Πέμπτη 17 Οκτωβρίου 2014

Α. Τερτίκας

<u>**ΜΔΕ**</u>

(Φυλλάδιο 2)

1. Έστω u ομαλή λύση του προβλήματος

$$-\Delta u(x) \;=\; f(x), \quad x \in\; \Omega,$$

$$u(x) \;=\; g(x), \quad x \in\; \partial\Omega,$$

όπου f και g δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις και $\Omega\; \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο.

Αποδείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά c που εξαρτάται μόνο από το Ω ώστε να ισχύει

$$\max_{\overline{\Omega}}\; |u| \leq\; c(\max_{\overline{\Omega}}\; |f| + \max_{\partial\Omega}\; |g|)$$

2. (Αρχή Ανάκλασης) Θέτουμε

$$B_1^+ \;=\; \{x \in \mathbf{R}^n | x_n > 0\},$$

και υποθέτουμε

$$u(x) = 0, \quad x \in B_1^+ \cap \{x_n = 0\}.$$

Για $x \in B_1$ ορίζουμε

$$v(x) \;= \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

α) Εάν επιπρόσθετα $u \in \mathbf{C}^2(\overline{B_1^+})$ είναι αρμονική συνάρτηση, αποδείξτε ότι η $v \in \mathbf{C}^2(B_1)$ και είναι μάλιστα αρμονική στο B_1.

β) Εαν υποθέσουμε μόνο ότι $u \in \mathbf{C}^2(B_1^+) \cap \mathbf{C}(\overline{B_1^+})$ είναι αρμονική συνάρτηση, αποδείξτε επίσης ότι η $v \in \mathbf{C}^2(B_1)$ και είναι μάλιστα αρμονική στο B_1.

3. Έστω $u \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^n_+) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ φραγμένη αρμονική συνάρτηση. Εαν επιπρόσθετα ισχύει:

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \;=\; 0, \quad \forall\, x' \;\in \mathbf{R}^{n-1},$$

αποδείξτε τότε ότι:

$$u \equiv 0 \quad \text{στο} \quad \overline{\mathbf{R}^n_+}$$

4. Έστω u η λύση του προβλήματος

$$-\Delta u(x) \;=\; 0, \quad x \in\; \mathbf{R}^n_+,$$

$$u(x) \;=\; g(x), \quad x \in\; \partial\mathbf{R}^n_+,$$

που δίνεται από τον τύπο του Poisson. Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη και μάλιστα

$$g(x) = |x|, \;\; x \in \partial \mathbf{R}^n_+ \;\; |x| \leq 1.$$

Αποδείξτε ότι ∇u δεν είναι φραγμένο κοντά στο 0.

Υπόδειξη: Εκτιμήστε $\frac{u(te_n)-u(0)}{t}, \;\; t > 0.$

5. Έστω $c > 0$ και $x \in \mathbf{R}^3$.
α) Βρείτε ακτινικά συμμετρική λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) + cu(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3,$$

στην μορφή $u(x) = \frac{f(r)}{r}, r = |x|$ με $f(0) > 0$.
β) Βρείτε τη θεμελειώδη λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) + cu(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

γ) Έστω u λύση της εξίσωσης και $\rho > 0$ τέτοιο ώστε :

$$\sin(\sqrt{c}\rho) \neq 0.$$

Αποδείξτε ότι η λύση u έχει την εξής "γενικευμένη ιδιότητα μέσης τιμής"

$$u(x) \;=\; \frac{\sqrt{c}\rho}{\sin(\sqrt{c}\rho)} \, \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) \, dS_y \; .$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>