Πέμπτη 2 Οκτωβρίου 2014

Α. Τερτίκας

<u>ΜΔΕ</u>

(Φυλλάδιο 1)

1. Έστω $B(0,1) \subset \mathbf{R}^n$ και $f \in \mathbf{C}(B(0,1))$. Αποδείξτε ότι
α)

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{\partial B(0,r)} f(X)\, dS_X \;=\; f(0).$$

β)

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B(0,r)} f(X)\, dX \;=\; f(0).$$

2. Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ (προβλήματος αρχικών τιμών)

$$u_t(x,t) + b\cdot\nabla u(x,t) + cu(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,+\infty)$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

όπου $c \in \mathbf{R}$ και $b \in \mathbf{R}^n$ είναι γνωστές σταθερές και $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

3. Έστω $u \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^n)$ αρμονική συνάρτηση. Εάν A είναι ένας ορθογώνιος $n\times n$ πίνακας (ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο) και ορίσουμε

$$v(x) = u(Ax), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

αποδείξτε τότε ότι η v είναι αρμονική συνάρτηση επίσης.

4. Έστω $u \in \mathbf{C}^2(B(0,1)) \cap \mathbf{C}(\overline{B(0,1)})$ για την οποία ισχύει:

$$-\Delta u(x) \;=\; f(x), \quad x \in\; B(0,1),$$

$$u(x) \;=\; g(x), \quad x \in\; \partial B(0,1),$$

όπου f και g δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις.

Ακολουθήστε ανάλογη αποδεικτική διαδικασία του τύπου της μέσης τιμής για να αποδείξτε ότι στις δύο διαστάσεις ισχύει:

$$u(0) = \fint_{\partial B(0,1)} g(X)\, dS_X - \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,1)} f(X)\, \ln|X|\, dX.$$

5. Έστω U ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Την $v \in \mathbf{C}^2(U)$ τη λέμε υφαρμονική εαν ικανοποιεί

$$-\Delta v(x) \leq 0, \quad x \in U.$$

α) Αποδείξτε ότι ισχύει:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)\, dy, \quad \forall\, B(x,r) \subset U.$$

β) Αποδείξτε ότι εάν επιπρόσθετα $v \in \mathbf{C}(\overline{U})$ τότε

$$\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v.$$

γ) Έστω $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομαλή κυρτή συνάρτηση και u αρμονική συνάρτηση. Ορίζουμε

$$v(x) = \phi(u(x)), \quad x \in U.$$

Αποδείξτε ότι η v είναι υφαρμονική.
δ) Αποδείξτε επίσης ότι η

$$w(x) = |\nabla u(x)|^2, \quad x \in U$$

είναι υφαρμονική επίσης.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>