Πέμπτη 4 Δεκεμβρίου 2014

Α. Τερτίκας

ΜΔΕ

(Φυλλάδιο 5)

1. Αποδείξτε ότι η λύση προβλήματος

$$u_{tt}(x,t) \; - \; u_{xx}(x,t) \; = \; 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t>0,$$

$$u(x,0) \; = \; f(x), \;\; x \in \mathbf{R},$$

$$u_t(x,0) \; = \; g(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

όπου $f, g \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ ικανοποιεί

$$||u_t^2 - u_x^2||_{L^2(\mathbf{R}\times[0,+\infty))} \leq c\left(||f'||^2_{L^2(\mathbf{R})} + ||g||^2_{L^2(\mathbf{R})}\right)$$

για κατάλληλη θετική σταθερά c ανεξάρτητη των $u,\ f,\ g$.

2. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών Π.Α.Σ.Τ.

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \;\; &- \;\; u_{xx}(x,t) \; - c^2\, u_{xxtt}(x,t) \; = \; f(x,t), \;\; x \in (0,1), \; t>0, \\ u(x,0) \;\; &= \;\; f(x), \;\; x \in (0,1), \\ u_t(x,0) \;\; &= \;\; g(x), \;\; x \in (0,1), \\ u(0,t) \;\; &= \;\; h_1(t), \;\; t>0, \\ u(1,t) \;\; &= \;\; h_2(t), \;\; t>0. \end{aligned}$$

3. Να λυθεί με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x,t) \;\; &+ \;\; \frac{1}{2}\, u_x^2(x,t) \; = \; 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t>2, \\ u(x,2) \;\; &= \;\; \frac{1}{2}\, x^2, \;\; x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

4. Αποδείξτε ότι το ΠΑΤ

$$\begin{aligned} 3u_t^2(x,t) \;\; &- \;\; u_x^2(x,t) + u(x,t) \; = \; 0, \;\; x \in \mathbf{R}, \; t>0, \\ u(x,0) \;\; &= \;\; x^2, \;\; x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

έχει κλασσικές λύσεις. Ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων;

5. Για $\phi \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$ θεωρούμε το ΠΑΤ

$$\begin{aligned} xu_x(x,t) &- tu_t(x,t) = 0, \;\; x \in \mathbf{R},\; t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \;\; x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι πρόβλημα **δεν** έχει κλασσική λύση εκτός εάν $\phi \equiv c, \quad x \in \mathbf{R}$. Εάν $\phi \equiv c, \quad x \in \mathbf{R}$ αποδείξτε τότε ότι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>