Πέμπτη 30 Οκτωβρίου 2014

Α. Τερτίκας

<u>**ΜΔΕ**</u>

(Φυλλάδιο 3)

1. Έστω $u \in \mathbf{C}^2(B_1) \cap \mathbf{C}(\overline{B_1})$ θετική αρμονική συνάρτηση. Αποδείξτε την ακόλουθη μορφή της ανισότητας Harnack

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}\, u(0) \le u(x) \le \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}\, u(0), \quad x \in B_1.$$

2. Έστω $g : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ ομαλή συνάρτηση ώστε $g(0) = 0$. Αποδείξτε χωρίς επαλήθευση, ότι ο τύπος

$$u(x,t) := \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}}\, e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}}\, g(s)\, ds\ ,$$

μας δίνει τη λύση του Προβλήματος Αρχικών Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \ \ x>0, \ \ t>0, \\ u(x,0) &= 0, \ \ x>0, \\ u(0,t) &= g(t), \ \ t \ge 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ και κατάλληλη επέκταση αυτής για $x < 0$.

3. Έστω Ω φραγμένο και $u \in \mathbf{C}^{2,1}(\Omega_T) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega_T})$ λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{στο} \quad \Omega_T.$$

α) Για $\varepsilon > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $v_\varepsilon = u - \varepsilon t$. Αποδείξτε ότι ικανοποιεί

$$v_t - \Delta v < 0, \quad \text{στο} \quad \Omega_T,$$

και επιπρόσθετα ότι

$$\max_{\overline{\Omega_T}}\ v_\varepsilon = \max_{\Gamma_T}\ v_\varepsilon$$

β) Αποδείξτε επίσης ότι

$$\max_{\overline{\Omega_T}}\ u = \max_{\Gamma_T}\ u.$$

4. Τη συνάρτηση $v \in \mathbf{C}^{2,1}(\Omega_T)$ τη λέμε υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας εαν ικανοποιεί την

$$v_t - \Delta v \le 0, \quad \text{στο} \quad \Omega_T.$$

α) Αποδείξτε ότι αν v είναι υπολύση τότε ικανοποιεί

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4(4\pi)^{n/2} r^n} \int\int_{E(x,t;r)} v(y,s) \, \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} \, dy \, ds$$

για όλα

$$E(x,t;r) \subseteq \Omega_T.$$

β)(Συνέχεια του α) Αποδείξτε επίσης ότι

$$\max_{\overline{\Omega_T}} \, v = \max_{\Gamma_T} \, v.$$

γ) Έστω $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομαλή κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε u λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{στο} \quad \Omega_T,$$

και θέτουμε $v := \phi(u)$. Αποδείξτε ότι η v είναι υπολύση της εξίσωσης θερμότητας.
δ)(Συνέχεια του γ) Αποδείξτε ότι η $w := |\nabla u|^2 + u_t^2$ είναι υπολύση της εξίσωσης θερμότητας, αν η u είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας.

5. Έστω $u \in \mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0,+\infty))$ θετική λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \;\; t > 0.$$

Αποδείξτε την ακόλουθη μορφή της ανισότητας Harnack

$$u(x,t) \geq u(y,s) \, \left(\frac{s}{t}\right)^{n/2} \, e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad t > s > 0.$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>