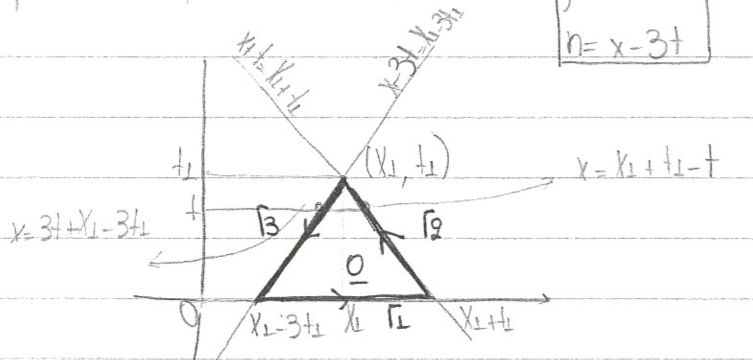
$u(x,0)=0$, $x\in\mathbb{R}$

$u_t(x,0)=0$

Λύση:

$\Delta>0$ Υπερβολικού τύπου

Χαρακτηριστικές καμπύλες (από άσκηση 3) $\boxed{\begin{matrix}\xi = x+t \\ \eta = x-3t\end{matrix}}$



Θεώρημα Green : $\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdt = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right) dxdt$

Εδώ $P(x,t) = u_t$, $Q(x,t) = 3u_x - 2u_t$

Οπότε, από θεώρημα Green έχουμε:

$$\int_{\partial D} u_t\,dx + (3u_x - 2u_t)\,dt = \iint_D f(x,t)\,dx\,dt \qquad (1)$$

- $$\int_{\Gamma_1} \underbrace{\cancel{u_t(x,0)}}_{0\text{ (από αρχικές συνθήκες)}}\,dx + \underbrace{\cancel{(3u_x(x,0) - 2u_t(x,0))\,dt}}_{0\text{ (γιατί } t=0 \Rightarrow dt=0)} = 0$$

- $$\int_{\Gamma_2} u_t(x,t)\,dx + (3u_x(x,t) - 2u_t(x,t))\,dt = (*)$$

$$\left(dU = U_x\,dx + U_t\,dt\right)$$

$$x + t = x_1 + t_1 \Rightarrow dx + dt = 0 \Rightarrow dx = -dt$$

$$(*) = \int_{\Gamma_2} -u_t\,dt - 3u_x\,dx - 2u_t\,dt = \int_{\Gamma_2} -3u_t\,dt - 3u_x\,dx = -3\int_{\Gamma_2} dU =$$

$$= -3\left[u(x_1,t_1) - \overset{0}{u(x_1+t_1,0)}\right] = -3u(x_1,t_1)$$

- $$\int_{\Gamma_3} u_t\,dx + (3u_x - 2u_t)\,dt = (**)$$

$$x - 3t = x_1 - 3t_1 \Rightarrow dx - 3dt = 0 \Rightarrow dx = 3dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{3}$$

$$(**) = \int_{\Gamma_3} 3u_t\,dt + u_x\,dx - 2u_t\,dt = \int_{\Gamma_3} u_t\,dt + u_x\,dx = \int_{\Gamma_3} dU = \left[\overset{0}{u(x_1-3t_1,0)} - u(x_1,t_1)\right] =$$

$$= -u(x_1,t_1)$$

Επομένως: $(1) \Rightarrow -4u(x_1,t_1) = \iint_D f(x,t)\,dx\,dt \Rightarrow u(x_1,t_1) = -\frac{1}{4}\iint_D f(x,t)\,dx\,dt =$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{t_1}\int_{3t+x_1-3t_1}^{x_1+t_1-t} f(x,t)\,dx\,dt$$