Πέμπτη 20 Νοεμβρίου 2014

Α. Τερτίκας

ΜΔΕ

(Φυλλάδιο 4)

1. Με κατάλληλη εφαρμογή του τύπου του Green αποδείξτε τον τύπο αναπαράστασης της λύσης

$$u_{tt}(x,t) \;-\; u_{xx}(x,t) \;=\; 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0,$$
$$u(x,0) \;=\; f(x), \;\; x \in \mathbf{R},$$
$$u_t(x,0) \;=\; g(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

2. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του ΠΑΤ

$$u_{tt}(x,t) \;-\; u_{xx}(x,t) \;=\; f(x,t), \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0,$$
$$u(x,0) \;=\; f(x), \;\; x \in \mathbf{R},$$
$$u_t(x,0) \;=\; g(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

3. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$u_{xx}(x,t) \;-\; 2\sin x \, u_{xt}(x,t) \; - \cos^2 x \, u_{tt}(x,t) \; - \cos x \, u_t(x,t) = \; 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t > 0,$$
$$u(x,0) \;=\; f(x), \;\; x \in \mathbf{R},$$
$$u_t(x,0) \;=\; g(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

Θεωρείστε γνωστό ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από το σημείο (x_0, t_0) είναι οι

$$t - \cos x - x = t_0 - \cos x_0 - x_0,$$

$$t - \cos x + x = t_0 - \cos x_0 + x_0.$$

Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι ομαλές. Υποθέτουμε επίσης

$$x_1 = x_1(x_0, t_0), \quad x_2 = x_2(x_0, t_0),$$

είναι τα σημεία που τέμνουν οι χαρακτηριστικές καμπύλες την ευθεία $t = 0$. Αποδείξτε (χωρίς επιβεβαίωση) ότι η λύση δίνεται από τον τύπο

$$2u(x_0, t_0) = (1 - \sin x_1) f(x_1) + (1 + \sin x_2) f(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \; (\cos^2 x g(x) - \cos x f(x)) \, dx.$$

4. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του ΠΑΤ

$$u_{xx}(x,t) \;-\; 2\sin x\, u_{xt}(x,t) \;-\cos^2 x\, u_{tt}(x,t) \;-\cos x\, u_t(x,t) = \; f(x,t), \;\; x \in \mathbf{R},\; t>0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \;\; x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \;\; x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

5. Έστω $u \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^n)$ αρμονική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$u \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Αποδείξτε ότι η u είναι η σταθερή συνάρτηση.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>